12. Formes spatiales de l'espace elliptique.

Par SIGEKATU WATANABE.

(Reçu le 6 Mai, 1932.)

Sommaire : Le but de ce mémoire est à étudier quelques différences topologiques entre l'espace elliptique et les domaines fondamentaux des groupes fondamentaux, dont les connexions sont celles de les formes spatiales définies par les groupes fondamentaux correspondants.

§ 1. Représentation euclidienne de la géométrie spatiale elliptique.

1. Le groupe $\mathfrak{B}$ des mouvements propres de la géométrie spatiale elliptique se représente par un groupe des matrices propres, orthogonales et à 4 degrés, qui est d'autre part un produit direct de deux groupes $\mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_r$, dont les éléments S_l, S_r sont toujours des formes suivantes ;

$$S_l(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a, & -b, & -c, & -d \\ b, & a, & -d, & c \\ c, & d, & a, & -b \\ d, & -c, & b, & a \end{pmatrix}, \quad S_r(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a, & -b, & -c, & -d \\ b, & a, & d, & -c \\ c, & -d, & a, & b \\ d, & c, & -b, & a \end{pmatrix}.$$

Soient l_i, r_i ($i = 1, 2, 3$) 6 fonctions $p_{12} + p_{34}, p_{13} + p_{42}, p_{14} + p_{23}, p_{12} - p_{34}, p_{13} - p_{42}, p_{14} - p_{23}$, où $p_{ik} = x_i x'_k - x'_i x_k$ et $(x, x') = 0$. Lorsque l'on représente le groupe $\mathfrak{B}$ comme celui des substitutions linéaires sur l_i, r_i , on obtient un groupe Γ , réductible en deux parties irréductibles Γ_l, Γ_r ; $\Gamma = \Gamma_l + \Gamma_r$. Γ_l, Γ_r sont des représentations de $\mathfrak{S}_l$ et de $\mathfrak{S}_r$ respectivement, parce qu'on aura comme éléments correspondant à S_l, S_r D_l, D_r tels que

$$D_l = \left(\begin{array}{c|ccc} A_l & & & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \\ 0 & & & \end{array} \right), \quad D_r = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & 0 \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ \hline 0 & & & A_r \end{array} \right)$$

où

$$A_l = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2, & 2(-ab + bc), & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc), & a^2 - b^2 + c^2 - d^2, & 2(-ab + cd) \\ 2(-ac + bd), & 2(ab + cd), & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

$$A_r = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2, & 2(ad + bc), & 2(-ac + bd) \\ 2(-ad + bc), & a^2 - b^2 + c^2 - d^2, & 2(ab + cd) \\ 2(ac + bd) & 2(-ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Γ_i, Γ_r sont donc des groupes de rotations des sphères euclidiennes $\sum l_i^2 = 1, \sum r_i^2 = 1$ à deux dimensions. L'identité de Γ correspond à $\pm E$ de $\mathfrak{B}$ et l'on voit $\mathfrak{B}/\{-E\}$ holoédriquement isomorphe de Γ . Lorsqu'on désigne les sphères $\sum l_i^2 = 1, \sum r_i^2 = 1$ par K_i, K_r , on a le résultat ;

Le groupe de mouvements de la géométrie elliptique spatiale se représente par un groupe des paires des rotations indépendentes de K_i, K_r .

Si B^* est un mouvement impropre de l'espace, par exemple $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, on aura

$$B^{*-1} \mathfrak{S}_i B^* = \mathfrak{S}_i^{-1}, \quad B^{*-1} \mathfrak{S}_r B^* = \mathfrak{S}_r^{-1}.$$

Alors on aura de même

$$D^{*-1} \Gamma_i D^* = \Gamma_i^{-1}, \quad D^{*-1} \Gamma_r D^* = \Gamma_r^{-1},$$

où D^* étant la représentation de B^* ,

$$D^* = \left(\begin{array}{cc|cc} & & -1 & & \\ & 0 & & -1 & \\ & & & & -1 \\ -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 0 & \end{array} \right).$$

Il est naturel que deux éléments D_i, D_r représentent deux rotations indépendentes de K_i, K_r , mais si les matrices, représentant D_i, D_r sont équivalentes, on dit dorénavant que D_i est équivalent à D_r . On aura alors le théorème :

Si et seulement si D_i, D_r sont équivalents, l'élément $D = D_i + D_r$ de Γ a un point invariant dans l'espace.

Soit $\mathfrak{d}$ un groupe des matrices propres, orthogonales et à degré 3. On considère maintenant la relation d'équivalence entre Γ_i, Γ_r et $\mathfrak{d}$ d'après le sens plus haut expliqué. Alors un groupe indiqué par $\mathfrak{d} + \mathfrak{d}$ est un sous-groupe à 3 paramètres de Γ , dont tout élément a toujours un même point invariant dans l'espace. En effet on voit ici que ce point est $(\pm 1, 0, 0, 0)$. Lorsqu'on transforme ce sous-groupe par un élément tel que $E + T_r$, on aura un autre sous-groupe $\mathfrak{d} + T_r^{-1} \mathfrak{d} T_r$, pour lequel le point invariant est $\pm(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, si T_r est la représentation de $S_r(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

2. D'autre part, si puisque l, r peuvent être considérés comme des coordonnées de droite et de plus qu'une même droite est représentée par (l, r) ainsi que par $(-l, -r)$, on définit que $(-l, -r)$ est celle qui a le sens contraire à (l, r) , si alors (l, r) se nomme droite orientée et si l'on introduit un groupe Γ^* , défini par $\Gamma^* = \Gamma + (-E)\Gamma$, Γ^* est un groupe des mouvements de droites orientées. Lorsque deux droites (l, r) , (l', r') ont les relations $l = \pm l'$ ou $r = \pm r'$, elle sont parallèles sinistrorsement ou dextrorsement. Par suite, on aura le théorème :

Deux groupes Γ_l^* (ou Γ_r^*) sont des sous-groupes des mouvements des droites, par rapport auquel une droite orientée se laisse dextrorsement (ou sinistrorsement) parallèle à l'initiale.

Et de plus ;

$\mathfrak{d}^* + T_r^{-1}\mathfrak{d}^*T_r$ est un sous-groupe des mouvements de droites, tel que tous ses éléments laissent invariant un ensemble de droites, passant par un même point.

§ 2. Surfaces de Clifford et leur représentation.

1. On peut considérer que dans un système des coordonnées convenablement choisies, un sous-groupe quelconque de $\mathfrak{B}$, à deux paramètres ϕ_1, ϕ_2 est un groupe $\mathfrak{A}$ des matrices

$$S_l(\cos \phi_1, \sin \phi_1, 0, 0) \quad S_r(\cos \phi_2, \sin \phi_2, 0, 0),$$

où $0 \leq \phi_1 < 2\pi$, $0 \leq \phi_2 < 2\pi$ et dont la variété minimum nous donne une surface de Clifford. Une surface de Clifford, qu'on nommera *c-surface*, s'engendre toujours par un système de droites parallèles sinistrorsement ou dextrorsement et en effet, quant à la *c-surface* considérée ci-dessus, le système d'engendrantes se donne par

$$(x_*) = S_l(\cos \phi_1, \sin \phi_1, 0, 0) (x_*), \quad 0 \leq \phi_1 < \pi,$$

où (x^*) représente tout point de la droite, issue de (x) ,

$$(x^*) = S_r(\cos \phi_2, \sin \phi_2, 0, 0) (x), \quad 0 \leq \phi_2 < 2\pi.$$

Lorsqu'on représente chaque droite de ce système sur K_l, K_r , on peut réaliser la représentation de cette *c-surface*. Une des droites engendrantes par exemple, celle qui passe par (x) et par $S_l(0, 1, 0, 0) (x)$, se représentant par (l^0, r^0) , où

$$\begin{aligned} l_1^0 &= 1, l_2^0 = 0, l_3^0 = 0, & r_1^0 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, \\ r_2^0 &= 2(x_2x_3 - x_1x_4), & r_3^0 &= 2(x_1x_3 + x_2x_4), \end{aligned}$$

le système considéré maintenant peut se donner par celui de droites sinistrorsement parallèles à (l^0, r^0) , dont les coordonnées sont

$$l_1=1, \quad l_2=0, \quad l_3=0, \\ r_1=r_1^0, \quad r_2=\cos 2\phi_2 r_2^0 + \sin 2\phi_2 r_3^0, \quad r_3=-\sin 2\phi_2 r_2^0 + \cos 2\phi_2 r_3^0.$$

Suivant que ϕ_2 se varie de 0 à π , le point (r) sur K_r décrit un cercle passant par (r^0) sur K_r . Ainsi cette c -surface se représente par une paire du point $(1, 0, 0)$ de K_l et d'un cercle de K_r , passant par (r^0) .

Un système de c -surfaces ayant les axes communs, que si l'on fait (x) parcourir tout l'espace, on obtient comme variétés minimums de $\mathfrak{A}$, se représente par l'ensemble de paires du points $(1, 0, 0)$ et des cercles de K_r , existant sur les plans parallèles $r_1=\text{const.}$ dans l'espace euclidien (r_1, r_2, r_3) . Une c -surface, représentée en particulier par le grand cercle entre ces cercles de K_r , on l'appelle *c-surface centrale* de ce système. Et en particulier, ce sont les axes de ce système que représentent deux points $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$ de K_r , avec $(1, 0, 0)$ de K_l , qui appartiennent à cet ensemble de cercles comme cas particuliers.

Lorsqu'on considère au contraire un système de droites engendrant dextrorsement parallèles de cette surface, on en a une autre représentation, qui est une paire d'un cercle de K_l et d'un point $(1, 0, 0)$ de K_r , et que l'on peut obtenir en transformant la première représentation par l'élément D^* , indiqué plus haut. Si l'on transforme de nouveau des représentations déjà obtenues d'une même surface par l'élément $-E$ de Γ^* , on en aura les autres représentations. D'autre part si l'on transforme une représentation du système de c -surfaces par tous les éléments de Γ , on aura les représentations de toutes les c -surfaces. Cela posé, on peut dire :

Une paire d'un point de $K_l(K_r)$ et d'un cercle de $K_r(K_l)$ est une représentation d'une certaine c -surface et vice versa.

Une paire d'un point de $K_l(K_r)$ et d'un grand cercle de $K_r(K_l)$ est la représentation de la c -surface centrale d'un certain système de c -surfaces, avec les axes communs, mais pour abrégier l'écriture, on l'appelle simplement *c-surface centrale*.

2. Une c -surface centrale étant représentée par un point A_l de K_l et par un grand cercle α_r de K_r , on l'indique par (A_l, α_r) . Considérons maintenant deux c -surfaces centrales (A_l, α_r) , (B_l, β_r) . Soit D_l la rotation minimum qui amène A_l en B_l et soit D_r celle qui amène α_r en β_r . Soit d'abord D_l équivalente à D_r . Dans ce cas, on peut

supposer $D_l = d$, $D_r = d$, $A_l = (1, 0, 0)$ et α_r identique au grand cercle passant par $(0, 1, 0)$ et par $(0, 0, 1)$. Et de plus soit

$$d = \begin{pmatrix} \cos 2\omega, & -\sin 2\omega & 0 \\ \sin 2\omega, & \cos 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors D_l, D_r sont les représentations de

$$S_l(\cos \omega, 0, 0, \sin \omega), \quad S_r(\cos \omega, 0, 0, -\sin \omega).$$

Suivant que ω se varie de 0 à 2π , on a un système de c -surfaces centrales, données par

$$\begin{cases} l_1 = \cos 2\omega \\ l_2 = \sin 2\omega \\ l_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 = -\sin 2\omega \cos 2\varphi_2 \\ r_2 = \cos 2\omega \cos 2\varphi_2 \\ r_3 = -\sin 2\varphi_2 \end{cases}$$

c'est-à-dire par

$$(x^*) = S_l(\cos \omega, 0, 0, \sin \omega) \cdot S_r(\cos \omega, 0, 0, -\sin \omega)$$

$$\cdot S_l(\cos \phi_1^*, \sin_1^*, 0, 0) \cdot S_r(\cos \phi_2^*, \sin \phi_2^*, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ou par

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta_1^* \\ x_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 2\omega \sin \theta_1^* + \sin 2\omega \sin \theta_2^*) \\ x_3^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin 2\omega \sin \theta_1^* + \cos 2\omega \sin \theta_2^*) \\ x_4^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta_2^* \end{cases}$$

où

$$\theta_1^* = \phi_1^* + \phi_2^*, \quad \theta_2^* = \phi_1^* - \phi_2^*.$$

Pour chercher toutes les surfaces différentes dans ce système, il suffit de choisir l'intervalle de ω , de telle sorte que $-\frac{\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{\pi}{4}$. La rotation, correspondant à $\omega = 0$, nous donne évidemment la surface initiale. Les courbes d'intersection entre la c -surface initiale et une c -surface

quelconque de ce système, sont des courbes sur la première, données par

$$\begin{cases} \sin \theta_2^* = \tan \omega \sin \theta_1^* \\ \sin \theta_1^* = -\tan \omega \sin \theta_2^* \end{cases}$$

Si l'on développe la c -surface initiale sur le plan euclidien et si l'on y décrit les courbes obtenues plus haut, elles sont des courbes I, II de la figure suivante, où I indique

$$\sin \theta_2 = \tan \omega \sin \theta_1, \quad \omega > 0$$

et II

$$\sin \theta_1 = -\tan \omega \sin \theta_2.$$

Si en particulier ω est $= \pm \frac{\pi}{4}$, les courbes deviennent 4 droites engendrantes, telles que $\theta_1 \pm \theta_2 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$.

Fig. 1.

Fig. 2.

Ainsi on a :

Les courbes d'intersection entre une c -surface centrale et sa transformée par rapport à un élément quelconque d'un sousgroupe $\mathfrak{d} + T^{-1}\mathfrak{d}T$ de Γ , sont données par

$$\sin \theta_2 = \begin{cases} \tan \omega \sin \theta_1 \\ -\cot \omega \sin \theta_1 \end{cases}$$

dans un système de coordonnées convenablement choisies.

D'autre part, la transformée par rapport à $S_r(a, b, c, d)$ d'une c -surface centrale (x_*) est

$$(x_*) = S_r(a, b, c, d) (x^*)$$

où $(x^*) = S_l(\cos \phi_1^*, \sin \phi_1^*, 0, 0) \cdot S_r(\cos \phi_2^*, \sin \phi_2^*, 0, 0) (x)$

et $(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Alors sur la surface (x^*) les courbes d'intersection entre ces deux c -surfaces se donnent par

$$\begin{cases} \theta_1 - \theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{-ad + bc}{ac + bd} \right) \\ \theta_1 - \theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{-ad + bc}{ac + bd} \right) + \pi \end{cases}$$

Si $ac + bd = 0$, on aura

$$\theta_1 - \theta_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Si l'on prend un point P_1 tel que

$$\tan^{-1} \left(\frac{-ad + bc}{ac + bd} \right) = \sqrt{2} AP_1$$

sur le domaine développé $ABCD$, la courbe

$$\theta_1 - \theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{-ad + bc}{ac + bd} \right)$$

devient la courbe $P_1 Q_1 Q_1' P_1'$ et la courbe

$$\theta_1 - \theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{-ad + bc}{ac + bd} \right) + \pi$$

la courbe $P_2 Q_2 Q_2' P_2'$, où $\sqrt{2} P_1 P_2 = \pi$.

Ainsi deux courbes d'intersection s'écartent de $\frac{\pi}{2}$ l'une de l'autre et elles sont deux engendrantes sinistrorsement parallèles. Et de plus la première c -surface, on la considère comme transformée par rapport à un élément de Γ_r . On voit alors que deux transformées d'une c -surface centrale donnée d'avance, par rapport à 2 éléments quelconques de $\Gamma_r(\Gamma_l)$ se coupent suivant deux droites engendrantes sinistrorsement (dextrorsement) parallèles, entre lesquelles il se trouve la distance $\frac{\pi}{2}$.

La c -surface centrale se partagera aussi en deux domaines congruents I, II par les courbes d'intersection.

§ 3. Projection stéréographique.

On projète deux sphères K_l, K_r stéréographiquement sur les plans $E_l(l_1^*, l_2^*), E_r(r_1^*, r_2^*)$, où l'on suppose que le centre de projection soit

Fig. 3.

$(0, 0, 1)$ de K_i ainsi que de K_r et avec lesquels on fait les plans $l_2=0, r_3=0$ coïncider. Alors on obtient la deuxième représentation de l'espace elliptique sur deux plans euclidiens E_i, E_r , de telle manière que :

<i>l'espace elliptique</i>	E_i, E_r
<i>droite</i>	<i>paire de points de E_i et de E_r.</i>
<i>l'ensemble de toutes les droites parallèles</i>	<i>l'ensemble de toutes les paires d'un point de $E_i(E_r)$ et d'un point de $E_r(E_i)$.</i>
<i>c-surface</i>	<i>une paire d'un point de $E_i(E_r)$ et d'un cercle de $E_r(E_i)$.</i>

Et puis un ensemble de c -surfaces avec les axes communs, se représente par un point de $E_i(E_r)$ et par un faisceau de cercles de $E_r(E_i)$, entre lesquels on trouve deux points, qui sont les représentations des axes communs et l'un desquels est l'inversion elliptique de l'autre par rapport au cercle $r_1^{*2} + r_2^{*2} = 1$ ($l_1^{*2} + l_2^{*2} = 1$). Quant aux c -surfaces centrales, on a :

<i>c-surface centrale</i>	<i>une paire d'un point de $E_i(E_r)$ et d'un cercle de $E_r(E_i)$, avec la puissance -1 par rapport à $r_1^{*2} + r_2^{*2} = 1$, ($l_1^{*2} + l_2^{*2} = 1$).</i>

On nomme dorénavant un cercle, avec la puissance -1 par rapport à $r_1^{*2} + r_2^{*2} = 1$ ou à $l_1^{*2} + l_2^{*2} = 1$ *cercle central*.

<i>mouvement</i>	<i>une paire d'inversions elliptiques indépendantes par rapport à $r_1^{*2} + r_2^{*2} = 1$ et à $l_1^{*2} + l_2^{*2} = 1$.</i>

§ 4. Groupes fondamentaux.

On désigne des groupes fondamentaux par $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ étant un groupe fondamental, il est donc un sous-groupe discontinu de Γ , dont tout élément $G_i + G_r$ n'a aucun point invariant dans l'espace, sauf l'identité. (G_i est un élément de Γ_i et de même G_r est un élément de Γ_r) Il en suit immédiatement que $\mathfrak{G}$ est d'ordre fini, parce que l'espace lui-même est fini.

Si parmi toutes les matrices $G_i(G_r)$ apparaissant dans un groupe fondamental $\mathfrak{G}$, on distingue des éléments réellement distincts, ils formeront un groupe polyédrique. Tels deux groupes polyédriques, par rapport au même groupe $\mathfrak{G}$, on les représente par $\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_r$ respectivement. $\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_r$ sont nécessairement isomorphes l'un de l'autre. Puisque tout groupe polyédrique est tout à fait connu ; on pourra trouver tout groupe fondamental, si l'on voit de quelle manière l'un de $\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_r$ soit isomorphe de

l'autre. D'ailleurs, pour qu'un élément $G = G_i + G_r$ n'ait aucun point invariant, G_i ne peut pas équivaler à G_r , ce qui détermine précisément l'isomorphisme entre $\mathbb{G}_i$ et $\mathbb{G}_r$.

Ainsi on aura trois cas suivants ;

Le premier cas est celui où $\mathbb{G}_i, \mathbb{G}_r$ sont holoédriquement isomorphes et où $\mathbb{G}_i, \mathbb{G}_r$ sont tous cycliques.

Le deuxième cas est celui où à l'identité de l'un de $\mathbb{G}_i, \mathbb{G}_r$ correspond un sous-groupe propre, normal dans l'autre et où tous deux sont cycliques ou l'un est cyclique et l'autre diédrique.

Dans le dernier cas, l'un de $\mathbb{G}_i, \mathbb{G}_r$ est cyclique et l'autre l'un quelconque de tous les groupes polyédriques et à chaque élément de l'un correspond tout élément de l'autre.

En considérant que $\mathbb{G}_r$ est successivement cyclique 1°, diédrique 2°, tétraédrique 3°, octaédrique 4° et icosaédrique 5°, on vérifiera cette proposition.

1°. $\mathbb{G}_r$ est un groupe cyclique, engendré par $A_r, A_r^m = E$ et il suffit alors de considérer le cas, où $\mathbb{G}_i$ est aussi cyclique. On désigne par $\mathcal{N}_r$ le sous-groupe normal, dont tous éléments correspondent à l'identité de $\mathbb{G}_i$. Si $\mathcal{N}_r = \{A_r^{m'}\}$, $\mathbb{G}_i$ est alors $\{A_i\}$, où $A_i^{m'} = E$. Ainsi $\mathbb{G}$ sera engendré par $A_i + A_m$ et d'ordre m . Certainement un tel groupe peut exister, ce qui est vérifié, en posant $m=15, m'=5$. Si $\mathcal{N}_r$ est $\mathbb{G}_r$, on a le cas, tous les éléments de $\mathbb{G}_r$ correspondent à chaque élément de $\mathbb{G}_i$. Et alors l'ordre de $\mathbb{G}_r$ doit être relativement premier à celui de l'autre. Si $\mathcal{N}_r$ ne contient que l'identité, $\mathbb{G}_i$ et $\mathbb{G}_r$ sont holoédriquement isomorphes. Un tel cas peut exister aussi. Pour le vérifier, il suffit de considérer $m=5$. Alors

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5}, & -\sin \frac{2\pi}{5}, & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{5}, & \cos \frac{2\pi}{5}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5}, & -\sin \frac{4\pi}{5}, & 0 \\ \sin \frac{4\pi}{5}, & \cos \frac{4\pi}{5}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

2°. Soit $\mathbb{G}_r$ diédrique et d'ordre $2m$. Alors on peut considérer que $\mathbb{G}_r$ est engendré par $A_r^m = E, B_r^2 = E$, où $B_r^{-1}A_rB_r = A_r^{-1}$ et

$$A_r = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{m}, & -\sin \frac{2\pi}{m}, & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{m}, & \cos \frac{2\pi}{m}, & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sans perdre aucune généralité.

Si $\mathfrak{N}_r$ n'est pas $\mathfrak{G}_r$ lui-même, le groupe facteur $\mathfrak{G}_r/\mathfrak{N}_r$ est holoédriquement isomorphe de $\mathfrak{G}_i$. $\mathfrak{N}_r$ étant un sous-groupe propre de $\mathfrak{G}_r$, il est diédrique ou cyclique. Si $\mathfrak{N}_r$ est diédrique, $\mathfrak{G}_i$ est donc cyclique. Un tel cas peut réellement exister. En effet, lorsqu'en posant $m=15$, $m'=5$, $\mathfrak{N}_r = \{A_r^5\} + B_r\{A_r^5\}$, $\mathfrak{G}_i = \{A_i\}$, où

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3}, & -\sin \frac{2\pi}{3}, & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{3}, & \cos \frac{2\pi}{3}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{G}_i + \mathfrak{G}_r$ satisfait aux conditions de groupe fondamental.

Si $\mathfrak{N}_r$ est cyclique, $\mathfrak{G}_i$ est diédrique, dont un élément d'ordre 2 correspond à l'élément $B_r\mathfrak{N}_r$ de $\mathfrak{G}_r/\mathfrak{N}_r$. Alors l'élément $B_i + B_r$ de $\mathfrak{G}$ aura un point invariant dans l'espace, parce que B_i, B_r sont équivalents. Donc il ne faut pas considérer tel cas.

Si $\mathfrak{N}_r$ ne contient que l'identité de $\mathfrak{G}_r$, $\mathfrak{G}_i$ et $\mathfrak{G}_r$ sont tous diédriques et holoédriquement isomorphes. D'après la même raison, appliquée maintenant, tel cas, il ne faut pas le considérer.

Si $\mathfrak{N}_r$ est $\mathfrak{G}_r$ lui-même, $\mathfrak{G}_i$ doit être un groupe cyclique d'ordre relativement premier à celui de $\mathfrak{G}_r$.

3°. Soit $\mathfrak{G}_r$ tétraédrique. On désigne le groupe tétraédrique par $\mathfrak{G}_{12}$. Soit $\mathfrak{G}_r$ engendré par H_r et par B_1 , où

$$H_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{N}_r$ n'est pas l'identité d'après la même raison que 2°. Il en suit que si $\mathfrak{N}_r$ n'est pas $\mathfrak{G}_r$ lui-même, il est identique au seul sous-groupe normal de $\mathfrak{G}_{12}$, c'est-à-dire à celui qui se forme par $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ & -1 & \end{pmatrix}$ et par $\begin{pmatrix} -1 & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ et qui se désigne par $\mathfrak{G}_4$. Alors $\mathfrak{G}_r/\mathfrak{N}_r$ et en même temps $\mathfrak{G}_i$ sont un groupe cyclique d'ordre 3. On peut considérer alors que $\mathfrak{G}_i$ est $\{A_i\}$, où

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3}, & -\sin \frac{2\pi}{3}, & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{3}, & \cos \frac{2\pi}{3}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant $H_r \mathfrak{N}_r$ est celui qui correspond à A_i . or H_r et A_r sont équivalents. Ainsi tel groupe $\mathfrak{G}_i + \mathfrak{G}_r$, on ne peut pas le considérer comme groupe fondamental. Donc un seul cas, où $\mathfrak{N}_r$ est $\mathfrak{G}_r$ lui-même, se laisse à étudier. En effet, si et seulement si $\mathfrak{G}_i$ est cyclique et d'ordre relativement premier à celui de $\mathfrak{G}_r$, on aura un groupe fondamental.

4°. Soit $\mathfrak{G}_r$ un groupe octaédrique, qu'on désigne par $\mathfrak{G}_{24}$. Supposons que $\mathfrak{G}_{24}$ soit engendré par N_r , par H_r et par B_r , où

$$N_r = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad H_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque, d'après la même raison que 2°, $\mathfrak{N}_r$ ne peut pas être l'identité, il doit être l'un de deux seuls sous-groupes invariants de $\mathfrak{G}_r$, c'est-à-dire l'un de $\mathfrak{G}_4$ et de $\mathfrak{G}_{12}$. Si $\mathfrak{N}_r = \mathfrak{G}_4, \mathfrak{G}_i$, en étant holoédriquement isomorphe de $\mathfrak{G}_{24}/\mathfrak{G}_4$, est un groupe diédrique d'ordre 6, tel qu'il s'engendre par A_i et par B_i ;

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3}, & -\sin \frac{2\pi}{3}, & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{3}, & \cos \frac{2\pi}{3}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $H_r \mathfrak{N}_r$ doit alors correspondre à A_i , H_r correspond à A_i ; or H_r est équivalent à A_i , ce qui entraîne que l'on ne peut pas prendre tel groupe $\mathfrak{G}_i + \mathfrak{G}_r$ pour groupe fondamental.

Si $\mathfrak{N}_r$ est $\mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_i$ ainsi que $\mathfrak{G}_{24}/\mathfrak{G}_{12}$ deviennent d'ordre 2. On doit exclure aussi ce cas. En somme, on voit de nouveau que $\mathfrak{G}_i$ doit être cyclique et d'ordre relativement premier à 24, ce qui est nécessaire et suffisant pour que $\mathfrak{G}_i + \mathfrak{G}_r$ soit un groupe fondamental.

5°. Soit $\mathfrak{G}_r$ un groupe icosaédrique, qu'on désigne par $\mathfrak{G}_{60}$ et qui s'engendre par S_r et par T_r , où

$$S_r = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5}, & -\sin \frac{2\pi}{5}, & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{5}, & \cos \frac{2\pi}{5}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad T_r = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}}, & 0, & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0, & -1, & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}}, & 0, & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Maintenant il est facile de voir que $\mathfrak{N}_r$ est $\mathfrak{G}_{60}$ lui-même, en considérant que $\mathfrak{N}_r$ n'est pas l'identité et que $\mathfrak{G}_{60}$ n'a aucun sous-groupe propre,

normal. Ainsi un groupe cyclique d'ordre relativement premier à 60 est à considérer comme $\mathbb{G}_i$, avec lequel $\mathbb{G}_r$ pourra certainement un groupe fondamental.

§ 5. Domaines fondamentaux, déterminés par $\mathbb{G}$.

Pour étudier quelques propriétés géométriques des domaines fondamentaux, dont les connexions ne sont d'autres choses que celles de formes spatiales, par rapport à $\mathbb{G}$, on introduit celui qu'on va nommer *d-domaine* dans l'espace elliptique.

Si, passant par tout point d'un domaine dans l'espace elliptique, il y a toujours une droite parallèle à une certaine droite, donnée d'avance et qui se contient entièrement dans ce domaine, on l'appelle *d-domaine*.

L'espace elliptique lui-même ou une *c-surface* est *d-domaine*. Des droites parallèles, qui constituent un *d-domaine*, on les nomme engendrantes de ce *d-domaine*. Suivant que les engendrantes d'un *d-domaine* sont parallèles sinistrorsement ou dextrorsement, on distingue deux espèces de *d-domaine*, l'un se nommant *d-domaine sinistrorse* et l'autre *d-domaine dextrorse*. On peut trouver aussi un *d-domaine*, tel qu'il soit à la fois sinistrorse et dextrorse, comme l'espace elliptique ou une *c-surface*.

D'après § 3 un *d-domaine* dextrorse (sinistrorse) se représentera par une paire d'un domaine de $E_i(E_r)$ et d'un point de $E_r(E_i)$. L'espace elliptique est représenté par un point de $E_r(E_i)$ et par tout plan $E_i(E_r)$ et de même une *c-surface* par une paire d'un point de $E_r(E_i)$ et d'un cercle de $E_i(E_r)$. Si, par exemple, un *d-domaine* est sinistrorse, il se caractérise par sa représentation de E_r , d'où l'on dira quelquefois la représentation de E_r simplement *d-domaine sinistrorse*. Ainsi un *d-domaine* sinistrorse et à la fois dextrorse aura deux représentations caractéristiques, l'une sur E_r et l'autre sur E_i . Et de plus, il est facile de voir qu'un *d-domaine*, à la fois sinistrorse et dextrorse, s'engendra par *c-surfaces*.

Maintenant on va étudier des domaines fondamentaux par rapport à $\mathbb{G}$. D'abord, prenons les cas, où $\mathbb{G} = \mathbb{G} + \mathbb{G}_r$, $\mathbb{G}$ étant un groupe, ne contenant que l'identité. Alors on peut indiquer que les domaines fondamentaux sont *d-domaines* introduits plus haut. Suivant que $\mathbb{G}_r$ est cyclique, diédrique, tétraédrique, octaédrique ou icosaédrique, il détermine des domaines discontinus sur E_r , en nombre de l'ordre de $\mathbb{G}_r$.

Alors si l'on considère des d -domaines sinistrorsés, que représentent les paires d'un point de E_i et d'un quelconque des domaines de E_r par rapport à $\mathbb{G}_r$ et si l'on rappelle l'espace être un d -domaine, il est évident que tels d -domaines sont un système des domaines fondamentaux par rapport à $\mathbb{G} = \mathbb{G}_i + \mathbb{G}_r$. Ces d -domaines fondamentaux s'appelleront *cycliques*, *diédriques*, *tétraédriques*, *octaédriques*, ou *icosaédriques*, suivant que $\mathbb{G}_r$ l'est ainsi. Comme on verra dans § 6, les domaines *polyédriques* se bornent par des c -surfaces centrales, se coupant le long des engendrantés parallèles et ils sont sinistrorsés. Si l'on considère $\mathbb{G} = \mathbb{G}_i + \mathbb{G}$, on obtiendra des domaines polyédriques, dextrorsés.

On va prendre en suite les cas, où $\mathbb{G}_i$ est cyclique et à chaque élément de $\mathbb{G}_i$ correspond $\mathbb{G}_r$ lui-même. D'abord on détermine des d -domaines par rapport à $\mathbb{G} + \mathbb{G}_r$, dont la représentation de E_i on pose en l'origine de E_i . Soit $\mathbb{G}_i$ engendré par un élément de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi, & -\sin \varphi, & 0 \\ \sin \varphi, & \cos \varphi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

alors chaque engendrante des d -domaines par rapport à $\mathbb{G} + \mathbb{G}_r$ se laisse invariante par $\mathbb{G}_i$, c'est-à-dire les points homologues par rapport à $\mathbb{G}_i + \mathbb{G}$ d'un point quelconque se trouvent sur une même engendrante, ce qui entraîne que par $\mathbb{G}_i$ chacun des d -domaines polyédriques se partage de nouveau en domaines partiels, en nombre de l'ordre de $\mathbb{G}_i$. Ce sont des domaines fondamentaux par rapport à $\mathbb{G}_i + \mathbb{G}_r$.

Enfin, on prend pour $\mathbb{G}$ celui dans les premiers cas de § 4 et puis les deuxièmes cas. Dans les premiers cas, supposons que $\mathbb{G}_i, \mathbb{G}_r$ soient engendrés par A_i et par A_r , tels que $A_i^m = E$, $A_r^n = E$. Si, en considérant un d -domaine par rapport à $\mathbb{G} + \{A_r\}$, on le transporte par $\{A_i\} + \{A_r\}$, on obtiendra m d -domaines transportés. Ce sont des domaines fondamentaux de $\mathbb{G}_i + \mathbb{G}_r$. Et si la représentation sur E_i , des d -domaines polyédriques par rapport à $\mathbb{G} + \mathbb{G}_r$ est l'origine de E_i , deux transformés d'un de ces d -domaines par rapport à $E + A_r$ et à $A_i + A_r$ sont identiques comme le tout.

Ensuite quant aux deuxièmes cas, prenez d'abord un des d -domaines par rapport à $\mathbb{R}_r$, l'un desquels on partage, par rapport à $\mathbb{G}_i$, en domaines partiels en nombre de l'ordre de $\mathbb{G}_i$. En prenant un de tels domaines partiels et le transformant par tous les éléments de $\mathbb{G}_i + \mathbb{G}_r$, on considère un système des domaines ainsi transformés en nombre de l'ordre de

$\mathfrak{G}_l + \mathfrak{G}_r$. Ce système n'est l'autre chose que celui des domaines fondamentaux par rapport à $\mathfrak{G}_l + \mathfrak{G}_r$, parce que ces domaines couvrent tout l'espace sans qu'ils complètent les uns sur les autres et qu'ils se transforment transitivement entre eux par rapport à $\mathfrak{G}_l + \mathfrak{G}_r$.

§ 6. Quelques propriétés géométriques des d -domaines fondamentaux.

Maintenant on va montrer qu'une certaine c -surface, contenue dans un d -domaine polyédrique ne peut pas exister sans aucune singularité, tandis que toute c -surface dans l'espace elliptique n'a aucune singularité. Soit d'abord $\mathfrak{G}_l = \mathfrak{G}$. Une transformée d'une certaine figure F , par rapport à un élément $G_l + G_r$ de $\mathfrak{G}$, se désigne par $F(G_l + G_r)$. Alors la figure F elle-même se représentera par $F(E)$.

a) d -domaine cyclique. Soit $\mathfrak{G}_r$ engendré par

$$A_r = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3}, & -\sin \frac{2\pi}{3}, & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{3}, & \cos \frac{2\pi}{3}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

pour simplicité. Alors les d -domaines cycliques, déterminés par $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_r$, se représentera par la figure 4. On considère un cercle central K , n'ayant pas le centre en l'origine de E_r et ne passant pas par l'origine de E_r . Trois cercles centraux transformés de K ; $K(E)$, $K(A_r)$, $K(A_r^2)$, se laissent invariants par rapport à $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_r$. Si l'on désigne des arcs dans un des d -domaines cycliques, à savoir, dans le d -domaine $\Delta(AOB)$ par $K^*(E)$, par $K^*(A_r)$ et par $K^*(A_r^2)$ successivement, on voit que $K^*(A)$ est l'arc homologue de celui de $K(E)$, contenu dans $\Delta(A_r^2)$, ainsi que $K^*(A_r^2)$ est homologue à celui de $K(E)$, contenu dans $\Delta(A_r)$. Ainsi on

Fig. 4.

peut dire que l'ensemble de $K^*(E)$, de $K^*(A_r)$ et de $K^*(A_r^2)$ n'est l'autre chose que $K(E)$ lui-même par rapport à $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_r$. Or puisque la frontière OA du domaine $\Delta(AOB)$ est identique à OB par rapport à A_r , c'est-à-dire que quant à $K^*(E)$, $K^*(A_r)$, $K^*(A_r^2)$ les points 1, 3 de $K^*(E)$ et 5* de $K(A_r)$ sont identiques à 1* de $K(A_r)$, 3', 5' de $K^*(A_r^2)$, cet ensemble ne représente qu'une seule courbe unicursale. Cette courbe, comme on le voit, a deux points doubles (α) , (β) , d'où la c -surface, représentée par cette courbe et par l'origine de E_i , qui est la représentation sur E_i des domaines en question, a deux engendrantes doubles, ce qui est la différence entre c -surfaces centrales dans l'espace elliptique et celles dans le domaine cyclique. Le nombre 2 d'engendrantes doubles se lie avec l'ordre du groupe et si l'ordre est m , on peut trouver une c -surface centrale, avec $m-1$ engendrantes doubles. Maintenant le nombre des points doubles d'une courbe homologue est à remarquer. Prenons le cas, où $\mathfrak{G} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}_r$, $\mathfrak{G}_r$ étant un groupe polyédrique quelconque. Soit n le nombre des points d'intersection entre un cercle central et ses transformés par rapport à $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_r$. Evidemment n ne peut pas surpasser $g(g-1)$, où g est l'ordre de $\mathfrak{G}_r$. Et de plus, l'ensemble des transformés avec le cercle initial se demeure invariant par rapport à $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_r$ et par suite dans chaque domaine, défini par $\mathfrak{G}_r$, $\frac{n}{g}$ points parmi des points d'intersection seront contenus. Sans doute $\frac{n}{g} \leq g-1$. Donc s'il existe une courbe homologue à un cercle central, par rapport à $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_r$ et qui a $g-1$ points doubles, c'est celle qui a points doubles en nombre maximum. Comme on saura dans la suite, on pourra trouver réellement telles courbes.

Revenons de nouveau au cas cyclique. En déformant la courbe en question, on a la figure 5. Si l'on prend un cercle central quelconque, mais ne passant pas par l'origine et aussi n'ayant pas le centre en l'origine, on arrivera au même résultat au point de vue de l'Analysis situs, c'est-à-dire la forme de la courbe en Fig. 5, on peut dire, est celle qui caractérise des c -surfaces centrales d'un d -domaine cyclique.

b) *d-domaine diédrique*. Pour simplicité, soit l'ordre de $\mathfrak{G}_r$ égal à 6. Si l'on pose $m=3$ dans § 4, 2°, les 6 domaines diédriques se donnent par la figure 6. En prenant un cercle central K , dont le centre n'existe pas en l'origine de E_r et qui

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

ne passe par aucun sommet des triangles sphériques des domaines diédriques, on y répète la considération pareille à a). Alors on aura une courbe homologue à K , qu'en déformant topologiquement, on donne dans la figure 7. La forme de cette courbe, avec 5 points doubles, caractérisera des c -surfaces centrales dans d -domaines diédriques.

c) *d-domaine tétraédrique*. Le groupe tétraédrique, donné en § 4, 3° nous donne 12 domaines discontinus de E_r , tels qu'ils se représentent par la figure 8. Si l'on applique de nouveau la considération de a) à un cercle central assez voisin d'une des frontières des domaines tétraédriques, ce cercle nous donne une courbe unicursale, avec 11 points doubles et qui caractérise des c -surfaces centrales des d -domaines tétraédriques. En déformant topologiquement cette courbe, on a la courbe de la figure 9.

d) *d-domaine octaédrique*. Soit $\mathbb{G}_r$ engendré par N_r et par H_r , comme on a expliqué dans § 4, 4°. Alors les 24 domaines discontinus de E_r , par rapport à $\mathbb{G}_r$ se donnent par la figure 10. Pour savoir la connexion d'une c -surface centrale caractéristique dans un d -domaine octaédrique, il suffit de considérer un cercle central assez voisin du cercle central, passant par les points F, B, E de la figure 10. Alors de ce cercle, on peut dériver une courbe unicursale, avec 23 points doubles, qu'on indique dans la figure 11, en tenant compte des significations

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

géométriques de $\mathfrak{G}_r$ et en la déformant topologiquement. Ainsi il y a, dans le d -domaine octaédrique, des c -surfaces centrales, ayant 23 engendrantes doubles et dont la représentation est vu dans la figure 11.

e) d -domaine icosaédrique. Dans ce cas, on indique les 60 domaines discontinus du groupe icosaédrique $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{G}_{60}$ la figure 12. On veut voir quelle connexion pourra avoir une c -surface centrale caractéristique dans ce d -domaine. Pour cela, K étant un cercle central passant par P, Q et R de la figure 12, on prend ensuite un cercle central assez voisin de K et passant par un point sur K assez voisin de R et y applique la même considération, répétée jusqu'ici. Alors on obtient une courbe, représentée dans la figure 13. Elle a points doubles en nombre maximum, 59, par rapport à $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_{60}$ et elle est la représentation d'une des c -surfaces centrales qui peuvent exister dans ce d -domaine.

Jusqu'ici, on a vu que dans chaque d -domaine polyédrique il y a c -surface centrale, avec des engendrantes doubles en nombre maximum, c'est-à-dire $g-1$, où g est l'ordre du groupe. Les cas, où $\mathfrak{G}_i$ est cyclique, je l'étudierai de nouveau plus tard.