気液界面上において圧力と表面張力の力学的釣り合い条件を完全に満足する 高精度数値解析手法の非構造格子系における定式化*

Formulation of High-Precision CFD Method on Non-Orthogonal Meshes with Rigorous Mechanical Balance at Gas-Liquid Interface

伊藤 啓**,***
ITO Kei

功刀 資彰**
KUNUGI Tomoaki

大島 宏之***
OHSHIMA Hiroyuki

Abstract Numerical simulations of gas-liquid two-phase flows are frequently employed by a lot of researchers to evaluate complicated two-phase flow phenomena. In fact, we also have studied the applicability of the numerical simulation to GE (gas entrainment) phenomena on gas-liquid interfaces. In our study, we are developing a high-accuracy gas-liquid two-phase flow simulation method to achieve direct simulations for the GE phenomena. Since the GE phenomena is highly affected by local flow path geometries near occurrence regions of the GE phenomena, non-orthogonal meshes are employed in our study to achieve accurate modeling of the flow path geometries. In addition, we are focusing on mechanical balance conditions at gas-liquid interfaces because it is well-known that unphysical behaviors can be induced easily by mechanical unbalances at gas-liquid interfaces. In this paper, appropriate formulations satisfying rigorous mechanical balances between surface tension and pressure are derived on non-orthogonal meshes. In the formulations, a surface tension potential is introduced based on the Laplace equation as a consistent form with a formulation of a pressure jump condition at gas-liquid interface. In addition, for numerical simulations of stratified flows, a gravitational potential is also introduced to formulate a discontinuity of a pressure gradient at gas-liquid interface. Finally, the new formulations are verified by calculating a stationary gas-bubble in liquid. As a result, the present method succeeds in eliminating perfectly unphysical phenomena (spurious velocities) induced by inappropriate formulations. The present method also gives a physically appropriate simulation result near stratified gas-liquid interface where conventional methods (without the appropriate formulations) fail to eliminate occurrences of unphysical phenomena.

Keywords: CFD, Gas-liquid Two-phase Flow, Non-orthogonal Mesh, Gas Entrainment, Volume-of-Fluid

1. 緒言

近年、気液二相流の数値解析は様々な物理現象の評価に利用されており、原子炉機器の設計においても BWR 炉心内の流動様式や伝熱特性の評価等に用いられている。高速炉の設計においては、

炉心上部プレナム自由液面からのガス巻き込み現象の抑制が検討課題となっている[1]ため、現在、数値解析手法を利用したガス巻き込み評価手法の研究を実施している[2]。本研究中で、京都大学と日本原子力研究開発機構は、高速炉ガス巻き込み現

* 2008.8.30 受付

** 京都大学大学院工学研究科原子核工学専攻 〒606-8501 京都市左京区古田本町
TEL: (029)267-4141 FAX: (029)266-3675 E-mail: ito.kei@jaca.go.jp

*** 日本原子力研究開発機構次世代原子力システム研究開発部門

象の直接数値解析を目的とし、ガス巻込み現象挙動に大きな影響を与える流路形状の再現性に優れる非構造格子系において、高精度気液二相流解析手法の開発に関する共同研究を実施している。これまでに、非構造格子系における流れ場解析手法及び高精度 VOF (Volume-of-Fluid) 法に基づく流体率輸送手法の開発・検証を完了した[3]。

本研究では、動的な気液界面現象を解析するにあたり、気液界面における力学的釣合い条件を完全に満足する定式化について検討を行い、任意形状の非構造格子系において力学的釣合い条件を満足する手法を導出する。その際、表面張力と圧力、重力と圧力の釣合いについて考察し、表面張力及び重力に関して適切なポテンシャルを導入することで、力学的釣合い条件を満足する定式化を導く。また、構築した手法の検証として、静止気泡及び成層界面の解析を行った結果を示す。

2. 非構造格子系における定式化の概要

2.1 非構造格子系における圧力勾配定式化

一般的に非構造格子系の数値解析においてはコロケート型変数配置が用いられており、速度や圧力、流体率等の物理量は全て同一点（本解析手法では格子セル中心）で定義されている（Fig. 1 参照）。ただし、 $\vec{d}_{12}$ は格子セル 1 と 2 の中心点（物理量定義点）を結ぶベクトルであり、また、 $\vec{n}_f$ は格子セル境界における単位法線ベクトルである。

Fig. 1 Collocated Variable Arrangement in Present Simulation Scheme.

この際、各物理量の保存性を保つために各解析格子セルをコントロールボリュームとする有限体積法に基づいた差分を行うと、格子セル境界での流速を求めるために格子セル境界上での圧力勾配（Fig. 1 中の $(\nabla p)_f$ ）を定める必要が生じる。単純に考えると、格子セル境界の両側に存在する

格子セルにおける圧力勾配（Fig. 1 中の $(\nabla p)_1$ 及び $(\nabla p)_2$ ）を加重平均することで格子セル境界における圧力勾配を評価することができる。しかし、このように求めた圧力勾配は速度と圧力の Decoupling を引起し、Checkerboard 型のエラーを招くことが知られているため、そのまま用いることは適切でない。そこで、構造格子系において良く知られた Rhie-Chow の修正法[4]と類似の手法を非構造格子系に導入することで Checkerboard 型のエラーを防止する。このような定式化のいくつかは Kim らの論文[5]において紹介されているが、格子セル境界両側の格子セルにおける圧力のみを用いる定式化では歪んだ格子において正しい圧力勾配を計算することができないことが分かっており、そのような場合、正しい圧力勾配を求めるためには、Kim ら[5]による式や Muzafferija らによる Deferred-Correction 法[6]と呼ばれる以下の式(1)を用いて計算を行う必要がある。

$$(\nabla p)_f = \nabla \phi + \frac{\vec{d}_{12}}{|\vec{d}_{12}|^2} (p_2 - p_1 - \vec{d}_{12} \cdot \nabla \phi) \quad (1)$$

$$\nabla \phi = c_1 (\nabla p)_1 + c_2 (\nabla p)_2$$

ただし、 c_1 及び c_2 は格子セル中心で定義された値を格子セル境界に補間する際の重み付け係数であり、格子セル中心と格子セル境界の位置関係によって定める。即ち、以下の式によって定義する。

$$c_1 = \frac{\vec{d}_{1f} \cdot \vec{d}_{12}}{|\vec{d}_{12}|^2}, \quad c_2 = -\frac{\vec{d}_{2f} \cdot \vec{d}_{12}}{|\vec{d}_{12}|^2} \quad (2)$$

ただし、 $\vec{d}_{1f}$ 及び $\vec{d}_{2f}$ は、格子セル 1 及び 2 の中心点と格子セル境界を結ぶベクトルである。本研究では、Rhie-Chow の修正法の非構造格子系への自然な拡張と考えられる式(1)を採用することとした。本式では、右辺括弧内において $p_2 - p_1$ で表される格子セル 1 と 2 における圧力差を第 3 項で修正することにより、 $\vec{d}_{12}$ 方向における圧力勾配は両セルにおける圧力値から求め、それと直交する向きについては両セルにおける圧力勾配の平均値から求めるように定式化されている。

2.2 非構造格子系における定式化の問題点

非構造格子系における定式化の問題点を明確にするため、まず、構造格子系において静止液体中の球形気泡の解析を行うことを考える。正しい物理現象としては、気液界面上において圧力と表

面張力の力学的釣合いが達成され、気泡は静止し続ける。即ち、構造格子系においては、

$$(p_2 - p_1) / \left(\left| \vec{d}_{12} \right| \rho_f \right) = - \left(c_1 \vec{F}_{s1} \cdot \vec{n}_f / \rho_1 + c_2 \vec{F}_{s2} \cdot \vec{n}_f / \rho_2 \right) \quad (3)$$

が全ての格子セル境界上で満足される必要がある。しかし、従来の定式化ではこの式を全ての格子セル境界において満足するのは不可能であるため、BFA (Balanced-Force Algorithm) と呼ばれる手法[7]が開発され、BFA では式(3)の右辺のように格子セル境界両側の格子セルにおける表面張力を加重平均せず、表面張力を最初から格子セル境界上で定義することによって圧力と表面張力の釣合いを満足する以下の式を導いている。

$$(p_2 - p_1) / \left(\left| \vec{d}_{12} \right| \rho_f \right) = - \vec{F}_{sf} \cdot \vec{n}_f / \rho_f \quad (4)$$

ここで、格子セル境界上での表面張力の格子セル境界に垂直な成分は、以下の通り求める。

$$\vec{F}_{sf} \cdot \vec{n}_f = \sigma \kappa_f (f_2 - f_1) / \left| \vec{d}_{12} \right| \quad (5)$$

式(5)を式(4)に代入すると、

$$(p_2 - p_1) / \left| \vec{d}_{12} \right| = - \sigma \kappa_f (f_2 - f_1) / \left| \vec{d}_{12} \right| \quad (4')$$

となり、球形気泡に対する界面曲率が正しく計算されていれば、全ての格子セル境界において圧力と表面張力の釣合いを満たすことが可能となる。

BFA の非構造格子系への拡張はすでに実施されており[8,9]、非構造格子系において力学的釣合い条件を満足する定式化が導かれているが、これらの定式化は非構造格子系においても格子セル境界での圧力勾配を格子セル境界の両側のセルの圧力のみから求めているため、2.1 節で述べたように解析精度的に問題がある。本研究では、非構造格子系における高精度数値解析手法の構築を目指し、Deferred-Correction 法による圧力勾配計算に基づいた定式化を導出する。即ち、静止水中の球形気泡の解析においては、

$$\left\{ \nabla \phi + \frac{\vec{d}_{12}}{\left| \vec{d}_{12} \right|^2} (p_2 - p_1 - \vec{d}_{12} \cdot \nabla \phi) \right\} / \rho_f = - \left(c_1 \vec{F}_{s1} / \rho_1 + c_2 \vec{F}_{s2} / \rho_2 \right) \quad (6)$$

が全ての格子セル境界において成立することが必要となる。しかし、この式の左辺 (格子セル境

界における圧力勾配) は格子セル境界で定義されるのに対し、右辺は格子セル中心で定義された表面張力の値を格子セル境界に補間しているため、両者の定義点の違いにより、式(6)を全ての格子セル境界において満足するのは一般的に不可能であり、また、式(6)は式(3)よりもかなり複雑な形状をしているため、構造格子系における定式化とは異なる定式化 (より複雑な定式化) によって式(6)を満足する手法 (非構造格子系における高精度 BFA) を構築する必要がある。

3. 非構造格子系における高精度 BFA の構築

3.1 基本的な考え方

非構造格子系において高精度 BFA を定式化するためには、式(6)の左辺の圧力勾配と釣合うような外力項を格子セル境界上で定義 (定式化) する必要がある。しかし、式(6)の左辺は、格子セル境界の両側に位置する格子セルにおける圧力の差及び圧力勾配を用いて記述されているため、圧力差のみを用いて記述されている式(3)の左辺と異なり、複雑な定式化が必要となることは明白である。本研究では、式(6)の左辺を圧力差に基づく部分と圧力勾配に基づく部分に分割し、圧力差と釣合う外力ポテンシャルと圧力勾配と釣合う外力をそれぞれ格子セル境界上で定義することによって非構造格子系における高精度 BFA を定式化する。即ち、圧力差に関しては、

$$\frac{\vec{d}_{12}}{\left| \vec{d}_{12} \right|^2} (p_2 - p_1) / \rho_f = \frac{\vec{d}_{12}}{\left| \vec{d}_{12} \right|^2} (\phi_2 - \phi_1) / \rho_f \quad (7)$$

によって外力ポテンシャルとの釣合いを達成し、また、圧力勾配に関しては、

$$\begin{aligned} & \left\{ \nabla \phi - \frac{\vec{d}_{12}}{\left| \vec{d}_{12} \right|^2} (\vec{d}_{12} \cdot \nabla \phi) \right\} / \rho_f \\ & = \left\{ \vec{F}_f - \frac{\vec{d}_{12}}{\left| \vec{d}_{12} \right|^2} (\vec{d}_{12} \cdot \vec{F}_f) \right\} / \rho_f \\ & \nabla \phi = c_1 (\nabla p)_1 + c_2 (\nabla p)_2 \\ & \vec{F}_f = c_1 \vec{F}_1 + c_2 \vec{F}_2 \end{aligned} \quad (8)$$

によって外力との釣合いを達成する。式(7)と式(8)が同時に満たされる場合、式(6)が満足されるため、圧力と外力の力学的釣合いが達成される。

即ち、式(8)によって圧力勾配と外力の釣合いが達成できるため、式(7)を満足する適切な外力ポテンシャルを導入することで、非構造格子系における高精度 BFA を構築することが可能となる。

3.2 外力ポテンシャルの導入

3.2.1 表面張力ポテンシャルの定義

気液界面において表面張力が作用する場合、気液界面を挟んで気相・液相間に圧力差（圧力ジャンプ）が生じる。界面領域において粘性応力を無視し、更に表面張力係数が気液界面に沿って変化しないとすると、気液界面での圧力ジャンプ（ p_j ）は Laplace の式によって、

$$p_j = p_g - p_l = \sigma \kappa \quad (9)$$

と記述できる。従って、気液界面が格子セル境界上に存在している場合、その格子セル境界の両側に存在する格子セルにおける表面張力ポテンシャル差は以下のように表される。

$$\varphi_{s2} - \varphi_{s1} = \sigma \kappa_f \quad (10)$$

式(10)は物理的に適切な定式化ではあるが、一般的に気液界面が格子セル境界上に存在するとは限らないため、気液界面と格子セル境界が交差している場合について定式化を行う。まず、格子セル境界両側の格子セルにおける Laplace の式は以下の通り記述される。

$$\begin{aligned} p_{j1} &= p_{g1} - p_{l1} = \sigma \kappa_1 \\ p_{j2} &= p_{g2} - p_{l2} = \sigma \kappa_2 \end{aligned} \quad (11)$$

次に、格子セルにおいて式(11)を満たすような気相・液相それぞれの圧力を次のように定義する（格子セル 2 においても同様）。

$$\begin{aligned} p_l &= (1 - f_l) p_{g1} + f_l p_{l1} \\ p_{g1} &= \frac{\rho_g}{\rho_g + \rho_l} \sigma \kappa_1 \\ p_{l1} &= -\frac{\rho_l}{\rho_g + \rho_l} \sigma \kappa_1 \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、第 1 式は気相と液相の分圧の和を表しており、また、第 2 及び第 3 式中の密度比の項は、気相・液相間の密度比が大きい場合に表面張力によって気相・液相において誘起される速度を同程度にする（気相領域において非常に大きな流速が発生するのを防止する）ために必要な係数である。式(12)より、格子セル間の圧力差は、

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= (1 - f_2) p_{g2} + f_2 p_{l2} - (1 - f_1) p_{g1} - f_1 p_{l1} \\ &= -\frac{\rho_g \sigma}{\rho_g + \rho_l} (\kappa_2 - \kappa_1) - \sigma (f_2 \kappa_2 - f_1 \kappa_1) \end{aligned} \quad (13)$$

となるため、格子セル間の外力ポテンシャル差は、

$$\varphi_{s2} - \varphi_{s1} = \frac{\rho_g \sigma}{\rho_g + \rho_l} (\kappa_2 - \kappa_1) - \sigma (f_2 \kappa_2 - f_1 \kappa_1) \quad (14)$$

と記述できる。これを式(7)に適用すると、

$$\frac{\vec{d}_{12}}{|\vec{d}_{12}|^2} (p_2 - p_1) / \rho_f = \frac{\vec{d}_{12}}{|\vec{d}_{12}|^2} \left\{ \frac{\rho_g \sigma}{\rho_g + \rho_l} (\kappa_2 - \kappa_1) - \sigma (f_2 \kappa_2 - f_1 \kappa_1) \right\} / \rho_f \quad (15)$$

という、圧力差と表面張力ポテンシャル差の釣合い式が導かれる。

式(15)を静止液体中の球形気泡の解析に適用する場合、界面曲率が正しく計算されていれば式(15)右辺の中括弧内第 1 項は 0 となり、全ての格子セル境界において圧力差と表面張力ポテンシャル差の釣合いを満たすことができる。

3.2.2 重力ポテンシャルの定義

重力が作用する場合、格子セル境界両側の格子セル中心間における重力ポテンシャル差は、以下の積分式によって理論的に計算できる。

$$\varphi_{G2} - \varphi_{G1} = \int_1^2 \rho_g \vec{g} \cdot d\vec{s} \quad (16)$$

気液界面が存在しない領域においては密度が一定となるため、例えば気相中では、

$$\varphi_{G2} - \varphi_{G1} = \rho_g \vec{g} \cdot \vec{d}_{12} \quad (17)$$

と計算される。しかし、気液界面が存在する格子セルにおいては式(16)の積分を実施する必要がある、その際に積分経路と気液界面の交点を求める必要が生じ、煩雑な計算が必要になる。そのため、本研究では比較的容易に式(16)の計算を行える手順を構築した。例として、Fig. 2 に示すように格子セル 1 と 2 に気液界面が存在し、格子セル 1 の中心点は液相中に、格子セル 2 の中心点は気相中にある場合を考える（格子セル境界の中心点は液相中にある）。格子セル 1 と 2 の中心点の座標をそれぞれ $\vec{x}_1$ 及び $\vec{x}_2$ 、格子セル境界の中心点の座標を $\vec{x}_j$ 、格子セル 1 及び 2 中に存在する気液界面の中心点の座標をそれぞれ $\vec{x}_{i1}$ 及び $\vec{x}_{i2}$ とし、式(16)の積分を、 $\vec{x}_1 - \vec{x}_{i1} - \vec{x}_j - \vec{x}_{i2} - \vec{x}_2$ という経路に沿って行

うことを考えると、 $\vec{x}_1-\vec{x}_{i1}$ 間、 $\vec{x}_{i1}-\vec{x}_f$ 間及び $\vec{x}_f-\vec{x}_{i2}$ 間の密度は ρ_l 、 $\vec{x}_{i2}-\vec{x}_2$ 間の密度は ρ_g となるため、式(16)の積分は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \varphi_{G2}-\varphi_{G1} &= \rho_l \vec{g} \cdot \vec{d}_{1-i1} + \rho_l \vec{g} \cdot \vec{d}_{i1-f} \\ &\quad + \rho_l \vec{g} \cdot \vec{d}_{f-i2} + \rho_g \vec{g} \cdot \vec{d}_{i2-2} \\ \vec{d}_{1-i1} &= \vec{x}_{i1} - \vec{x}_1 \\ \vec{d}_{i1-f} &= \vec{x}_f - \vec{x}_{i1} \\ \vec{d}_{f-i2} &= \vec{x}_{i2} - \vec{x}_f \\ \vec{d}_{i2-2} &= \vec{x}_2 - \vec{x}_{i2} \end{aligned} \quad (18)$$

従って、複雑な計算を行うことなく重力ポテンシャル差を求めることができる。本計算方法は、任意形状（傾き・曲率）の界面に対して適用可能であり、特に、成層界面に対しては物理的に正しい重力ポテンシャルを与える（4.2節において示す）。

Fig. 2 Example of Variable Arrangement for Gravitational Potential Calculation.

4. 非構造格子系における高精度 BFA の検証

4.1 静止液体中での円形気泡の解析

4.1.1 解析体系・解析条件

非構造格子系における高精度 BFA の表面張力と圧力の釣合いに関する検証として、重力が作用しない静止液体中での円形気泡の 2 次元解析を行った。BFA を用いない場合、たとえ正しい界面曲率を与えたとしても表面張力と圧力の釣合い条件が正しく満足されず、一般に SV (Spurious Velocity) と呼ばれる非物理的な速度が発生する。本研究では、この SV の大きさについて比較を行うことで、非構造格子系における高精度 BFA の

検証を行った。解析は 40 x 40 の正方形体系の中心に直径 30 の円形気泡を配置した状態で実施し、解析格子として、体系を 1 x 1 の正方形格子セルで分割（格子セル数 1600）した構造格子と、3 角形格子セル（1608 セル）で分割した非構造格子（Fig. 3）を用いた。非構造格子においては、格子配置の不規則性を高めるため、敢えて歪みの大きい格子配置を採用した。解析条件は常温における水-空気系を想定し、気相密度 $\rho_g = 1.2929$ 、液相密度 $\rho_l = 998$ 、表面張力係数 $\sigma = 0.0735$ として実施した。体系内の初期速度及び圧力は全て 0 であり、四方の境界には Free-Slip 条件を課した。解析は $\Delta t = 10^{-3}$ で 1 タイムステップのみ実施した後、体系内の SV 分布について評価した。

Fig. 3 Non-orthogonal Mesh Subdivision for Static Circular Bubble Simulation.

4.1.2 正しい界面曲率を与えた場合の解析結果

BFA を用いた場合に物理的に正しい解が得られることを確認するため、気液界面に正しい界面曲率 ($\kappa = 1/15$) を与えた場合の解析を行った。Fig. 4 に構造格子系における SV 分布を示す。Fig. 4(a) は BFA を用いないで計算を行った結果であり、気液界面近傍において SV が発生している。Fig. 4(b) は BFA を用いて計算した結果であり、SV が全く発生していない。Fig. 5 に示すように、非構造格子系においても等しい傾向が得られており、BFA を用いない場合 (Fig. 5(a)) は発生する SV が、BFA を用いた場合 (Fig. 5(b)) は完全に消失している。Table 1 に SV の最大値を示す。構造格子系において、BFA を用いない場合には 8.03×10^{-7} である SV の最大値が BFA によって

2.51×10^{-18} (Machine Zero) まで抑制されている。非構造格子系においても、BFA を用いない場合には 3.97×10^{-6} と構造格子系における値の 5 倍程度となっている SV の最大値が、BFA によって 5.46×10^{-18} (Machine Zero) まで抑制されている。これらの結果から、BFA によって表面張力と圧力の完全な釣合いが達成できることが示された。尚、気泡内外の圧力差に関して、BFA を用いない場合は Laplace の式 (式(9)) から予測される正しい圧力差を導くことができなかった (構造格子系においても圧力差が理論値よりも約 4.8% 小さくなった) が、BFA を用いた解析では厳密に正しい圧力差を導いており、このことから BFA を用いた解析の優位性が証明されている。

(a) w/o BFA (b) BFA
Fig. 4 Spurious Velocity Distribution.
(Correct Curvature, Orthogonal Mesh)

(a) w/o BFA (b) BFA
Fig. 5 Spurious Velocity Distribution.
(Correct Curvature, Non-orthogonal Mesh)

4.1.3 数値的に曲率を計算した場合の解析結果

実際の物理現象解析への適用性を示すために、気液界面における界面曲率を周囲の流体率分布から計算する場合の解析を行った。本研究で開発している解析コードでは、流体率の分布に基づいて再構築された気液界面の位置情報から各格子セルにおいて気液界面からの距離関数を計算し、距離関数を 2 回微分することにより界面曲率を

計算する手法を採用している。RDF (Reconstructed Distance Function) モデル[10]と呼ばれる本手法は、非構造格子系においても、従来から一般的に広く用いられている手法 CSF (Continuum Surface Force) モデル[11]よりも高精度な界面曲率計算を行えることが著者らによって確認されている[3]。RDF モデルを用いて気液界面の各位置における界面曲率を計算し、その値を用いて円形気泡の解析を行った。Fig. 6 及び Fig. 7 に、それぞれ構造格子系及び非構造格子系における SV 分布を示す。BFA を用いない場合の解析結果 (Fig. 6(a) 及び Fig. 7(a)) では、主に気液界面近傍において SV が発生している。一方、界面曲率の計算値が誤差を含むため、BFA を用いた場合 (Fig. 6(b) 及び Fig. 7(b)) においても SV が発生するが、この場合の SV は BFA を用いない場合よりも十分に小さく、BFA を用いた解析の優位性は明らかである。このため、複数ステップの解析を行った場合、BFA を用いない解析が気泡形状の非物理的な変形を導く時刻においても、BFA を用いた解析では気泡形状を保持できる。次に、解析結果における気液間の圧力差に関して、ラプラスの式からの誤差を評価する。BFA を用いた場合、気液間の圧力差のラプラスの式からの誤差は構造格子系で約 0.87%、非構造格子系で約 4.1% であり、BFA を用いない場合 (構造格子系で約 4.8%、非構造格子系で約 20% の誤差) と比較して、圧力分布に関して高い再現性を有している。Table 1 に SV の大きさの最大値を示す。BFA を用いない場合の SV は構造格子系及び非構造格子系において、それぞれ 8.03×10^{-7} 及び 4.05×10^{-6} となっており、正しい界面曲率を与えた場合の結果 (4.1.1 項の結果) とほとんど等しい値となった。また、Fig. 4(a) と Fig. 6(a)、Fig. 5(a) と Fig. 7(a) を比較すると、両者の SV 分布にほとんど差が見られないことが分かる。このことは、BFA を用いない解析において SV を発生させる原因として表面張力と圧力の釣り合い条件の計算誤差が支配的であり、界面曲率計算の誤差はそれと比較して十分に小さいことを表している。即ち、物理的に正しい数値解析を行うためには、界面曲率計算の誤差を小さくすることよりも、表面張力と圧力の釣り合い条件を満たす定式化の採用が重要であることを示している。尚、BFA を用いた場合、SV の大きさの最大値は構造格子系及び非構造格子系において、それぞれ 1.36×10^{-10}

及び 6.58×10^{-10} となり、BFA を用いない場合の結果と比較して数千分の一程度の大きさとなった。

Fig. 6 Spurious Velocity Distribution.
(RDF Method, Orthogonal Mesh)

Fig. 7 Spurious Velocity Distribution.
(RDF Method, Non-orthogonal Mesh)

Table 1 Maximum Spurious Velocity.

Algorithm	Curvature Simulation Mesh	Maximum SV
w/o BFA	Correct	Orthogonal 8.03×10^{-7}
		Non-Orthogonal 3.97×10^{-6}
	RDF	Orthogonal 8.03×10^{-7}
		Non-Orthogonal 4.05×10^{-6}
BFA	Correct	Orthogonal 2.51×10^{-17}
		Non-Orthogonal 5.46×10^{-18}
	RDF	Orthogonal 1.36×10^{-9}
		Non-Orthogonal 6.58×10^{-10}

4.2 成層界面の解析

重力ポテンシャルの定義が適切であることを確認するため、静止成層界面が存在する場合の重力ポテンシャルの計算を行う。鉛直方向に z 軸(体系下端を原点とする)を取った場合に、成層界面が $z = h$ に存在しているとする。 z 方向下向きに重力が作用している場合、体系上端 ($z = H$) での圧力を 0 (基準値) とする。このとき、式(18)を用

いて体系内の重力ポテンシャルを計算すると、計算経路に依存することなく以下の式が導かれる。

$$\varphi_G = \begin{cases} \rho_g |\vec{g}| (H - z) : \text{if } z \geq h \\ \rho_g |\vec{g}| (H - h) + \rho_l |\vec{g}| (h - z) : \text{if } z \leq h \end{cases} \quad (20)$$

この式は、成層界面に対して理論的に求まる重力ポテンシャルと一致する。Fig. 8 に、実際に非構造格子系において成層界面の数値解析を行った結果を示す。静止液体中の円形気泡解析の場合と同様に、格子配置の不規則性が高い場合における評価を行なうため、敢えて歪みの大きい格子配置を採用した。解析条件は、 $\rho_g = 1.0$ 及び $\rho_l = 10^3$ 、重力加速度は下向きに 10.0 であり、1 タイムステップ ($\Delta t = 10^{-3}$) のみ解析を実施した。ただし、体系高さ $H = 5.0$ 、気液界面高さ $h = 4.0$ である。BFA を用いない場合 (Fig. 8(a))、静水圧分布は正しく得られたが、気液界面位置近傍の格子分割の不規則性が高い領域において物理的には発生しないはずの速度 (SV) が発生した。一方、BFA を用いた場合 (Fig. 8(b))、静水圧分布が正しく求まるとともに SV の発生が抑制され、物理的に正しい解が得られた。尚、SV の最大値は、BFA を用いない場合に 1.98×10^{-3} 、BFA を用いた場合に 4.26×10^{-15} であり、重力が作用する場合においても BFA が非常に高精度な解を導くことが示された。

Fig. 8 Simulation Results of Stratified Interface.

5. 結言

非構造格子系における高精度気液二相流数値解析手法開発の一環として、圧力と外力 (重力及び表面張力) の力学的釣合い条件に関する検討を

行い、非構造格子系において両者の釣合いを完全に満たす高精度定式化（非構造格子系における高精度 Balanced-Force Algorithm）を導出した。

本定式化では、適切な外力ポテンシャルを導入することによって外力と圧力の力学的釣合い条件を満足させた。その結果、任意形状の非構造格子系において、BFA を用いない場合に引起されていた非物理的挙動（Spurious Velocity の発生）を完全に抑制し、表面張力と圧力の力学的釣合い条件が達成されることを示した。更に、実用解析において物理的に正しい解を導くためには、界面曲率の計算誤差を減少させるよりも表面張力と圧力の力学的釣合い条件を満たす定式化を用いることの方が重要であることを示した。また、同様に重力と圧力の力学的釣合い条件を満足することができる定式化によって、成層界面近傍での Spurious Velocity 発生が抑制できることを示した。

Nomenclature

c	: weight for interpolation	[-]
$\vec{d}$	: distance vector	[m]
$d\vec{s}$	: integral path vector	[m]
f	: volume fraction	[-]
$\vec{F}$	: external force	[N/m ³]
$\vec{g}$	: gravitational acceleration	[m/s ²]
$\vec{n}$	: normal vector	[-]
p	: pressure	[Pa]

Greek letters

ϕ	: external force potential	[Pa]
κ	: interfacial curvature	[1/m]
θ	: angle between $\vec{d}_{12}$ and $\vec{n}_f$	[-]
ρ	: density	[kg/m ³]
σ	: surface tension	[N/m]

Subscripts

1,2	: cells on both sides of face
a, b	: vertices on face
g	: gas phase
G	: gravity
f	: face value
l	: liquid phase
S	: surface tension

参考文献

[1] Ohshima, H., Gas Entrainment at Free Surface of Liquid Metal in Fast Breeder Reactors, Japanese Journal of Multiphase Flow, Vol. 17(3), 251-258 (2003).

[2] Sakai, T., Eguchi, Y., Monji, H., Ito, K., Ohshima, H., Proposal of Design Criteria for Gas Entrainment from Vortex Dimples Based on a Computational Fluid Dynamics Method, Heat Transfer Engineering, Vol. 29 No. 8, 731-739 (2008).

[3] Ito, K., Yamamoto, Y., Kunugi, T., Development of Numerical Method for Simulation of Gas Entrainment Phenomena, Proc. 12th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (2007).

[4] Rhie, C. M., Chow, W. L., Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation, AIAA Journal, Vol. 21, No. 11, 1525-1532 (1983).

[5] Kim, D., Choi, H., A Second-Order Time-Accurate Finite Volume Method for Unsteady Incompressible Flow on Hybrid Unstructured Grids, J. Comput. Phys., Vol. 162, 411-428 (2000).

[6] Muzaferija, P. A., Adaptive Finite Volume Method for Flow Predictions using Unstructured Meshes and Multigrid Approach, Ph.D Thesis, Univ. of London (1994).

[7] Francois, M. M., Cummins, S. J., Dendy, E. D., Kothe, D. B., Sjjicilian, J. M., Williams, M. W., A Balanced Force Algorithm for Continuous and Sharp Interfacial Surface Tension Models within a Volume Tracking Framework, J. Comput. Phys., Vol. 213, 141-173 (2006).

[8] Mencinger, J., Zun, I., On the Finite Volume Discretization of Discontinuous Body Force Field on Collocated Grid: Application to VOF Method, J. Comput. Phys., Vol. 221, 524-538 (2007).

[9] Herrmann, N., A Balanced Force Refined Level Set Grid Method for Two-Phase Flows on Unstructured Flow Solver Grids, J. Comput. Phys., Vol. 227, 2674-2706 (2008).

[10] Cummins, S. J., Francois, M. M., Kothe, D. B., Estimating Curvature from Volume Fractions, Computer & Structure, Vol. 83, 425-434 (2005).

[11] Brackbill, J., A Continuum Method for Modeling Surface Tension, J. Comput. Phys., Vol. 100, 335-354 (1992).