気液各相の初期非一様流速分布を有する気泡流中圧力波の弱非線形理論*

Weakly Nonlinear Theory on Pressure Waves in Bubbly Flows
with Nonuniform Distributions of Flow Velocities in Gas and Liquid Phases

前田 泰希**
MAEDA Taiki

金川 哲也***
KANAGAWA Tetsuya

Abstract Weakly nonlinear propagation of plane pressure waves in a flowing water uniformly containing many spherical microbubbles is theoretically investigated. At the initial state, the gas and liquid phases have different flow velocity distributions as a small nonuniform effect in bubbly flows. The basic equations based on a two-fluid model are utilized to describe velocity distributions of gas and liquid phases. By using the method of multiple scales and the determination of size of three nondimensional ratios, we can systematically derive two types of nonlinear wave equations describing long-range propagation of waves. i.e., the Korteweg–de Vries–Burgers (KdVB) equation and the nonlinear Schrödinger (NLS) equation with variable coefficients. As a result, initial velocity distributions affect an advection effect of waves induced by a relative velocity between gas and liquid phases and a moving bubble.

Keywords: Bubbly flow, Weakly nonlinear wave, Nonuniform flow velocity distribution, KdV–Burgers equation, Nonlinear Schrödinger equation, Advection

1. 緒言

ポンプを代表とする水を扱う水力機器において、キャビテーションを伴う高速水流が生ずる。水流中の圧力変動は、有限振幅の圧力波形成を導くが、気泡振動がカギとなり、有限振幅（非線形）圧力波の伝播は、水単相と大きく異なる様相を示すことが古くから指摘されてきた [1, 2]。身の回りの水力機器の性能向上の重要性を鑑みるに、気泡を含む水流中における非線形圧力波の伝播への基礎的理解は、今もなお極めて重要な課題である。

理論研究の動向として、気泡を含む静止水中を伝播する圧力波を記述する Korteweg–de Vries (KdV) 方程式の導出 [1] を皮切りに、多数の非線形波動方程式が導かれてきた [1–9]。最近、著者らは、Fig. 1 に示すように、気泡流の線形分散関係を、周波数の高低を基準に 2 分割し、低周波数の長波を記述する

Fig. 1 Conceptual diagram of linear dispersion relation for pressure waves.

KdV–Burgers (KdVB) 方程式と、高周波数の短波を記述する非線形 Schrödinger (NLS) 方程式を統一的に導出した [10]。しかしながら、以上の先行研究を含めた理論研究の殆どは、媒質が初期に静止状態にあるという仮定のもとでなされている。それゆえ、

* 2019.10.13 受付

** 筑波大学大学院システム情報工学研究科構造エネルギー工学専攻 〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1
TEL: (029)853-5254 FAX: (029)853-5207 E-mail: kanagawa.tetsuya.fu@u.tsukuba.ac.jp

*** 筑波大学システム情報系構造エネルギー工学科

気泡流すなわち媒質の初期の流れが圧力波伝播にかなりの影響を与えるのかという基礎的な知見すら、あやふやなままという状況下にある。

そこで、本研究では、気相と液相でそれぞれ異なる流速の初期非一様分布を考慮した理論解析を行う。気液各相の流速を記述可能な二流体モデル基礎方程式系 [11] を用い、気液各相の流速の摂動展開に基づき、初期静止媒質を仮定した著者らの先行研究 [10] で導かれた定数係数の KdVB と NLS の両方程式が、初期非一様流速分布を変数係数の形で取り込んだ KdVB と NLS の両方程式に拡張される。その結果、気液相間の相対速度や気泡自身の速度などが、圧力波伝播に重要な影響を及ぼすことが判明した。

2. 問題の定式化

2.1 問題設定

多数の球形微細気泡を一様に含む水中を伝播する平面進行圧力波を調べる。初期に気相と液相はそれぞれ独立な流速で流れている (初期非一様流速分布とよぶ)。圧力波の振幅は有限ではあるが、十分に小さいものとする (弱非線形伝播)。気泡は球対称振動しており、合体、分裂、生成、消滅は考慮しない。水の圧縮性は考慮する。気相の粘性は無視するが、液相の粘性は気液界面でのみ考慮する。気泡間の直接的な相互作用、気液界面を通しての相変化、気相と液相の熱伝導性、Reynolds 応力、重力は無視する。

2.2 基礎方程式系

気泡流の気液各相の流速を記述可能な基礎方程式系として、二流体モデルにおける体積平均化された気相と液相の質量保存式と運動量保存式を用いる [11]:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (\alpha \rho_G^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\alpha \rho_G^* u_G^*) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} [(1 - \alpha) \rho_L^*] + \frac{\partial}{\partial x^*} [(1 - \alpha) \rho_L^* u_L^*] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (\alpha \rho_G^* u_G^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\alpha \rho_G^* u_G^{*2}) + \alpha \frac{\partial p_G^*}{\partial x^*} = F^* \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*} [(1 - \alpha) \rho_L^* u_L^*] + \frac{\partial}{\partial x^*} [(1 - \alpha) \rho_L^* u_L^{*2}] \\ + (1 - \alpha) \frac{\partial p_L^*}{\partial x^*} + P^* \frac{\partial \alpha}{\partial x^*} = -F^* \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、上付き添え字 * は有次元の物理量であることを表す。気相・液相間での運動量輸送項 F^* としては、以下の付加質量力を用いる [12–14]:

$$\begin{aligned} F^* = & -\beta_1 \alpha \rho_L^* \left(\frac{D_G u_G^*}{D t^*} - \frac{D_L u_L^*}{D t^*} \right) \\ & - \beta_2 \rho_L^* (u_G^* - u_L^*) \frac{D_G \alpha}{D t^*} - \beta_3 \alpha (u_G^* - u_L^*) \frac{D_G \rho_L^*}{D t^*} \quad (5) \end{aligned}$$

ここで、係数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ は球形気泡の場合では 1/2 となるが、本解析では各項の寄与を明らかにするために、具体的な数値を代入することなく進める。微分演算子 $D_G/D t^*$ と $D_L/D t^*$ は次式で定義される:

$$\frac{D_G}{D t^*} \equiv \frac{\partial}{\partial t^*} + u_G^* \frac{\partial}{\partial x^*}, \quad \frac{D_L}{D t^*} \equiv \frac{\partial}{\partial t^*} + u_L^* \frac{\partial}{\partial x^*} \quad (6)$$

Keller 式を気泡力学の方程式に用いる [15]:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{D t^*} \right) R^* \frac{D_G^2 R^*}{D t^{*2}} \\ + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{D t^*} \right) \left(\frac{D_G R^*}{D t^*} \right)^2 \\ = \left(1 + \frac{1}{c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{D t^*} \right) \frac{P^*}{\rho_{L0}^*} + \frac{R^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^*} \frac{D_G}{D t^*} (p_L^* + P^*) \quad (7) \end{aligned}$$

式 (7) の左辺は慣性項、右辺第 2 項は圧縮性液体中における音響放射減衰を記述する。

式 (1)–(4) と (7) を数学的に閉じるために、気相のポリトロプ変化の状態方程式、液相の Tait 状態方程式、気泡内気体の質量保存式、気液界面における応力のつりあい式を用いる:

$$\frac{p_G^*}{p_{G0}^*} = \left(\frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} \right)^\gamma \quad (8)$$

$$p_L^* = p_{L0}^* + \frac{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}{n} \left[\left(\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*} \right)^n - 1 \right] \quad (9)$$

$$\frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} = \left(\frac{R_0^*}{R^*} \right)^3 \quad (10)$$

$$p_G^* - (p_L^* + P^*) = \frac{2\sigma^*}{R^*} + \frac{4\mu^*}{R^*} \frac{D_G R^*}{D t^*} \quad (11)$$

2.3 パラメータスケールリング

著者らの先行研究 [10] で提案されたパラメータスケールリング法を用いる。波の代表的な伝播速度 U^* 、波の代表的な波長 L^* 、入射波の角周波数 ω^* に対して、無次元数の大きさを以下のように定める [10]:

$$\frac{U^*}{c_{L0}^*} \equiv \begin{cases} O(\sqrt{\epsilon}) \equiv V\sqrt{\epsilon}, & (\text{KdVB}) \\ O(\epsilon^2) \equiv V\epsilon^2, & (\text{NLS}) \end{cases} \quad (12)$$

$$\frac{R_0^*}{L^*} \equiv \begin{cases} O(\sqrt{\epsilon}) \equiv \Delta\sqrt{\epsilon}, & (\text{KdVB}) \\ O(1) \equiv \Delta, & (\text{NLS}) \end{cases} \quad (13)$$

$$\frac{\omega^*}{\omega_B^*} \equiv \begin{cases} O(\sqrt{\epsilon}) \equiv \Omega\sqrt{\epsilon}, & (\text{KdVB}) \\ O(1) \equiv \Omega, & (\text{NLS}) \end{cases} \quad (14)$$

ここで、 V, Δ, Ω はいずれも $O(1)$ の定数である。また、 ϵ は波の無次元振幅であり、有限だが 1 に比べて十分に小さい ($0 < \epsilon \ll 1$)。単一気泡の固有角周波数

ω_B^* は次式で与えられる:

$$\omega_B^* \equiv \sqrt{\frac{3\gamma(p_{L0}^* + 2\sigma^*/R_0^*) - 2\sigma^*/R_0^*}{\rho_{L0}^* R_0^{*2}}} \quad (15)$$

2.4 多重尺度解析 [10]

特異摂動法の一つである多重尺度法を用いる。まずは、独立変数として、時間 t^* と空間座標 x^* を、 $t = t^*/T^*$ 、 $x = x^*/L^*$ と無次元化する。ここで、無次元振幅 $\epsilon (\ll 1)$ を用いて、無次元独立変数 t と x に対する、近傍場、遠方場 I、遠方場 II を表す新たな独立変数を導入する [16, 17]:

$$t_0 = \epsilon^0 t, \quad x_0 = \epsilon^0 x, \quad (\text{近傍場}) \quad (16)$$

$$t_1 = \epsilon^1 t, \quad x_1 = \epsilon^1 x, \quad (\text{遠方場 I}) \quad (17)$$

$$t_2 = \epsilon^2 t, \quad x_2 = \epsilon^2 x, \quad (\text{遠方場 II}) \quad (18)$$

ここから、偏微分演算子が展開される (微分展開法):

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i=0}^j \epsilon^i \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{i=0}^j \epsilon^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (19)$$

ここで、KdVB 方程式の場合は $j = 1$ であり、NLS 方程式の場合は $j = 2$ である。

従属変数は、新たな独立変数 (16)–(18) の関数とみなされ、 ϵ のべき級数に展開される:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1 + \epsilon \alpha_1 + \epsilon^2 \alpha_2 + \cdots \quad (20)$$

$$\frac{R^*}{R_0^*} = 1 + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + \cdots \quad (21)$$

$$\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*} = \begin{cases} 1 + \epsilon^2 \rho_{L1} + \epsilon^3 \rho_{L2} + \cdots, & (\text{KdVB}) \\ 1 + \epsilon^5 \rho_{L1} + \epsilon^6 \rho_{L2} + \cdots, & (\text{NLS}) \end{cases} \quad (22)$$

$$\frac{p_L^*}{\rho_{L0}^* U^{*2}} = p_{L0} + \epsilon p_{L1} + \epsilon^2 p_{L2} + \cdots \quad (23)$$

ここで、各 ϵ^i ($0 \leq i$) の係数はいずれも $O(1)$ であり、式 (23) の液相圧力の係数 p_{Li} ($0 \leq i$)、気相と液相の初期密度比 ρ_{G0}^*/ρ_{L0}^* 、表面張力 σ 、液相粘性 μ 、初期圧力 p_{G0} と p_{L0} の定義は先行研究 [10] と同一である。

2.5 流速の摂動展開

気相と液相の流速は、初期流速の存在と流速の非一様性を考慮して、以下のように展開する [18]:

$$\frac{u_G^*}{U^*} = \begin{cases} \epsilon [u_{G01}(x_1) + u_{G1}] + \epsilon^2 u_{G2} + \cdots, & (\text{KdVB}) \\ \epsilon u_{G1} + \epsilon^2 [u_{G02}(x_2) + u_{G2}] + \cdots, & (\text{NLS}) \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{u_L^*}{U^*} = \begin{cases} \epsilon [u_{L01}(x_1) + u_{L1}] + \epsilon^2 u_{L2} + \cdots, & (\text{KdVB}) \\ \epsilon u_{L1} + \epsilon^2 [u_{L02}(x_2) + u_{L2}] + \cdots, & (\text{NLS}) \end{cases} \quad (25)$$

これは、気泡数密度の初期非一様分布を考慮した先行研究 [18] を、流速の初期非一様分布に拡張したものに位置づけられる。ここで、 u_{G01} 、 u_{L01} 、 u_{G02} 、 u_{L02} は初期流速を表現する新たな項であり、 u_{G01} と u_{L01} は ϵ^1 の項に導入し、 u_{G02} と u_{L02} は ϵ^2 の項に導入した。これら 4 項は、遠方場において現れる流速の初期非一様分布を表現可能で、具体的には、 u_{G01} と u_{L01} は、KdVB 方程式の場合 (3 章) の遠方場の空間座標 x_1 のみに依存する既知関数とする。同様に、 u_{G02} と u_{L02} は、NLS 方程式の場合 (4 章) の最も遠い遠方場 II の x_2 のみに依存するとする。つまり、近傍場では、初期流速は分布を持たない一様流速 (静止の場合も含む定数) と仮定しているが、弱い非線形性が長距離の伝播を経て発現するほどに音源から遠い遠方場では、初期流速の空間分布を表現可能となる。

3. 低周波数の長波

低周波数かつ長波長の領域 (Fig. 1 の KdVB) における、非線形波の長距離伝播を記述する KdVB 方程式を導く。

3.1 近傍場 [10]

本節で示す結果は先行研究 (文献 [10] の 3.1 節) と同一であるため、要点のみを示す。

基礎方程式系 (1)–(4) と (7) に、パラメータスケリング (12)–(14) と微分展開 (19)、摂動展開 (20)–(25) を代入すると、波の無次元振幅 ϵ に対する最低次の線形方程式が導かれる:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - 3 \frac{\partial R_1}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} = 0 \quad (26)$$

$$\alpha_0 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - (1 - \alpha_0) \frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} = 0 \quad (27)$$

$$\beta_1 \frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0} - \beta_1 \frac{\partial u_{L1}}{\partial t_0} - 3\gamma p_{G0} \frac{\partial R_1}{\partial x_0} = 0 \quad (28)$$

$$(1 - \alpha_0 + \beta_1 \alpha_0) \frac{\partial u_{L1}}{\partial t_0} - \beta_1 \alpha_0 \frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0} + (1 - \alpha_0) \frac{\partial p_{L1}}{\partial x_0} = 0 \quad (29)$$

$$R_1 + \frac{\Omega^2}{\Delta^2} p_{L1} = 0 \quad (30)$$

線形方程式系 (26)–(30) は、 R_1 のみを従属変数とする単一方程式にまとめられる:

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - v_p^2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} = 0 \quad (31)$$

$$v_p \equiv \sqrt{\frac{3\alpha_0(1 - \alpha_0 + \beta_1)\gamma p_{G0} + \beta_1(1 - \alpha_0)\Delta^2/\Omega^2}{3\beta_1\alpha_0(1 - \alpha_0)}} \quad (32)$$

ここで、先行研究 [10] では、位相速度を $v_p \equiv 1$ としていたが、本稿では一般性を保つために、 v_p のまま進める。位相関数 φ_0 を

$$\varphi_0(x_0, t_0) \equiv x_0 - v_p t_0 \quad (33)$$

と導入し、線形波動方程式 (31) の右向き進行波解 $R_1 = f(\varphi_0; t_1, x_1)$ に着目する。式 (26)–(30) より、 α_1 、 u_{G1} 、 u_{L1} 、 p_{L1} は f の定数倍として表現される：

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= s_1 f, & u_{G1} &= s_2 f, \\ u_{L1} &= s_3 f, & p_{L1} &= s_4 f \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、定数係数 s_i ($i = 1, 2, 3, 4$) は先行研究 [10] の式 (45) を参照されたい。

3.2 遠方場

近傍場と同一の手法を用いることにより、式 (1)–(4)、(7) に対応する ϵ^2 に対する方程式系を得る：

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t_0} - 3 \frac{\partial R_2}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{G2}}{\partial x_0} = K'_1 \quad (35)$$

$$\alpha_0 \frac{\partial \alpha_2}{\partial t_0} - (1 - \alpha_0) \frac{\partial u_{L2}}{\partial x_0} = K'_2 \quad (36)$$

$$\beta_1 \frac{\partial u_{G2}}{\partial t_0} \beta_1 - \frac{\partial u_{L2}}{\partial t_0} - 3\gamma p_{G0} \frac{\partial R_2}{\partial x_0} = K'_3 \quad (37)$$

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_0 + \beta_1 \alpha_0) \frac{\partial u_{L2}}{\partial t_0} - \beta_1 \alpha_0 \frac{\partial u_{G2}}{\partial t_0} \\ + (1 - \alpha_0) \frac{\partial p_{L2}}{\partial x_0} = K'_4 \end{aligned} \quad (38)$$

$$R_2 + \frac{\Omega^2}{\Delta^2} p_{L2} = K'_5 \quad (39)$$

ここで、式 (35)–(39) の非同次項は以下の通りである：

$$K'_1 = K_1 - \frac{du_{G01}}{dx_1} + 3u_{G01} \frac{\partial R_1}{\partial x_0} - u_{G01} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0} \quad (40)$$

$$K'_2 = K_2 + (1 - \alpha_0) \frac{du_{L01}}{dx_1} - \alpha_0 u_{L01} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} K'_3 = K_3 - \beta_1 u_{G01} \frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} + \beta_1 u_{L01} \frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} \\ - \beta_2 (u_{G01} - u_{L01}) \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} K'_4 = K_4 + \alpha_0 u_{L01} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - 2(1 - \alpha_0) u_{L01} \frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} \\ + \beta_1 \alpha_0 u_{G01} \frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} - \beta_1 \alpha_0 u_{L01} \frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} \\ + \beta_2 \alpha_0 (u_{G01} - u_{L01}) \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} \end{aligned} \quad (43)$$

$$K'_5 = K_5 \quad (44)$$

ここで、 K_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) は初期静止の場合の先行研究 [10] の付録 1 を参照されたい。初期流速の考慮

により、本研究では、非同次項に新たな項が現れた。ここで、式 (40)–(41) に現れる x_1 に関する導関数項は、以下の式 (46) における φ_0 に関する偏微分演算よりゼロとなるため、最終的な結果には寄与しない。

続いて、 R_2 に対する非同次方程式が導かれる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0^2} - v_p^2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x_0^2} \\ = -\frac{1}{3} \frac{\partial K'_1}{\partial t_0} + \frac{1}{3\alpha_0} \frac{\partial K'_2}{\partial t_0} + \frac{1 - \alpha_0 + \beta_1}{3(1 - \alpha_0)\beta_1} \frac{\partial K'_3}{\partial x_0} \\ + \frac{1}{3\alpha_0(1 - \alpha_0)} \frac{\partial K'_4}{\partial x_0} - \frac{\Delta^2}{3\alpha_0\Omega^2} \frac{\partial^2 K'_5}{\partial x_0^2} = K' \end{aligned} \quad (45)$$

式 (45) に対する可解条件より $K' = 0$ が課される [10]。式 (33) を用いて偏導関数を書き換え、式 (40)–(44) を代入すると、非同次項 K' が書き換えられる：

$$\begin{aligned} K' = 2v_p \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left[\frac{\partial f}{\partial t_1} + v_p \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} + \Pi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_0^2} \right. \\ \left. + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial \varphi_0^3} + (\Pi_0 + \Pi_4) \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} \right] = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

3.3 KdVB 方程式

微分展開法 (19) を用いて、近傍場の式 (31) と遠方場の式 (46) を組み合わせる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_p \frac{\partial f}{\partial x} + \left[\Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial x} + \Pi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right. \\ \left. + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + (\Pi_0 + \Pi_4) \frac{\partial f}{\partial x} \right] = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

最後に、独立変数の変数変換を施すことにより、変数係数の KdVB 方程式が導出される：

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \Pi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + \Pi_4 \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 \quad (48)$$

$$\tau \equiv \epsilon t, \quad \xi \equiv x - (v_p + \epsilon \Pi_0) t \quad (49)$$

ここで、各係数 Π_i ($i = 0, 2, 3, 4$) は次式で与えられる：

$$\Pi_0 = -\frac{v_p(1 - \alpha_0)\Delta^2 V^2}{6\alpha_0\Omega^2} \quad (50)$$

$$\Pi_2 = -\frac{1}{6\alpha_0} \left(4\mu + \frac{\Delta^3 V}{\Omega^2} \right) \quad (51)$$

$$\Pi_3 = \frac{v_p \Delta^2}{6\alpha_0} \quad (52)$$

$$\Pi_4(\epsilon x) = u_{G01} - \frac{s_1}{6\beta_1} (2\beta_1 - \beta_2)(u_{G01} - u_{L01}) \quad (53)$$

また、 Π_1 は文献 [10] の付録 2 に示したきわめて複雑な形となったため、本稿では割愛する。さらに、 Π_2

Fig. 2 The advection coefficient Π_4 against the initial void fraction α_0 for $\Omega = 1$, $\sqrt{\epsilon} = 0.15$, $R_0^* = 10 \mu\text{m}$, $p_{L0}^* = 101325 \text{ Pa}$, $\rho_{L0}^* = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\sigma^* = 0.0728 \text{ N/m}$, $c_{L0}^* = 1.5 \times 10^3 \text{ m/s}$, $\mu^* = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\gamma = 1$ and $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$, $u_{G01} = 0.4$ and $u_{L01} = 0.3$ (u_{G01} and u_{L01} are constants).

は先行研究 [10] と同一、 Π_0 、 Π_1 、 Π_3 は v_p の有無以外は先行研究 [10] と同一となった。式 (47) の右辺第 2 項は非線形項、右辺第 3 項は散逸項、右辺第 4 項は分散項、右辺第 5 項は(波の)移流項である。したがって、遠方場においては非線形性、散逸性、分散性が現れ、それらが競合する [10]。

新たに現れた移流項の係数 Π_4 について考察する。初期非一様流速分布 u_{G01} と u_{L01} は任意関数であり、これらを含む Π_4 は変数係数である。なお、移流係数のうち、先行研究にも現れていた定数係数 Π_0 に注意を要する。ここで、式 (53) の右辺第 1 項と右辺第 2 項は、気泡自体の流れ、および、気泡とその周囲液体との速度差(相対速度)をそれぞれ表す。後者のうち、 $s_1(2\beta_1 - \beta_2)/(6\beta_1)$ の大きさは概ね 0.5 であり、式 (53) の右辺第 1 項 u_{G01} の係数 1 の概ね半分である。したがって、初期流速を考慮する場合、相対速度よりも気泡自体の流れの方が、波の移流に大きな影響を及ぼすことがわかる。Fig. 2 に、初期流速がいずれも定数の場合について、移流係数 Π_4 の初期ポイド率 α_0 依存性を示す。初期ポイド率 α_0 が大きくなるにつれて、移流係数 Π_4 が大きくなること、さらに、気液の相対速度を考慮することで、相対速度を無視する場合よりも移流係数が微増することもわかる。

4. 高周波数の短波

高周波数かつ短波長の領域 (Fig. 1 の NLS) における、非線形波の長距離伝播を記述する NLS 方程式を導く。近傍場 (4.1 節) と遠方場 I (4.2 節) の結果は先

行研究 (文献 [10] の 4.1 節と 4.2 節) と同様であるため、要点のみを示す。

4.1 近傍場 [10]

式 (1)–(4) と (7) に、式 (12)–(14)、(19)、(20)–(25) を代入すると、 ϵ に対する最低次の線形方程式系が導かれる。ここで、気相と液相の質量保存式と運動量保存式は、低周波長波の場合の線形方程式 (26)–(29) と同一となった。一方、Keller 式は

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} + R_1 + \frac{p_{L1}}{\Delta^2} = 0 \quad (54)$$

となった。線形方程式系を R_1 に関する単一线形方程式にまとめる：

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - \left[\frac{\Delta^2}{3\alpha_0} + \frac{1 - \alpha_0 + \beta_1}{\beta_1(1 - \alpha_0)} \gamma p_{G0} \right] \frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} - \frac{\Delta^2}{3\alpha_0} \frac{\partial^4 R_1}{\partial t_0^2 \partial x_0^2} = 0 \quad (55)$$

式 (55) の左辺第 3 項は分散項であり、低周波長波の場合には現れなかった分散性が、近傍場で現れた [10]。式 (55) の解に準単色波を仮定する [10, 17, 19]：

$$R_1 = A(t_1, t_2, x_1, x_2) e^{i\theta} + \text{c.c.} \quad (56)$$

$$\theta = kx_0 - \Omega(t_0) \quad (57)$$

ここで、 A は複素振幅、 $k(\equiv k^* L^* = k^* U^* / \omega_B^*)$ は無次元波数、 θ は位相関数、c.c. は複素共役を表す。式 (56) において、 $e^{i\theta}$ により搬送波が記述され、 A により包絡波が記述される [17, 19]。解 (56) を線形方程式系に代入すると、 α_1 、 u_{G1} 、 u_{L1} 、 p_{L1} はいずれも R_1 の定数倍として表現される：

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= b_1 R_1, & u_{G1} &= b_2 R_1, \\ u_{L1} &= b_3 R_1, & p_{L1} &= b_4 R_1 \end{aligned} \quad (58)$$

ここで、定数係数 b_i ($i = 1, 2, 3, 4$) は先行研究 [10] の式 (69) を参照されたい。

4.2 遠方場 I [10]

ϵ^2 の近似から、 R_2 に関する非同次方程式を得る：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0^2} - \left[\frac{\Delta^2}{3\alpha_0} + \frac{1 - \alpha_0 + \beta_1}{\beta_1(1 - \alpha_0)} \gamma p_{G0} \right] \frac{\partial^2 R_2}{\partial x_0^2} - \frac{\Delta^2}{3\alpha_0} \frac{\partial^4 R_2}{\partial t_0^2 \partial x_0^2} &= \Gamma A^2 e^{2i\theta} \\ &+ i \left(-\frac{\partial D}{\partial \Omega} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial t_1} + v_g \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) e^{i\theta} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (59)$$

ここで、 $D(k, \Omega)$ は以下のように定義される線形分散関係である。

$$D \equiv \frac{\Delta^2 k^2 (1 - \Omega^2)}{3\alpha_0} + \frac{(1 - \alpha_0 + \beta_1) \gamma p_{G0} k^2}{\beta_1 (1 - \alpha_0)} - \Omega^2 \quad (60)$$

可解条件より、式 (59) の右向き進行波の $e^{i\theta}$ の係数はゼロとなり、包絡波 A に関する線形波動方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + v_g \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0 \quad (61)$$

が得られ、その解は次式で与えられる [10]:

$$R_2 = c_0 A^2 e^{2i\theta} + \text{c.c.} \quad (62)$$

式 (62) を ϵ^2 に対する方程式系に代入すると、2 次の摂動解が得られる:

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ u_{G2} \\ u_{L2} \\ p_{L2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & 0 \\ c_2 & d_2 & 0 \\ c_3 & d_3 & 0 \\ c_4 & d_4 & c_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^2 e^{2i\theta} + \text{c.c.} \\ i(\partial A / \partial t_1) e^{i\theta} + \text{c.c.} \\ |A|^2 \end{pmatrix} \quad (63)$$

以上において、定数係数 Γ 、 c_0 、 c_i 、 d_i ($i = 1, 2, 3, 4$)、 c_5 は先行研究 [10] の 4.2 節を参照されたい。

4.3 遠方場 II

ϵ^3 に対する近似から、以下の方程式系を得る:

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial t_0} - 3 \frac{\partial R_3}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{G3}}{\partial x_0} = N'_1 \quad (64)$$

$$\alpha_0 \frac{\partial \alpha_3}{\partial t_0} - (1 - \alpha_0) \frac{\partial u_{L3}}{\partial x_0} = N'_2 \quad (65)$$

$$\beta_1 \frac{\partial u_{G3}}{\partial t_0} - \beta_1 \frac{\partial u_{L3}}{\partial t_0} - 3\gamma p_{G0} \frac{\partial R_3}{\partial x_0} = N'_3 \quad (66)$$

$$(1 - \alpha_0 + \beta_1 \alpha_0) \frac{\partial u_{L3}}{\partial t_0} - \beta_1 \alpha_0 \frac{\partial u_{G3}}{\partial t_0} + (1 - \alpha_0) \frac{\partial p_{L3}}{\partial x_0} = N'_4 \quad (67)$$

$$\frac{\partial^2 R_3}{\partial t_0^2} + R_3 + \frac{p_{L3}}{\Delta^2} = N'_5 \quad (68)$$

ここで、式 (64)–(68) の非同次項は以下の通りである:

$$N'_1 = N_1 - \frac{du_{G02}}{dx_1} + 3u_{G02} \frac{\partial R_1}{\partial x_0} - u_{G02} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0} \quad (69)$$

$$N'_2 = N_2 + (1 - \alpha_0) \frac{du_{L02}}{dx_1} - \alpha_0 u_{L02} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0} \quad (70)$$

$$N'_3 = N_3 - \beta_1 u_{G02} \frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} + \beta_1 u_{L02} \frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} - \beta_2 (u_{G02} - u_{L02}) \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} \quad (71)$$

$$N'_4 = N_4 + \alpha_0 u_{L02} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - 2(1 - \alpha_0) u_{L02} \frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} + \beta_1 \alpha_0 u_{G02} \frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} - \beta_1 \alpha_0 u_{L02} \frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} + \beta_2 \alpha_0 (u_{G02} - u_{L02}) \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} \quad (72)$$

$$N'_5 = N_5 - 2u_{G02} \frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0 \partial x_0} \quad (73)$$

ここで、 N_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) は先行研究 [10] の付録 1 を参照されたい。本研究で、初期流速を考慮したことにより、非同次項に新たな項が現れた。ここで、式 (69)(70) に現れる x_1 に関する導関数項は、後述の式 (74) において、 t_0 や x_0 に関する偏微分演算より、ゼロとなるため、最終的な結果には寄与しない。

方程式系 (64)–(68) を、 R_3 に対する単一非同次方程式にまとめる:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 R_3}{\partial t_0^2} - \left[\frac{\Delta^2}{3\alpha_0} + \frac{1 - \alpha_0 + \beta_1}{(1 - \alpha_0)\beta_1} \gamma p_{G0} \right] \frac{\partial^2 R_3}{\partial x_0^2} \\ & - \frac{\Delta^2}{3\alpha_0} \frac{\partial^4 R_3}{\partial t_0^2 \partial x_0^2} \\ & = -\frac{1}{3} \frac{\partial N'_1}{\partial t_0} + \frac{1}{3\alpha_0} \frac{\partial N'_2}{\partial t_0} + \frac{1 - \alpha_0 + \beta_1}{3(1 - \alpha_0)\beta_1} \frac{\partial N'_3}{\partial x_0} \\ & + \frac{1}{3\alpha_0(1 - \alpha_0)} \frac{\partial N'_4}{\partial x_0} - \frac{\Delta^2}{3\alpha_0} \frac{\partial^2 N'_5}{\partial x_0^2} = N' \end{aligned} \quad (74)$$

式 (56)、(58)、(62)(63) を代入すると、非同次項 N' が書き換えられる:

$$N' = \Lambda_1 e^{3i\theta} + \Lambda_2 e^{2i\theta} + \Lambda_3 e^{i\theta} + \text{c.c.} \quad (75)$$

ここで、式 (74) の可解条件より、 $\Lambda_3 = 0$ となる [10]:

$$\begin{aligned} \Lambda_3 = -\frac{\partial D}{\partial \Omega} & \left[i \left(\frac{\partial A}{\partial t_2} + v_g \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) \right. \\ & \left. + v_1 |A|^2 A + i v_2 A + v_3 \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + v_4 A \right] = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

ここで、 Λ_1 と Λ_2 は、NLS 方程式の導出に寄与しないことから割愛する。

4.4 NLS 方程式

微分展開法 (19) を用いて、遠方場 I と II それぞれにおける包絡波の方程式 (61) と (76) を結合する:

$$\begin{aligned} & i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v_g \frac{\partial A}{\partial x} \right) \\ & + \epsilon^2 \left(v_1 |A|^2 A + i v_2 A + v_4 A \right) + v_3 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (77)$$

最後に、独立変数の変数変換を施すことにより、NLS 方程式が導出される:

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + v_1 |A|^2 A + i v_2 A + v_3 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + v_4 A = 0 \quad (78)$$

$$\tau = \epsilon^2 t, \quad \xi = \epsilon(x - v_g t) \quad (79)$$

ここで、 v_i ($i = 2, 3, 4$) は次式で与えられる:

$$v_2 = \frac{(4\mu + \Delta^3 V) k^2}{2(3\alpha_0 + \Delta^2 k^2)} \quad (80)$$

$$v_3 = -\frac{9\alpha_0 k v_p \Delta^2}{2(3\alpha_0 + \Delta^2 k^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{dv_g}{dk} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \nu_4(\epsilon^2 x) = & \frac{2k^2 v_p}{\partial D / \partial \Omega} \left[u_{G02} + \frac{\Delta^2}{9\alpha_0} k^2 u_{G02} \right. \\ & \left. - \frac{b_1}{6\beta_1} (2\beta_1 - \beta_2) (u_{G02} - u_{L02}) \right] \quad (82) \end{aligned}$$

また、 ν_1 は文献 [10] の付録 2 に示したきわめて複雑な形をとり、 ν_1 、 ν_2 、 ν_3 はいずれも先行研究 [10] と同一となった。式 (78) の右辺第 2 項は非線形項、右辺第 3 項は散逸項、右辺第 4 項は分散項、右辺第 5 項は移流項であり、高周波短波の場合も、遠方場において、非線形性、散逸性、分散性が競合する [10]。

新たに現れた移流係数 ν_4 について考察する。流速の初期非一様性より、移流係数 ν_4 は変数係数であり、式 (82) の右辺第 1 項と右辺第 3 項は、気泡自体の流れ、および、気泡とその周囲液体との速度差 (相対速度) をそれぞれ表す。KdVB 方程式の移流係数 Π_4 と同様に、各項の係数の大きさの比較より、流れを考慮する場合、相対速度よりも気泡自体の流れの方が、波の移流に大きな影響を及ぼす。ここまでは KdVB 方程式の場合と同様であるが、NLS 方程式での移流係数 ν_4 には、右辺第 2 項に、KdVB 方程式での移流係数 Π_4 では現れなかった、気泡振動に伴う項が現れた。これは、遠方場 II における Keller 式の非同次項 (73) の右辺第 2 項に起因し、気泡の 2 次の非線形振動の効果のうち慣性力を意味する。Fig. 3 に、初期流速がいずれも定数の場合について、移流係数 ν_4 の波数 k 依存性を示す。波数が $k = 0.2$ 付近で ν_4 が最小になるが、それ以降は波数が大きくなるにつれて、 ν_4 が大きくなる。また、気液の相対速度を考慮することで、相対速度を無視する場合よりも、 ν_4 が増加する。KdVB 方程式での移流係数 Π_4 と比べて、NLS 方程式での移流係数 ν_4 では、相対速度の考慮による移流係数の増加が大きくなることもわかる。

5. 結 言

気相と液相が初期に異なる流速分布のもとで流れている気泡流を考え、低周波長波の領域を記述する KdVB 方程式 (48) と、高周波短波の領域を記述する NLS 方程式 (78) を導出した。その結果、気相速度が波の移流に大きく影響を与えることがわかった。また、気相と液相の相対速度を考慮したことで、気相と液相が同速度であると仮定する場合に比べ、移流係数の大きさが大きくなることもわかった。さらに、非一様な流速分布を持つことから、初期静止を仮定していた先行研究 [10] では定数係数だった移流係数が変数係数に変化した。今後の展望として、具体的な波形を得るために、変数係数の場合の KdVB 方程式と NLS 方程式の数値解を求めることが挙げられる。

Fig. 3 The advection coefficient ν_4 against the wavenumber k for the case that the physical quantities except for ϵ and Ω are the same as those used in Fig. 2, where $\epsilon = 0.07$, $u_{G01} = 0.4$ and $u_{L01} = 0.3$ (u_{G01} and u_{L01} are constants); Ω varies with the variation of k .

謝 辞

本研究は、JSPS 科研費 (18K0394) およびカワイサウンド技術・音楽振興財団の助成を受けた。

Nomenclature

A	: complex amplitude of bubble radius
c_{L0}	: speed of sound
F	: interfacial momentum transport
k	: wavenumber of carrier wave
L	: typical wavelength
n	: material constant
p	: volume averaged pressure
P	: surface averaged liquid pressure [20]
R	: bubble radius
t	: time
T	: typical period
u	: fluid velocity
U	: typical phase velocity
v_g	: group velocity
v_p	: phase velocity
V	: nondimensional constant of $O(1)$ for speed
x	: space coordinate

Greek letters

α	: void fraction
β	: virtual mass coefficient
γ	: polytropic exponent

Δ : nondimensional constant of $O(1)$ for length
 ϵ : nondimensional wave amplitude
 θ : phase function of wave
 μ : liquid viscosity
 ν : coefficient
 ξ : space coordinate
 Π : coefficient
 ρ : density
 σ : surface tension
 τ : time
 φ : phase function
 ω : angular frequency of carrier wave
 ω_B : natural angular frequency of single bubble oscillations
 Ω : nondimensional constant of $O(1)$ for time
 Superscripts and Subscripts
 G, L : gas and liquid phases, respectively
 0 : initial unperturbed state
 $*$: dimensional quantity

参考文献

- [1] van Wijngaarden, L., On the Equations of Motion for Mixtures of Liquid and Gas Bubbles, *J. Fluid Mech.*, Vol. 33, 465–474 (1968).
- [2] van Wijngaarden, L., One-Dimensional Flow of Liquids Containing Small Gas Bubbles, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 4, 369–396 (1972).
- [3] Noordzij, L. and van Wijngaarden, L., Relaxation Effects, Caused by Relative Motion, on Shock Waves in Gas–Bubble/Liquid Mixture, *J. Fluid Mech.*, Vol. 66, 115–143 (1974).
- [4] Kuznetsov, V. V., Nakoryakov, V. E., Pokusaev, B. G. and Shreiber, I. R., Propagation of Perturbations in a Gas-Liquid Mixture, *J. Fluid Mech.*, Vol. 85, 85–96 (1978).
- [5] Caflisch, R. E., Miksis, M. J., Papanicolaou, G. C. and Ting, L., Effective Equations for Wave Propagation in Bubbly Liquids, *J. Fluid Mech.*, Vol. 153, 259–273 (1985).
- [6] Nigmatulin, R. I., *Dynamics of Multiphase Media*, Hemisphere, New York (1991).
- [7] Watanabe, M. and Prosperetti, A., Shock Waves in Dilute Bubbly Liquids, *J. Fluid Mech.*, Vol. 274, 349–381 (1994).
- [8] Khismatullin, D. B. and Akhatov, I. S., Sound–Ultrasound Interaction in Bubbly Fluids: Theory and Possible Applications, *Phys. Fluids*, Vol. 13 (12), 3582–3598 (2001).
- [9] Smereka, P., A Vlasov Equation for Pressure Wave Propagation in Bubbly Fluids, *J. Fluid Mech.*, Vol. 454, 287–325 (2002).
- [10] Kanagawa, T., Yano, T., Watanabe, M. and Fujikawa, S., Unified Theory Based on Parameter Scaling for Derivation of Nonlinear Wave Equations in Bubbly Liquids, *J. Fluid Sci. Technol.*, Vol. 5 (3), 351–369 (2010).
- [11] Egashira, R., Yano, T. and Fujikawa, S., Linear Wave Propagation of Fast and Slow Modes in Mixtures of Liquid and Gas Bubbles, *Fluid Dyn. Res.*, Vol. 34, 317–334 (2004).
- [12] Yano, T., Egashira, R. and Fujikawa, S., Linear Analysis of Dispersive Waves in Bubbly Flows Based on Averaged Equations, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 75 (10), 104401 (2006).
- [13] Eames, I. and Hunt, J. C. R., Forces on Bodies Moving Unsteadily in Rapidly Compressed Flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 505, 349–364 (2004).
- [14] Zhang, D. Z. and Prosperetti, A., Averaged Equations for Inviscid Disperse Two-Phase Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 267, 185–219 (1994).
- [15] Keller, J. B. and Kolodner, I. I., Damping of Underwater Explosion Bubble Oscillations, *J. Appl. Phys.*, Vol. 27 (10), 1152–1161 (1956).
- [16] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, Wiley, New York (1973).
- [17] Jeffrey, A. and Kawahara, T., *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory*, Pitman, London (1982).
- [18] Kanagawa, T., Two Types of Nonlinear Wave Equations for Diffractive Beams in Bubbly Liquids with Nonuniform Bubble Number Density, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 137 (5), 2642–2654 (2015).
- [19] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York (1974).
- [20] Jones, A. V. and Prosperetti, A., On the Suitability of First-order Differential Models for Two-phase Flow Prediction, *Int. J. Multiph. Flow*, Vol. 11 (2), 133–148 (1985).