静止流体中を上昇する球形気泡に働く力*

Force Acting on a Spherical Bubble
Rising through a Quiescent Liquid

高 木 周**
TAKAGI Shu

松 本 洋 一 郎**
MATSUMOTO Yoichiro

Abstract The direct numerical simulation is performed on the spherical bubble unsteadily rising through a quiescent liquid. The method is based on a finite-volume solution of the equations on an orthogonal curvilinear coordinate system. The calculations are performed for a bubble rising through a clean liquid and contaminated one. Following the former experimental results, the tangential stress free condition is given for a clean bubble, and no-slip condition for contaminated one. The numerical results are compared with those of the model equation of the translational motion of the bubble, which is often used in numerical models of a bubbly flow. The steady drag, added mass and history terms are checked up by the comparison. It is revealed that the history force effect is negligible for a bubble rising through the clean liquid beyond $Re=O(50)$. From the numerical point of view, the fact that the history force is negligible is quite important, because it reduces the calculation time and memory for a bubbly flow model. For a contaminated bubble, history force effect is not negligible even though the Reynolds number is high enough. It is found that the expression of the history force by Basset kernel gives an over-estimation of the history force for the bubble rising at moderate Reynolds number. This error becomes larger with increasing Reynolds number and it reduces the accuracy to calculate the bubble motion by the model equation.

Keywords: Numerical Analysis, Spherical Bubble, Rising Motion, History Force, Effect of Impurities

1. 緒言

気泡を含む流れは、化学プラントの反応器、汚水処理技術に用いられる曝気槽、原子炉の冷却系統など、多くの装置で見受けられ、装置の性能を左右する重要な因子となっている。故に、これら気泡を含む流れの挙動を正確に予測することが強く期待されているが、これらの流れは、現象を支配する因子が多く、その挙動の予測は、困難なものとなる。従来より、これらの流れ場の解析は、解析対象とする特定の流れに対して実験を行い、その実験データをもとにマクロな挙動に対する

種々の相関式を求めることにより行われてきた。この様にして得られた相関式は、ある特定の系に対し信頼できる情報を提供するが、マクロな相関量と流動の微細構造の関係が明白でないため、他の系への適用を考えた場合、問題となることが少なくない。

これに対し、最近のコンピュータの計算能力の向上、及び、混相流の平均化方程式に対する理論解析の進展などに伴い、気泡流の微細構造をもとにマクロな流動に対する普遍的な知見を得ようとする試みが行われてきている。これらの中には、

* 1995.12.5. 受付

** 東京大学工学系研究科機械工学専攻 〒113 東京都文京区本郷7-3-1
TEL (03) 3812-2111 ext. 6287 FAX (03) 3818-0835

気泡流そのものを直接数値計算しようとする試みもある[1, 2]が、現状では高々数十個の気泡しか扱えず、微細構造からマクロな統計量に対する知見を得るには至っていない。従って、実際の気泡流の挙動を数値的に予測する際には、気泡流の平均化方程式を用いた数値計算モデルが用いられる。この際、問題となるのが、平均化方程式を閉じるために必要となる構成方程式や、分散相の運動を記述する方程式である。

気泡など分散相を含む多くの数値計算モデルでは、分散相の運動を記述する際に、分散相を質点のように扱う。すなわち、個々の分散相(気泡)に働く種々の力(抗力、揚力...)を、理論解析や実験結果をもとにモデル化し、分散相に働く合力を計算する。気泡流の場合、通常、気泡を球形と仮定し、その運動を記述する方程式が構築されるが、気泡に働く履歴力や剪断流中で働く揚力等、未だ詳細が明らかにされていないものが多い。本研究では、静止流体中を静止状態から浮力の影響で上昇する気泡について直接数値計算を行い、気泡の並進運動をモデル化した式(以下、気泡の運動方程式と呼ぶ)との比較を行い、履歴力や付加質量力、定常抗力などの影響を評価する。

2. 数値計算法

2.1 仮定

数値計算を行う際に以下のことを仮定した。

- (1) 気液界面および流れ場を軸対称とする。
- (2) 液相は、非圧縮ニュートン流体とする。
- (3) 液相の密度及び粘性は、気相と比べ十分大きいものとする。これは、界面での気相の動圧および粘性応力が、液相のものに対して無視し得ることを表している。

2.2 基礎方程式系

流れ場の計算は、直交曲線座標系において、基礎変数として反変速度の物理成分を用い、SIMPLER法により行う。基礎方程式を以下に示す。

○連続の式

$$\frac{1}{h_{\xi}h_{\eta}r}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(h_{\eta}ru_{\xi})+\frac{\partial}{\partial\eta}(h_{\xi}ru_{\eta})\right]=0 \quad \dots\dots(1)$$

ここで、

$$h_{\xi}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\xi}\right)^2}, \quad h_{\eta}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\eta}\right)^2}$$

○ ξ 方向運動量保存式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{\xi}}{\partial t} + \frac{1}{h_{\xi}h_{\eta}r}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(h_{\eta}ru_{\xi}^2) + \frac{\partial}{\partial\eta}(h_{\xi}ru_{\xi}u_{\eta})\right] \\ &= -\frac{1}{\rho l}\frac{1}{h_{\xi}}\frac{\partial p}{\partial\xi} + \frac{1}{h_{\xi}}\frac{\partial x}{\partial\xi}g \\ &+ \nu\frac{1}{h_{\xi}h_{\eta}r}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_{\eta}r}{h_{\xi}}\frac{\partial u_{\xi}}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_{\xi}r}{h_{\eta}}\frac{\partial u_{\xi}}{\partial\eta}\right)\right] + S_{\xi} \\ &\dots\dots(2) \end{aligned}$$

ここで S_{ξ} は、反変速度物理成分を用いたことによる追加項で次のように表される。

$$\begin{aligned} S_{\xi} &= \frac{u_{\eta}^2}{h_{\xi}h_{\eta}}\frac{\partial h_{\eta}}{\partial\xi} - \frac{u_{\xi}u_{\eta}}{h_{\xi}h_{\eta}}\frac{\partial h_{\xi}}{\partial\eta} \\ &- \nu\frac{1}{r^2h_{\xi}}\frac{\partial r}{\partial\xi}\left(\frac{u_{\xi}}{h_{\xi}}\frac{\partial r}{\partial\xi} + \frac{u_{\eta}}{h_{\eta}}\frac{\partial r}{\partial\eta}\right) \\ &+ \nu\left[\frac{1}{h_{\xi}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u_{\eta}}{h_{\xi}h_{\eta}}\frac{\partial h_{\xi}}{\partial\eta}\right) - \frac{1}{h_{\eta}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u_{\eta}}{h_{\xi}h_{\eta}}\frac{\partial h_{\eta}}{\partial\xi}\right)\right] \\ &+ \nu\frac{1}{h_{\xi}h_{\eta}}\left[\frac{\partial h_{\xi}}{\partial\eta}\frac{1}{h_{\xi}}\frac{\partial u_{\eta}}{\partial\xi} - \frac{\partial h_{\eta}}{\partial\xi}\frac{1}{h_{\eta}}\frac{\partial u_{\eta}}{\partial\eta}\right] \\ &- \nu\frac{1}{h_{\xi}^2h_{\eta}^2}\frac{\partial h_{\xi}}{\partial\eta}\left[u_{\xi}\frac{\partial h_{\xi}}{\partial\eta} + u_{\eta}\frac{\partial h_{\eta}}{\partial\xi}\right] \quad \dots\dots(3) \end{aligned}$$

η 方向については、上式で ξ と η を入れ替えた式を用いる。

2.3 計算アルゴリズム

数値計算法は、著者等が変形気泡に関して開発した手法[3](以下、手法Iと呼ぶ)に対して、球形気泡の計算のための変更を加えたものである。計算アルゴリズムを以下に示す。

- (1) 球形気泡周りに直交曲線格子を形成する。直交曲線格子は、手法Iと同様の手法を用い、楕円型方程式により形成する。
- (2) 初速度0で、静止流体中に気泡を放置する。
- (3) 各時刻ごとに、気泡に働く力の総和が釣り合うように反復計算を行い、気泡の上昇速度を決定する。
- (4) (3)で決定された上昇速度に従い、格子を移動させる。
- (5) (3)、(4)の過程を時間進行させながら、繰り返す。

ここで、2.1仮定(3)より、気泡の密度や粘性は、液相に対して無視し得るため、気相については流れ場を解かない。気液界面での境界条件としては、剪断応力無し(フリースリップ)の場合と、滑り速度無し(ノンスリップ)の条件が課される場合の2種類について行う。前者はきれいな液体中を、後者は不純物を含む液体中を上昇する場合に相当する。

ここでは、手法Iに対して行ったアルゴリズム上の変更点について説明する。変形気泡の場合には、気液界面の移動速度を、界面での法線方向の釣り合い式より計算した。すなわち、局所的な応力条件より、界面の移動速度を決定した。これに対し、球形気泡の場合には、次式(4)で表される拘束条件が付加されることになり、局所的な速度が気泡全体の重心速度(U_i)と結びつけられることになる。

$$u_i n_i = U_i n_i \quad \dots\dots\dots (4)$$

この式が、各時間ステップごとに満たされるように反復計算を行う。この際、問題となるのが、気泡の上昇速度(U)の決定方法である。気泡の上昇速度(U)は、各時間ステップごとに気泡全体に働く力のバランスが保たれるように決定されるが、この計算は、流れの局所的情報(局所圧力、局所速度)の積分値を気泡の上昇速度と結びつけることによって決定できる。ここでは、気泡の上昇速度の計算を次のような反復計算によって行う。

気泡の加速度は、気泡に働く表面力と体積力(今の場合重力)を足し合わせて次のように表現できる。

$$\rho_g V_b \frac{dU_i}{dt} = \int \tau_{ij} n_j dS - \rho_g V_b g \delta_{1i} \quad \dots\dots\dots (5)$$

この式は、後述の式(8)のように気泡の並進運動をモデル化した方程式では無く、単に気泡に働く力の釣り合いを表した運動方程式である。式(8)の付加質量力や、定常抗力、履歴力、浮力は、上の式において τ_{ij} を線形化された方程式を用いて計算した結果現れてくる項であり、上の式の τ_{ij} は、より一般的な表記である。即ち、式(5)は、流体の支配方程式の形に依らず成り立つ式である。この式において気泡の密度が十分小さいとして無視できるとすると次式を得る。

$$T_{fi} = \int \tau_{ij} n_j dS = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

従って、気泡の密度が無視できる場合には、気泡表面に働く表面力を積分した結果がゼロとなる。ここでは、この性質を反復計算に利用する。今、軸対称な計算を考えているので、気泡は鉛直方向のみに移動すると考え、気泡の進行方向としては $i=1$ の1方向のみを考える。まず、ある時刻で、表面に働く応力の積分を行い、 T_n を計算する。 T_n がゼロで無いときの誤差が、上昇速度の見積もりを誤ったことによるため、 T_n をゼロにするようにその時間ステップで反復計算を行う。鉛直上方を正方向とし、もし、 T_n が、正ならば気泡に働く力は、実際よりも大きめに見積もられたと考え、上昇速度をわずかに減少させる。逆に T_n が、負の値をとるならば、速度をわずかに増加させる。すなわち各時間ステップで、

$$U^{k+1} = U^k - \beta T_{f1} \quad \dots\dots\dots (7)$$

の反復計算を行う。ここで、 β として、0.001~0.01の値を計算条件に合わせて適宜用いた。数値解の発散を防ぐために、 β の値はRe数の増加とともに小さくする必要がある。以上の操作を、各時間ステップごとに行うことによって、球形気泡の上昇過程を計算することが可能となる。

3. 計算結果および考察

3.1 球形気泡の運動方程式について

粒子や液滴、気泡に働く力を求めることは、流体力学的に非常に興味深く、古くから行われてきた[4]。特に1980年代より、緒言で述べた通り、気泡流数値計算モデルの構成方程式として用いられる気泡の運動方程式を構築するために、気泡に働く種々の力を求める研究が盛んに行われている。本計算の場合、重力の存在下で、球形気泡が浮力の影響で上昇していく過程をシミュレートしているため、付加質量力と定常抗力、履歴力、浮力によって気泡の運動は、次のようにモデル化される。

$$\frac{1}{2} \rho_l V_b \frac{dU}{dt} = \rho_l V_b g - \frac{C_D}{2} \pi R_0^2 \rho_l U^2 + F_H \quad \dots\dots (8)$$

$$F_H = -6\pi\mu R_0 \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \frac{du}{d\tau} d\tau \quad \dots\dots\dots (9)$$

F_H は、履歴力であり、 $K(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}$ のときが、Basset[5]力にあたる。

3.2 きれいな液体中を上昇する気泡の場合

Yang & Leal[6]は、低Reynolds数で振動する気泡、液滴に働く履歴力に関して理論解析を行い、界面で剪断応力無しの条件が課される気泡(以下、フリースリップ気泡と呼ぶ)の場合には、Basset力が存在しないことを示した。そして、Basset力の変わりに、指数関数と誤差関数の積で表される積分核 $K(t-\tau)$ を持つ履歴力が存在することを示した。これに対し、Meiら[7]は、速度をステップ状に変化させたときの球形気泡周りの流れに関して数値計算を行い、速度のステップ状の変化に対して Re 数(Reynolds数) 0 から100の範囲で有効な積分核の表記を次のように与えた。

$$K(\eta) \approx \frac{4}{9\pi} I(A, \xi = \frac{\eta}{Re}), \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $\eta = \frac{U}{R_0}(t-\tau)$, $A = \left(\frac{2}{9} \frac{Re}{f_H}\right)^2$,
 $f_H(Re) \sim 0.1377 + [0.1956^{-4} + (0.5164 Re^{-\frac{1}{2}})^{-4}]^{-\frac{1}{4}}$,
 $\dots\dots\dots (11)$

$I(A, \xi)$ は、 ξ が十分小さいときと大きいときの値に対して、漸近理論による解析と数値積分を行って計算し、その値を内挿補間して求める。具体的には、以下の表記になっている。

$$I(A, \xi) \approx \gamma(Re, \xi) [I_{short}^{-1}(A, \xi) + I_{long}^{-1}(A, \xi)]^{-1} \quad \dots (12)$$

ここで、
$$I_{short}(A, \xi) \approx \frac{I_0(A)}{1 + (45.12 \xi^{\frac{1}{2}} + \xi)/I_0(A)}, \quad (\xi \rightarrow 0)$$

$$I_{long}(A, \xi) \approx \frac{1}{2A^{\frac{3}{2}} \xi^2}, \quad (\xi \rightarrow \infty)$$

$$I_0(A) \approx \left[(3\pi)^{-2.6} + \left(\frac{19.264^{-1/6}}{1 + 0.76314^{-1/6} / (1+A^{-1/3})} \right)^{-2.6} \right]^{-\frac{1}{2.6}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(12)中の修正係数 γ は、次の様に近似される。

$$\gamma(Re, \xi) \sim [\max(0.32 Re^{1.2961}, 1)]^q \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、

$$q = \exp\{-[\log_{10}(\xi) - \log_{10}(4.1204 Re^{-1.3158})]^2\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

この積分核の表記は非常に複雑なため、実際の気泡流数値計算モデルに組み込むことを考えた際、有用でないように見える。ここでは、Meiらの積分核を持つ履歴力を入れた場合と、履歴力の影響の無い場合について、式(8)を数値的に積分し、フリースリップ球形気泡の直接数値計算との比較を行った。式(8)の、抗力係数(C_D)については、Meiら[7]の数値計算結果より得た式、および Levich[8]、Moore[9]の理論解を用いた。それぞれの表記を以下に与える。

Meiらの式(気泡)：

$$C_D = \frac{24}{Re} \left\{ \frac{2}{3} + \left[\frac{12}{Re} + 0.75 \left(1 + \frac{3.315}{Re^{0.5}} \right) \right]^{-1} \right\} \quad \dots (16)$$

Levichの式： $C_D = \frac{48}{Re} \quad \dots\dots\dots (17)$

Mooreの式： $C_D = \frac{48}{Re} \left(1 - \frac{2.2}{Re^{0.5}} \right) \quad \dots\dots\dots (18)$

Fig.1に各抗力係数の比較を示す。ここで、式(17)、(18)について触れておく。これら2つの式の注目すべき点は、これらが高 Re 数で成り立つ理論解であることである。Levichの式(17)は、球周りにポテンシャル流の解を想定し、エネルギー散逸の理論より求めた値である。ダランベールのパラドックスとして知られているように、ポテンシャル流中に存在する球に関して、球表面の圧力を積分しても抗力は、ゼロとなる。しかし、Levich[8]は、定常状態で物体に働く抗力による仕事は、流体内部で粘性により散逸されるエネルギーに等しくなる事実を用い、式(17)の表記を得た。さらに、Moore[9]は、気泡表面に存在する境界層内でのエネルギー散逸まで考慮して式(18)を求めた。すなわち、Mooreの式は、Levichの解よりも高次の近似解である。Moore[9]により解析された気泡表面の境界層の様子を**Fig.2**に示す。この図で注目すべき点は、境界層(Boundary Layer)と伴流(Wake)との間に摂動解の接合領域(Matching Region)が、存在することである。この領域の存在により Re 数無限大の極限で、気泡近傍に存在する境界層や伴流域が無限小となり気泡周りの流れは、ポテンシャル流れとなる。この様な、理論解析は、剛体球の場合には通用しない。なぜならば、剛体球の場合に

Fig.1 Comparison of drag coefficients

Fig.2 Boundary layer and wake region around a bubble analysed by Moore[9]

は、物体近傍の境界層内で渦度の生成が大きく、伴流と境界層の摂動解の接合領域が存在しないためである。これは、十分下流の伴流と物体近傍の境界層との間に他の解が存在しうることを示唆しており、実現現象としては、これが剥離として観測される。以上の理論的背景に基づき、実際にこれらの表記がどの程度有効であるか調べるため、式(8)の C_D 値とし、式(17),(18)を用いた。ちなみに、終端速度は、 C_D 値が等しければ一致するのは当然であるが、式(8)の積分の際に用いられる C_D 値は、瞬時流速による Re 数で決定されることに注意する必要がある。すなわち、終端速度による C_D 値が等しくても、瞬時 Re 数0から終端 Re 数に至るすべての領域で、 C_D 値が一致しない限りは、非定常運動は厳密には一致しない。

実際の計算は、終端速度による気泡 Re 数($Re = 2R_0 U_\infty / \nu$)が、0から200の範囲の気泡について行った。この Re 数の範囲で、静止流体中を上昇する気泡は、ほぼ球形を保つ。また、計算に用いられる諸量は、気泡半径、終端速度、液相の密度により無次元化を行った。

Fig.3(a)～(d), Fig.4(a)～(c)に、気泡の運動方程式と直接数値計算の結果の比較とを示す。まず、終端速度についてであるが、Meiらの抗力係数を用いた場合の終端速度が、本計算結果とすべてのケースで良い一致を示しているのがわかる。Meiらの抗力係数は、気泡の速度をステップ状に変化させた場合の数値計算結果より得たものであるため、定常状態において良い一致を示すのは、本計算結果の精度を保証するものである。Mooreの抗力係数を用いた結果をCase4～7, Levichの抗力係数の結果をCase5～7に示したが、どちらも Re 数の増加とともに数値計算結果に近づいてくる。特に、高次の近似解であるMooreの抗力は、Fig.1のMeiの抗力係数との比較からもわかるが、 Re 数50以上で数値計算結果と良い一致を示す。

次に、履歴力について調べる。Case1,2より、 Re 数=2,5のときには履歴力の影響が無視できないことがわかる。この場合には、Meiら[7]の履歴力の表記が気泡に働く履歴力を精度良く再現しているのがわかる。しかし、 Re 数の増加とともに、Case3,4にあるように、Meiらによって与えられた履歴力を含んだ解は、直接数値計算結果と合わなくなる。これは、Meiらによって与えられた履歴力の項は、球形気泡周りの流れ場のステップ状の変化に対して与えられた表記であり、現在計算を行っているような、浮力の影響で徐々に加速していく様な系とは異なるためであると考えられる。即ち、Meiらの計算の場合には、初期に δ 関数型の無限大の加速度を持った後、加速度無しの状態を保つ。これに対し、本計算では、初期に浮力と付加質量力の釣り合った有限な加速度を持ち、その後、終端速度に達するまで加速度運動を続ける。気泡の運動が式(8)のような力の線形和で表されるとの仮定のもと、履歴力の積分核を得るためには、Meiらの様に速度のステップ状の変化、即ち、加速度の δ 関数的変化を利用する。しかし、これにより求めた積分核の表記が、あらゆる種類の加速度運動に対して成立するのは、もとの支配方程式が

線形であり、式(8)のような力の分離が可能の場合である。現在の計算では、支配方程式として非線形のNavier-Stokes(N.S.)方程式を用いており、Meiらの積分核を用いたモデル方程式の計算結果が、現在の直接計算結果と一致しないのは、そのためであると考えられる。

Case5～7には、履歴力を含めた場合を示さなかったが、この履歴力の影響は、この後、 Re 数の増加とともに直接数値計算の結果と合わない方向に大きく出始める。これに対して、注目すべき点は、 Re 数の増加とともに、直接数値計算の結果が、履歴力を含んでいない気泡の運動方程式の解に漸近していくことである。特に Re 数 50以上の場合には、履歴力の影響は殆ど現れていない。 Re 数 50以上で静止流体中を上昇する球形気泡の挙動が、

$$\frac{1}{2} \rho_l V_b \frac{dU}{dt} = \rho_l V_b g - \frac{C_D}{2} \pi R_0^2 \rho_l U^2 \quad \dots\dots (19)$$

という履歴力無しの簡単な形で精度良く近似できることは、気泡流数値計算モデルの構築の観点から、非常に有益な結果である。一般に履歴力の項は、その気泡の履歴を情報として記憶させなくてはならない。そのために、履歴力を伴う場合には、コンピュータ上により多くのメモリーを必要とし、さらに履歴力の項を計算するために各気泡ごとに積分を行わなくてはならない。この一連の操作は、コンピュータに対する計算負荷の観点から、気泡流数値計算モデルにおいて取り扱える気泡の個数により厳しい制限を与えるものである。工学的に問題となる多くの場合に気泡 Re 数が、 $O(100)$ であることを考慮すると、気泡の運動方程式として履歴力を含まない形式を用いても、多くの場合に十分な精度が保たれると考えられる。

ここで、付加質量力について述べる。加速初期においては、浮力と付加質量力が釣り合う。式(8)の付加質量力の係数 $1/2$ は、線形の方程式を用いた理論解析より得られるものであり、非線形のN.S.方程式より得られた値ではない。したがって、本計算のような直接計算の場合、実際の付加質量係数の値は定かでない。しかし、Fig.3,4の結果よりわかるように、どの Re 数においても加速初期の比較的長い時間スケールで、気泡の運動方程式と本計算結果が良い一致を示していること、及び履歴力無し、付加質量係数 $1/2$ を用いた結果が、Case5, 6, 7で直接数値計算結果と非常に良い一致を

示すことより、中間 Re 数域においても気泡の付加質量係数 $1/2$ が妥当な値であると考えられる。

(a) Case1 $\mu = 1.0$, $g = 3.5$ ($Re=2$)

(b) Case2 $\mu = 0.4$, $g = 1.6$ ($Re=5$)

(c) Case3 $\mu = 0.2$, $g = 0.91$ ($Re=10$)

(d) Case4 $\mu = 0.1$, $g = 0.53$ ($Re=20$)

Fig.3 Comparison of the numerical results and models (Free-slip bubble, $Re=2-20$)

(a) Case5 $\mu = 0.04$, $g = 0.25$ ($Re=50$)

(b) Case6 $\mu = 0.02$, $g = 0.14$ ($Re=100$)

(c) Case7 $\mu = 0.01$, $g = 0.083$ ($Re=200$)

Fig.4 Comparison of the numerical results and models (Free-slip bubble, $Re=50-200$, without history force)

3.3 不純物を含む液体中を上昇する気泡の場合

前節は、自由界面を持つ気泡に関してであったが、一般に液中にある気泡は、液中に含まれる微小な不純物の影響で、剛体球の様に振る舞うと言われている[10]. 不純物の影響に関しては、明らかになっていないが、ここでは剛体球のように振る舞うという知見より、気泡表面にノンスリップの境界条件を課し、計算を行った. 剛体球に働く履歴力としては、上述した低 Re 数で働くBasset力が有名である. ここでは、履歴力として、Basset

力の他にMei[11]によって提案されている次の積分核の表記を用いて、気泡の運動方程式を数値積分し、直接数値計算の結果と比較を行う.

$$K(t-\tau) \approx \left[\left(\frac{\pi(t-\tau)\nu}{R_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{\pi}{2} \frac{u^3}{R_0 \nu f_H^2(Re)} (t-\tau)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-2} \quad \dots\dots (20)$$

ここで、

$$f_H(Re) = 0.75 + 0.105Re, \quad \dots\dots (21)$$

気泡の場合の積分核の表記、式(10)-(15)では、各項の持つ意味が理解しづらい. だが、剛体球の式(15)では、各項の持つ意味が見やすい. まず、右辺第1項は、Basset核に等しく、粘性による渦度の拡散過程のみを考慮している. 右辺第2項は、ややわかり難いが、対流の影響による伴流内の非定常な運動量欠損に関係する項と考えられる. 式(20)は、これら2つの量の内挿補間により表記されている.

Fig.5(a)~(d)にノンスリップの境界条件を課したときの計算結果を示す. 図のCase1, 3, 5, 7は、Fig.3,4のCase1, 3, 5, 7と物性値を等しくとっている. フリースリップ気泡の場合に、終端速度が1になるように条件を設定しているが、同条件でノンスリップの境界条件が課される場合には、抵抗が増加し、終端速度が小さくなる. 従って、物性値は同じでも Re 数は異なる結果となる. まず終端速度についてであるが、Mei[11]は、フリースリップ気泡と同様の手法により剛体球に関して、数値計算を行い、抗力に関して、次の表記を与えた.

Meiの式(剛体球):

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right), & Re \leq 0.01 \\ &= 1 + 0.1315 Re^{(0.82 - 0.05 \log_{10} Re)}, & 0.01 < Re \leq 20 \\ &= 1 + 0.1935 Re^{0.6305}, & 20 < Re \leq 260 \\ &\dots\dots (22) \end{aligned}$$

Fig.5のすべてのケースに関して、フリースリップ気泡同様、直接数値計算の結果が、この式により計算される終端速度に漸近していくのがわかる. ただし、ノンスリップ気泡の場合、フリースリップ気泡と比べ、履歴力の影響が大きいいため、定常

状態へ到達するのに時間がかかる。本計算では、時間 $t=20$ までしか計算を行っていないが、この時点ではまだ十分に定常状態へ達していない。ここで、時間は、同条件におけるフリースリップ気泡の終端速度と気泡半径で無次元化されている。付加質量係数についても、フリースリップ気泡の場合と同様、加速初期において、 $1/2$ が妥当な値であることがわかる。

次に履歴力について調べる。Fig.5(a)より $Re=1.3$ では、履歴力の影響は、Basset力とMeiの力の間の大きさであることがわかる。Basset力は、低 Re 数で有効な表記であり、履歴力の影響は、粘性による過度の拡散過程であることを考えると、 $Re=1.3$ でBasset力による計算が、直接計算の結果より履歴力の影響を強く受けていることは理解できる。実際、Basset力による計算結果は、 Re 数の増加とともに誤差を大きく生み出していくのが、図からもわかる。これに対し、Meiらにより提案されている力は、低 Re 数でやや誤差が大きいものの、 Re 数の増加とともに、直接数値計算結果に近づいていく。Meiらの、剛体球に対する履歴力の表記は、気泡の場合の式に比べ、はるかに簡潔であり、気泡流数値計算モデルへ組み込むことが十分可能である。履歴力の影響に関しては、自由界面を持つ気泡の場合とは異なり、 Re 数 86.7のときにも無視できない。これは、自由界面からの過度の生成と、剛体壁での過度の生成は、そのオーダーが異なることに起因しているためと考えられる。即ち、ノンスリップの境界条件が課される気泡では、界面で過度の生成が大きく、過度の拡散過程である履歴力は、大きく働くようになる。

Fig.6, Fig.7に不純物を含む場合と含まない場合について、履歴力を考慮しないことによる誤差の比較を示した。誤差の評価は、気泡の運動方程式(8)を履歴力(F_H)無しで数値積分した結果と、N.S方程式の直接数値計算の結果との差により行った。この際、式(8)の抗力係数として、Meiらの式(式(16)と式(22))を用いたため、終端速度は、すべてのケースにわたり非常に良い一致を示している。図中の○印や△印は、物性値(今の場合、粘性係数と重力加速度)の異なる条件に対応している。横軸は、フリースリップ気泡の終端速度による Re 数で示してある。従って、○印は、左から、Fig.3, 4のCase1~6に対応している。横軸の値が○印と等し

(a) Case1 $\mu = 1.0$, $g = 3.5$ ($Re=1.3$)

(b) Case3 $\mu = 0.2$, $g = 0.91$ ($Re=6.5$)

(c) Case5 $\mu = 0.04$, $g = 0.25$ ($Re=27.3$)

(d) Case7 $\mu = 0.01$, $g = 0.083$ ($Re=86.7$)

Fig.5 Comparison of the numerical results and models (No-slip bubble)

Fig.6 The maximum error of instantaneous velocity

い△印は、同条件におけるノンスリップ気泡の結果に相当する。

Fig.6は、静止状態から終端速度に至る過程で、瞬時速度の違いの最大値を示したものである。即ち、各時刻ごとに気泡の運動方程式と、直接数値計算から得られる上昇速度の差を求め、その最大値を図示したものである。Fig.6より、気泡の瞬時上昇速度の見積もり誤差が、不純物を含む場合に35%~55%と非常に大きいことがわかる。これに対し、不純物を含まない場合は、 Re 数20以上では、10%以下となっている。また、いずれの場合も低レイノルズ数において、履歴力の影響が大きいのが、この図からもわかる。

Fig.7は、瞬時速度の見積もり誤差を、無次元時間 $t=20$ まで積分した結果であり、位置の見積もり誤差を表している。図より、Fig.6同様、不純物を含む場合の方が、誤差が大きいのがわかる。終端速度への到達時間は、各条件により異なるため、Fig.6の瞬時速度の見積もり誤差が大きいからといって、その積分値の位置の見積もり誤差が大きくなるとは限らない。しかし、履歴力は、瞬時速度を下げるだけでなく、終端速度への到達時間も遅らせるため、瞬時速度の時間積分値である位置の見積もり誤差は、履歴力の影響が大きいノンスリップ気泡の方が大きくなる。

不純物を含まないフリースリップ気泡の場合、低 Re 数のときに履歴力の影響により誤差が大きく

Fig.7 The error of the estimated position

なる傾向も、Fig.6と同様である。しかし、終端速度に到達するまでの無次元時間は、低 Re 数のときの方が短いため(Fig.3~5参照)、瞬時速度の誤差の積分値である位置の誤差は、不純物を含む場合には、 Re 数依存性が顕著でない。この場合には、位置の見積もり誤差は、 Re 数に寄らず、ほぼ一定な値(1.4~1.6)を示す。

4. 結言

静止流体中を上昇する球形気泡の非定常上昇運動に関して数値計算を行った。そして、計算結果を、理論解析より提案される気泡の並進運動を表す式と比較し、履歴力、付加質量力、定常抗力等の各項を評価した。その結果として、以下の知見を得た。

(1) Meiら[7, 11]による球形気泡および剛体球の抗力係数の表記は、本計算結果と良好な一致を示し、その有効性が確認された。

(2) 付加質量係数1/2は、 Re 数0~200の中間 Re 数で上昇する気泡の非定常運動においても妥当な計算結果を与える。

(3) きれいな液体中を上昇する気泡では、履歴力の影響は小さく、 Re 数50以上でその影響は無視し得る。従って、気泡流数値計算モデルで取り扱う気泡の並進運動モデル(式(8))として、液体に不純物を含まない場合、履歴力を含めない表記を推奨する。

(4) 不純物を含む液体中を上昇する気泡では、履歴力の影響は無視できない。

(5) Basset核による履歴力の表記は、 Re 数の増加とともに履歴力を過大に評価し、粒子(気泡)の運動方程式の精度を落とす原因になる。

(6) Mei[11]による履歴力の表記は、剛体粒子の非定常運動に対して良好な計算結果を与える。従って、不純物を含む液体中の気泡流の挙動を解析する際、気泡運動の非定常性が重要となる系では、剛体粒子に対するMeiの履歴力を含めることを推奨する。

Nomenclature

C_D	: Drag coefficient
dS	: Surface element on bubble
g	: Acceleration due to gravity
h_ξ, h_η	: Scale factor
$K(t - \tau)$	: History force kernel
n_i	: Unit normal vector on bubble surface
p	: Pressure
r	: Horizontal direction
R_0	: Bubble radius
Re	: Reynolds number ($=2 R_0 U/\nu$)
t	: Time
T_{fi}	: Total force acting on bubble
u_ξ, u_η	: Velocity component in calculation space
u_i	: Cartesian component of velocity
U, U_i	: Instantaneous rising velocity
U_∞	: Terminal velocity
V_b	: Volume of a bubble
x	: Gravitational direction

(Greek letters)

β	: Relaxation parameter
δ_{ij}	: Kronecker delta
ξ, η	: Coordinate in calculation space
μ	: Viscosity of liquid
ν	: Kinematic viscosity of liquid
ρ_l	: Density of liquid
ρ_g	: Density of gas
τ_{ij}	: Stress tensor on bubble surface

参考文献

- [1] Esmaeeli, A., Ervin, E. and Tryggvason, G., Proc. IUTAM Symp. on Bubble Dynamics and Interface Phenomena, 247-255(1994).
- [2] 富山 明男ら, 機論, **60-576B**, 2678-2685(1994).
- [3] 高木 周, 松本 洋一郎, 黄 華雄, 機論, **61-586B**, 1976- 1983(1995).
- [4] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., Fluid Mechanics, Pergamon(1959).
- [5] Basset, A.B., A Treatise on Hydrodynamics, Dover Pub(1888).
- [6] Yang, S.M. and Leal, L.G., Phys. Fluids A **3**, 1822-1824(1991).
- [7] Mei, R, Klausner, J.F., and Lawrence, C.J., **6**, 418-420(1994).
- [8] Levich, V.G., Zh. Eksp. Teor. Fiz. **19**, 18(1949).
- [9] Moore, D.W., J.Fluid Mech. **16**, 161-176(1963).
- [10] Clift, R., Grace, J.R. and Weber, M.E., Bubbles, Drops, and Particles, Academic Press(1978), p171.
- [11] Mei, R., Int. J. Multiphase Flow, **19**, 509-525 (1993).