二流体界面での不安定化が引き起こすコップの中のパターン形成*

Pattern Formation in Glass Caused by Rayleigh-Taylor Instability

下 川 倫 子**

SHIMOKAWA Michiko

Abstract Beautiful patterns such as snowflakes, wind ripples, and cloud patterns are ubiquitous in nature. Some of those are formed by interfacial instability. We focus on two pattern formations caused by the Rayleigh-Taylor instability. Rayleigh-Taylor instability is an interfacial instability between two liquids that occurs when a heavier liquid is on a lighter liquid. The first pattern we discuss is a fractal/cell pattern in a coffee cup. If a droplet of coffee solution is placed on milk, the coffee solution spreads on the surface of the milk. Then the Rayleigh-Taylor instability occurs at the interface between the coffee solution and milk, and the coffee solution starts to sink into the milk. We found that the fractal or the cell pattern is formed at the surface of the milk in this process. We showed that an aspect ratio between the radius of the container and the depth of the milk affects vertical flow and it leads to a transition between the fractal pattern and the cell pattern. We also showed that the fractal pattern is formed by a similar mechanism of a viscous fingering. The second pattern is a breakup of a droplet. A sinking droplet in a viscous solution spontaneously deforms to a vortex ring and then breaks up spontaneously. We experimentally investigated relations among breakup number, radii of droplets, viscosities and density differences between two solutions. We also proposed a phenomenological model considering the Rayleigh-Taylor instability. The phenomenological model provides a non-dimensional parameter derived from a radius of a droplet, viscosity and a density difference between two liquids. And, the model states that the breakup number is classified by the parameter. Our experimental results obey the parameter. It means that the competition between a driving force of gravity and the viscosity dissipation at the interface of two solutions determines the breakup number.

Keywords: Pattern formation, Rayleigh-Taylor instability, Fractal, Breakup, Mode selection

1. 緒 言

1.1 キッチン地球科学とパターン形成

砂丘の風紋や雪の結晶など自然界は美しいパターンであふれている[1]。多数のマイクロな要素の相互作用やゆらぎにより、自然界のマクロなパターンは形成される。マイクロな要素が与える複雑なふるまいを統計的手法を用い、マクロなパターン形成の理解を目指す試みがなされてきた[2, 3]が、パターンの多くは非平衡かつ非定常な系で形成されるため取り扱いが難しく、統一的手法は確立

されていない。様々な実験で得られた知見から、統一的手法を見出し、自然界の多種多様なパターンを作る共通の法則を見出すことや普遍的な現象の発見を筆者は目指している。筆者は物理学を主戦場としパターン形成の実験的研究を続けてきたが、2017年に東京大学地震研究所で開催された第1回目研究会「キッチン地球科学」への参加を通して、時間的にも空間的にもスケールの大きな地球科学の現象が小さなキッチンから生まれた筆者の実験とつながっていることを実感し、

* 2020.7.31 受付

** 福岡工業大学工学部 〒811-0295 福岡県福岡市東区和白東 3-30-1
TEL: (092)606-5342 FAX: (092)606-0747 E-mail: shimokawa@fit.ac.jp

感動をおぼえた。例えば、過去の筆者が行った多成分砂山のパターン形成[4-6]は火山の麓で観察されるノーマルグレーディング地層の形態形成、二流体界面での表面パターンの形成[7-10]は巻雲のパターン形成、液滴の分裂現象[11, 12]はマグマの上昇を模した実験である。本稿では、コップの中で起こる二つのパターン形成について報告する。

1.2 レイリーテイラー不安定性

空を見上げると見える周期的な波状の雲や具が少ないみそ汁の表面にあらわれる対流構造、雨の日にゆるい斜面を流れる水の先端の段々模様といった流体の不安定性に起因した現象は身近にあふれている。基礎物理はもちろんのこと、大気や海洋の流れを扱う地球科学分野や機械・化学工学といった工学分野など、多くの分野で流体の不安定性に起因した現象が共通して研究されていることから、流体の不安定性は自然現象を理解する上で重要な位置を占めていると言える[13]。二流体の界面で起こる不安定現象の代表的な例として、レイリーテイラー不安定性が挙げられる[13, 14]。鉛直方向の二流体の層構造において、上層の流体密度が下層より高いとき二流体の界面で擾乱が起こり、界面が不安定化する。この現象をレイリーテイラー不安定性と言う。筆者はレイリーテイラー不安定性が引き起こすパターンの実験的研究を行った。第2章では二流体の水平面で観察されるフラクタルパターン、第3章では粘性流体中を沈降する液滴の分裂現象について報告する。

2. 牛乳表面にコーヒーが作るフラクタル構造

2.1 コーヒーフラクタル

コップに牛乳を注ぎ、コーヒーの液滴を一滴、滴下すると、コーヒー滴は牛乳表面に直ちに広がり、その後、レイリーテイラー不安定性により高密度のコーヒーは低密度の牛乳中を沈降する。沈降過程で、コーヒーは牛乳表面にフラクタルパターンを自発的に形成することを筆者は発見した。レイリーテイラー不安定性に関する鉛直方向の揺らぎについては、線形安定性解析による不安定化波長のモード選択や非線形を考慮した数値計算による揺らぎの時間発展など多くの研究がなされてきたが[13, 14]、本研究で焦点を当てているレイリーテイラー不安定性が起こっている際の

水平面の構造については調べられていなかった。本章では、レイリーテイラー不安定性が起こる際に水平面でコーヒーが描くフラクタルパターンに関する実験について報告する。

2.2 実験方法

使用した試料はインスタントコーヒー（ネスカフェ ゴールドブレンド）と牛乳（みどり 低脂肪乳）である。実験方法は以下のとおりである。

- (i) インスタントコーヒー2.0 g と墨汁（書光）3.0 ml を 100 °Cのお湯で湯煎しながら混ぜ合わせる。
- (ii) コップに牛乳を注ぎ、流れをなくすために 10 分以上放置する。
- (iii) 牛乳界面に室温に戻したコーヒー溶液の滴 0.2 ml を静かに置く。このとき、コーヒー溶液の密度は 1.71 g/ml、牛乳の密度は 1.03 g/ml であり、コーヒー溶液は牛乳より重いので、二流体界面ではレイリーテイラー不安定性が起こる。
- (iv) コーヒーが沈降する過程での表面パターンを Fig. 1 の Camera 1 の位置から撮影する。また、沈降過程での鉛直方向の流れは牛乳とほぼ同じ密度を持つ水を牛乳の代わりに用いた実験を行うことで観察可能となる。鉛直方向の流れは Fig. 1 の Camera 2 の位置から撮影した。

Fig. 1 Experimental setup.

2.3 実験結果

2.3.1 コーヒーフラクタル

コーヒーの液滴を牛乳表面に滴下してから 70 秒後に、Fig. 2 のパターンが牛乳界面に現れる。パターンの白い部分は牛乳、黒い部分はコーヒー溶液の領域に対応する。このパターンを密度相関関数法およびボックスカウント法で調べたところ、一桁以上の範囲でべき乗則に従っていたこと

Fig. 2 Fractal Pattern [7]. Scale bar: 1.0 mm.

から、Fig. 2 のパターンはフラクタルといえる[7]。この解析から得られた Fig. 2 のパターンのフラクタル次元は 1.86 であった。

Fig. 3 の上部の写真は水平面で観察されるパターンの時間変化 (Fig. 1 の Camera 1 の位置から撮影)、下部の写真はフラクタルパターン形成時の鉛直方向の流れの時間変化 (Fig. 1 の Camera 2 の位置から撮影) を示す。滴下したコーヒーは牛乳表面に直ちに広がる (Fig. 3 (a))。その後、コーヒーは沈み始めるが、沈む過程でコーヒーの領域の端から中央部に向かって樹状構造が成長し (Fig. 3 (b))、この成長過程で樹状構造は合体を繰り返すことでフラクタルパターンは形成され

ていた (Fig. 3 (c))。コーヒーが沈む位置に着目すると、はじめは全領域から沈降しているが (Fig. 3 (a))、時間経過とともに水平面上の一点に一度集まってから沈降する流れに変化している (Fig. 3 (c))。コーヒー溶液が集まって沈降する一点は、複数の樹状構造が最終的に合体する位置に対応している。フラクタル構造が出現するのは、コーヒーが鉛直方向に沈むことで界面のコーヒーパターンの要素が時間とともに消滅した時間近辺である。この時間以降もコーヒーは鉛直方向に沈みに続け、コーヒーパターンは時々刻々と変化するが、フラクタル次元は時間経過やコーヒー溶液の密度に依存せず、ほぼ一定値 1.88 ± 0.06 をとっていた。

2.3.2 表面パターンのアスペクト比依存性

コーヒーフラクタルの形成において鉛直方向の流れが重要であることが Fig. 3 の結果から予想される。鉛直方向の流れと表面パターンの関係を明らかにするため、レイリーベナール対流の対流サイズが溶液の深さに依存することをヒントに、容器の半径 r と牛乳の深さ h を変化させたときの表面パターンを観察した。また、牛乳とコーヒーの代わりに物理量が明らかな低密度のグリセリンと高密度の磁性流体を使って、同様の実験を行った。表面パターンの可視化のため、グリセリン水溶液には少量の白い絵の具を溶かしてい

Fig. 3 Snapshots of (a)-(c) surface patterns and (a)-(c) vertical flows at 10 s, 20 s and 90 s after the coffee droplet is put on the surface of the milk[7].

る。この実験でコーヒーと牛乳の実験で観察されていたフラクタルパターンに加え、新たにセルパターンが観察された (Fig. 4) [8, 9]。フラクタルパターンとセルパターンの出現領域を示した相図が Fig. 5 である。Fig. 5 を見ると分かるように、本実験領域において $r \leq h$ ではフラクタルパターン、 $r \geq h$ ではセルパターンが出現し、 $r \sim h$ でフラクタルパターンからセルパターンへの遷移が起こった。このときの鉛直方向の流れのスナップショットを Fig. 6 に示す。フラクタルパターンが形成されるときは Fig. 3 で観察されたものと同様、高密度流体は二流体間の一点に一度集まって沈降する (Fig. 6 (a))。この一点は実験容器の水平面の重心位置近傍であった。一方、セルパターン形成時は高密度流体が界面の一点に集まることなく、様々な個所から沈降した (Fig. 6 (b))。

Fig. 4 Cell pattern [9].

Fig. 5 Phase diagram of surface patterns [8].

体積保存により、高密度流体が沈降すると同時に低密度流体が上昇していると考えられる。これを対流構造と類似したものとして捉えたとき、Figs. 6 (a'), (b') の概略図で示すような鉛直方向の流れが起こっていると考えられる。 $r < h$ のときは容器の水平面上の重心位置から高密度流体が沈み込み、側面で低密度流体が上昇するという軸対称な対流構造が起こるのに対し (Fig. 6 (a')), $r > h$ のときは複数の対流構造が形成されるため (Fig. 6 (b')), $r \sim h$ でパターンの遷移が起こったのではないだろうか。以上のことより、鉛直方向の流れの変化が表面パターンを決定していることが実験から分かった。

2.3.3 フラクタルパターンの形成ダイナミクス

フラクタルパターン出現時は容器の水平面上の重心近傍で高密度流体が沈んでいることを前節で報告した。この沈み込みによって、容器の端から中央部に向かう流れが二流体界面で起こる (Fig. 6 (a')). この結果を受け、表面に出現するフラクタルパターンはヴィスカスフィンガーと類似した機構で形成されているのではないかと

Fig. 6 Snapshots of vertical flows in the formations of (a) fractal and (b) cell patterns, and schematic drawing of (a') fractal and (b') cell patterns [8].

考えた。ヴィスカスフィンガーとは、低粘性流体が高粘性流体中に注入されたとき、二流体の界面が不安定することでできる指状のパターンのことをいう[13]。コーヒーフラクタルの形成において、容器外側から重心位置に向かう表面流によって、水平界面では低粘度の牛乳が高粘度のコーヒー領域に侵入する。このとき起こる二流体間での界面不安定性の成長によって、樹状構造が外側から成長しているのではないだろうか。

フラクタルパターンが形成され始める初期領域では二流体界面に棒状のパターンが形成されていた。高粘性流体の厚み b に対する棒状パターンの波長 λ を実験で調べたところ、 $\lambda \sim 8b$ に従い増加していた。コーヒーと牛乳の水平界面は固定境界、コーヒーと空気の水平界面は自由境界とみなし、従来のヴィスカスフィンガーの理論モデルについて線形安定性解析を行ったところ、実験が示す $\lambda \sim 8b$ が導かれる。以上のことから、初期のフラクタルパターンはヴィスカスフィンガーと類似した機構で形成されていると考察される[10]。

3. 沈降する液滴の分裂現象

3.1 液滴の分裂

高密度かつ高粘度の流体の液滴を低密度かつ低粘度流体の中で沈降させると、沈降過程で液滴は渦輪に変形し、その後、自発的に分裂することが知られている[15-18]。この現象は誰にでも簡単にできる身近な現象であるが、発見から 100 年以上たった今もそのダイナミクスは明らかになっていない。その理由として、液滴の大きさ、形、沈降速度が変化する非定常な沈降過程での不安定化現象であることが挙げられる。我々ではできるだけ問題を簡単にするため、従来の実験では異なる粘度で行われていた二流体の粘度を同一にした条件下で実験を行った。得られた実験結果をもとに、分裂個数を特徴づける物理量を明らかにし、そのダイナミクスを考察する[11, 12]。

3.2 実験方法

高密度の滴溶液として、硫酸鉄水溶液 $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3 \text{aq}$ を使用した。溶媒の硫酸鉄 n 水和物 (WAKO094-01065) の濃度を変化させ、密度を調整した。また、可視化のため、硫酸鉄水溶液に少量の食紅(協立食品)を混合した。低密度のベース溶液には、純水とグリセリン (WAKO072-00621) を 1:1 の質量比で混合したグ

リセリン水溶液を使用した。グリセリン水溶液の密度 ρ_0 は 1.1 g/cm^3 であり、二流体の密度差は $\Delta\rho \sim 10^2 \text{ kg/m}^3$ となる。また、二種類の溶液の粘性が等しくなるよう、それぞれの溶液にポリエチレングリコール (Alfa Aesar B21955) を混合し、調整した。ポリエチレングリコールの混入によって、溶液の粘度は大きく変化するが密度はほとんど変わらない。粘度は温度に大きく依存するので、二重円筒容器を用い、二重円筒の隙間 25°C の水を循環させ、溶液の温度を一定に保った (Fig. 7)。また、マイクロシリンジポンプを用いることで一定体積の液滴を形成し、水面 8 mm 上方から滴下する。複数のチューブを用意し、液滴の半径 R をコントロールした。液滴の分裂現象は容器の側面 (Fig. 7 Camera 1) と底面 (Fig. 7 Camera 2) から同時に撮影している。

Fig. 7 Experimental setup.

3.3 実験結果

3.3.1 液滴形状の時間変化

Figs. 8(a)-(f), (a')-(h') はそれぞれ鉛直方向と水平方向から撮影された液滴の時間変化を示している。球形の液滴は沈降過程でトーラス上の渦輪に変形した後 ((a)-(c), (a')-(d')), 渦輪の不安定性によって液滴の分裂が起こる ((d)-(f), (e')-(h'))。時間とともに液滴形状の揺らぎは増幅し、ほぼ同体積の二個の液滴に分裂した ((f), (h'))。

3.3.2 液滴の分裂個数

液滴の初期半径 R 、二流体の粘性 μ 、二流体の密度差 $\Delta\rho$ を変化させ、実験を行ったところ、前述したように液滴は 2 個に分裂するだけでなく、3

個から 8 個に液滴が分裂する様子も観察された。Fig. 9 は、50 回の実験 ($N=50$) で得られた分裂個数 m の頻度分布 $p(m)$ である。 N 回の実験で得られた分裂個数 m の出現回数を $n(m)$ としたとき、縦軸の $p(m)$ は $n(m)/N$ で与えられる。Figs. 9 (a)-(c) は異なる R で得られた実験結果で、(a) $R = 0.98$ mm、(b) 1.12 mm、(c) 1.53 mm である。Fig. 9 を見ると分かるように、 $p(m)$ のピーク値をとる m は R の増加とともに増加する。さらに μ 、 $\Delta\rho$ の依存性についても調べたところ、 $p(m)$ のピーク値をとる m の値は μ の増加とともに減少、 $\Delta\rho$ の増加とともに増加する傾向を示した。

3.3.3 分裂個数を決定する物理量 G

液滴の分裂現象は、沈降過程で変形した渦輪の不安定化によるものと考えた。この渦輪の不安定性は高密度流体で構成される渦輪と低密度のベース溶液の界面で起こるレイリーテラー不安

Fig. 8 Time series of the breakup of the droplet with an initial radius $R = 1.0$ mm. Photos (a)-(h) captured from vertical side of the container, and (a')-(h') captured from the bottom side at (a) 1.0 s, (b) 2.1 s, (c) 3.1 s, (d) 4.1 s, (e) 5.0 s, (f) 6.1 s, (a') 0.5 s, (b') 1.0 s, (c') 2.0 s, (d') 3.0 s, (e') 4.0 s, (f') 5.0 s, (g') 6.0 s, (h') 7.0 s after the droplet was placed at the surface of the base solution [11].

定性によるものではないだろうか。また、それと同時に二流体間での混合拡散も起こっていると考えられる。この描像を以下のナビエーストークス方程式と移流項付きの拡散方程式で表現した。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \mathbf{e}_z \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = D \nabla^2 \rho \quad (2)$$

$\mathbf{u}$ 、 ρ 、 P は時間 t における位置 $\mathbf{x}$ での流速、流体の密度、圧力、 ρ_0 はベース溶液の密度、 D は拡

Fig. 9 Probability distributions $p(m)$ of the numbers m of the breakup of the droplet in experiments with initial radii (a) $R = 0.98$ mm, (b) 1.12 mm and (c) 1.53 mm, respectively [12].

散係数、 ν は動粘性係数、 g は重力加速度の大きさを意味する。密度差が重力項のみに影響するブシネスク近似を適用すると、式(1)のようにレイリーテ일러不安定性を表現できる。以下のスケール変換

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}/R \quad (3)$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}/\nu \quad (4)$$

$$\mathbf{t}' = \mathbf{t}/R^2 \quad (5)$$

$$P' = PR^2/\rho_0\nu^2 \quad (6)$$

$$\rho' = (\rho - \rho_0)/\Delta\rho \quad (7)$$

に基づき、式(1)–(2)を無次元化すると、式(8)–(9)が得られる。

Fig. 10 (a) Phase diagram on the numbers m of the breakup against G and S as nondimensional parameters. (b) Relationship between average value $\langle m \rangle$ of m and G . Each data was obtained from experiments with different viscosity μ , initial radius r of the droplet and density difference $\Delta\rho$ between two solutions [12].

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{t}'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = -\nabla' P' + \nabla'^2 \mathbf{u}' - G \rho' \mathbf{e}_z \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \mathbf{t}'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \rho' = \frac{1}{S} \nabla'^2 \rho' \quad (9)$$

式(8)–(9)は二つの無次元パラメータ $G = (\Delta\rho/\rho_0)(R^3/\nu^2)g$ と $S = \nu/D$ を与える。 G は重力による駆動力と粘性散逸の比、 S は拡散の影響の強さを示すシュミット数である。この G と S をつかって分裂個数 m を整理した。まず、第3.3.2節で示した頻度分布 $p(m)$ から m の平均値 $\langle m \rangle$ を求める。 $\langle m \rangle$ の小数点以下を切り捨てた値の G と S の依存性を示したものが Fig. 10(a) である。Fig. 10(a) をみると、 m は S には依存せず、 G に依存していることが分かる。そこで、 G と $\langle m \rangle$ の関係を調べた。Fig. 10(b) を見ると分かるように、実験条件の ν 、 ρ 、 R が異なるにもかかわらず、 G を用いることによって $\langle m \rangle$ を整理することができる。この結果は、本実験のパラメータ領域において、液滴の分裂現象に関する拡散の影響はほとんどなく、粘性散逸と重力による駆動力とのバランスが重要であることを意味する。以上のことから、液滴の分裂個数は液滴の沈降を引き起こす重力効果と粘性散逸の競合により決定されることが分かった[12]。

4. 結 言

本稿では、コップの中で起こるコーヒーフラクタルの形成、沈降する液滴の分裂現象について報告した。「形」というキーワードを通して、レイリーテ일러不安定性による普遍的な物理ダイナミクスに関する解釈を実験的観点から与えた。一見、これらの現象はコップの中で起こる限定的なものに思えるが、コーヒーフラクタルは対流構造による二次元平面での流体の挙動、液滴のパターン形成は加速度運動する渦輪の不安定性といったように流体力学の基本的問題と関係しており、熱対流、マンテル対流、気象現象などで現れる不安定性とも関わるので、その適用範囲は広い。本研究が物理や地球科学のみならず、様々な研究領域での問題解決の糸口にもなることを願う。

謝 辞

本研究は坂口英継准教授(九州大)、高見利也教授(大分大)との共同研究です。本研究の議論を通じて多くの有意義なコメントをくださった太田正之輔教授(九州大)、本庄春雄教授(九州大)、鴛田昌之教授(九州大)、北畑裕之准教授(千葉大)に心から感謝します。科研費・若手 B、基盤 C、日本私立学校振興共済事業団・若手研究者奨励金、日本科学協会・笹川科学研究助成、住友財団・基礎科学研究助成の支援により本研究は行われました。

Nomenclature

b	: thickness of higher viscosity solution	[mm]
D	: diffusion coefficient	[m ² /s]
g	: acceleration of gravity	[m/s ²]
G	: non-dimensional parameter well characterizes breakup number	[-]
h	: depth of lower density solution (milk)	[cm]
m	: breakup number	[-]
$n(m)$	: number of experiments with breakup number m in N times experiments	[-]
N	: number of experiments	[-]
$p(m)$	: probability of occurrence of breakup number m	[-]
P	: pressure	[Pa]
r	: radius of container	[cm]
R	: radius of droplet	[mm]
S	: Schmidt number	[-]
u	: current velocity	[m/s]

Greek letters

λ	: wavelength of stick-like pattern	[mm]
μ	: viscosity	[Pa · s]
ν	: kinetic viscosity	[m ² /s]
ρ	: density	[kg/m ³]
$\Delta \rho$	: density difference of two solutions	[kg/m ³]

参考文献

- [1] Ball, P., The Self-Made Tapestry: Pattern Formation in Nature, 1-456, Oxford University Press, Oxford (1998).
- [2] Langer, J. S., Instabilities and Pattern Formation in Crystal Growth, Rev. Mod. Phys., Vol. 52(1), 1-28 (1980).
- [3] Cross, M. C. and Hohenberg, P. C., Pattern Formation Outside of Equilibrium, Rev. Mod. Phys., Vol. 65, 851-1112 (1993).
- [4] Shimokawa, M. and Ohta, S., Dual Stratification

- of a Sand Pile Formed by Trapped Kink, Phys. Lett. A, Vol. 366, 591-595 (2007).
- [5] Shimokawa, M. and Ohta, S., Spontaneous Formation of Dual Stratification Patterns in a Large Quasi-Two-Dimensional Sand Pile, Phys. Rev. E, Vol. 77(011305), 1-8 (2008).
- [6] Shimokawa, M., Suetsugu, Y., Hiroshige, Y., Hirano, T. and Sakaguchi, H., Pattern Formation in a Sandpile of Ternary Granular Mixtures, Phys. Rev. E, Vol. 91(062205), 1-6 (2015).
- [7] Shimokawa, M. and Ohta, S., Annihilative Fractals Formed in Rayleigh-Taylor Instability, Fractals, Vol. 20, 97-104 (2012).
- [8] Shimokawa, M., Experimental Study on Transition in Fractal Patterns Derived from Vertical Flow, J. Phys. Soc. of Jpn., Vol. 81(094003), 1-5 (2012).
- [9] Shimokawa, M., Kitahata, H. and Sakurai, T., Size Distribution of Cell Pattern Observed in Gravitational Instability, Phys. Rev. E, Vol. 87(012903), 1-5 (2013).
- [10] Shimokawa, M. and Takami, T., Wavelength Analysis of Interface between Two Miscible Solutions Observed in Formation of Fractal Pattern, J. Phys. Soc. of Jpn., Vol. 83(044001), 1-5 (2014).
- [11] Shimokawa, M., Mayumi, R., Nakamura, T., Takami, T. and Sakaguchi, T., Breakup and Deformation of a Droplet Falling in a Miscible Solution, Phys. Rev. E, Vol. 93(062214), 1-6 (2016).
- [12] Shimokawa, M. and Sakaguchi, H., Mode Selection on Breakup of a Droplet Falling into a Miscible Solution, Phys. Rev. Fluids, Vol. 4(013603), 1-14 (2019).
- [13] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, 429-453, Dover, New York (1981).
- [14] Sharp, D. H., An overview of Rayleigh-Taylor Instability, Physica D, Vol. 12, 3-10 (1984).
- [15] Thompson, D., On Growth and Forms, 70-75, Cambridge University Press, Cambridge (1961).
- [16] Thomson, J. J. and Newall, H. F., V. On the Formation of Vortex Rings by Drops Falling into Liquids, and some Allied Phenomena, Proc. R. Soc. London, Vol. 39, 417-436 (1886).
- [17] Arecchi, F. T., Buah-Bassuah, P. K., Francini, F., Perez-Garcia, C. and Quercioli, F., An Experimental Investigation of the Break-Up of a Liquid Drop Falling in a Miscible Fluid, Europhys. Lett., Vol. 9, 333-338 (1989).
- [18] Arecchi, F. T., Buah-Bassuah, P. K. and Perez-Garcia, C., Fragment Formation in the Break-Up of a Drop Falling in a Miscible Liquid, Europhys. Lett., Vol. 15, 429-434 (1991).