用語の解説

キャビテーションと気泡力学に関する用語*

Comments on the Technical Terms for Cavitation and Bubble Dynamics

高比良 裕之**

TAKAHIRA Hiroyuki

液体中の圧力が、その温度における飽和蒸気圧程度まで低下すると、気泡が発生する。この現象およびその後の諸過程をキャビテーションと呼ぶ。キャビテーションは、古くから水力機械の性能を考える上で、重要な研究課題となっているが、昨今、キャビテーションは、こうした工学的問題に限らず、物理・化学・医学の分野でも様々な話題を提供している。本報では、キャビテーションに関連したいくつかの用語の説明を行うとともに、気泡力学で用いられる代表的な単一運動方程式を紹介する。

1. キャビテーション [1-4]

キャビテーションは、液体の加速によって局所的に圧力の低下が起こり、液相から気相への相変化を伴って気泡が形成される現象である。これに類似の現象として、沸騰 (Boiling) と脱気 (Degassing または Aeration) がある。沸騰とキャビテーションは、ともに液相から気相への相変化により気泡が形成されるという点で物理的には同じ現象と言える。しかし、工学的には、沸騰が比較的高温下での気泡形成であり主として熱的条件に支配されているのに対して、キャビテーションは常温付近で圧力低下という力学的な条件に支配されている点で、両者は区別される。一方、脱気とキャビテーションは、ともに減圧により気泡が生じるためよく混同されるが、脱気の場合、気泡の形成が気体分子の拡散に起因することが両者の相違である。ただし、キャビテーションの場合、微小な空気泡がキャビテーション発生の核になることが多いので、両者を明確に区別することは困難で、実際、英語でも、Vaporous Cavitation (蒸気キャビテーション)、Gaseous Cavitation (ガスキャビテーション) と脱気をキャビテーションの一部に含めてしまうこともある [1]。

2. キャビテーションの分類

まず、Knapp によるキャビテーションの分類を紹介する [1-3]。

- (a) **トラベリング・キャビテーション (Traveling cavitation)**
数が少なく比較的大きな気泡が、物体の表面近くを主流に乗って流れていくもの。
- (b) **フィックスド・キャビテーション (Fixed cavitation)**
一つの大きなキャビティが、物体表面についていて、見かけ上、動かないように見えるもの。
- (c) **ボルテックス・キャビテーション (Vortex cavitation)**
渦の中心の低圧部に発生するキャビテーション。
- (d) **バイブラトリー・キャビテーション (Vibratory cavitation)**
超音波振動子の表面にできるキャビテーションなどがその例で、巨視的な流れがなく、振動子の動きに従って、気泡の成長・崩壊が繰り返される。音響キャビテーション (Acoustic cavitation) とも呼ぶ。

** 1997.2.12 受付

** 大阪府立大学工学部 〒593 堺市学園町 1-1.
TEL (0722)52-1161

次に、船用プロペラにおいて用いられる分類を示す [1]。

(1) チップ・ボルテックス・キャビテーション (Tip vortex cavitation)

プロペラの翼端から流出している自由渦の低压部に発生するヒモ状のキャビテーション。この種のキャビテーションは安定で、場合によってはずっと下流まで螺旋状にのびているものが観測される。

(2) シート・キャビテーション (Sheet cavitation)

Knapp の分類 (b) のフィクスト・キャビテーションに相当する。翼の前縁付近から発生する膜状のキャビテーションで、迎角が大きく翼前縁付近に大きな負圧のピークがある時に発生する。

(3) バブル・キャビテーション (Bubble cavitation)

Knapp の分類 (a) のトラベリング・キャビテーションに相当する。気泡状のキャビティが翼面上で成長し、崩壊するもの。

(4) クラウド・キャビテーション (Cloud cavitation)

シート・キャビテーションが急激に崩壊し、無数の小さなキャビティ群になることがあり、それが雲状に見えることからこのように呼ばれる。

(5) ルート・キャビテーション (Root cavitation)

たとえ伴流がゼロで一様な流れの中で作動していても、1 回転中にプロペラに流入する流れは変動する。その際、プロペラ翼を取り付けたボスの部分も変動する流れにさらされるため、フィレット部分にキャビテーションが発生することがある。これをルートキャビテーションと呼んでいる。

3. キャビテーション数 (Cavitation number)

キャビテーションは、液体圧力がその温度における飽和蒸気圧程度まで低下すると発生する。その際、キャビテーションが発生する限界の状態では、物体表面の最小圧力点付近に小さな気泡が見える。このような状態をキャビテーションの初生 (Inception または Initiation) という。キャビテーションの初生は、液体の局所的な静圧に依存することから、その指標となる無次元数として、以下に示すキャビテーション数 (キャビテーション係数とも呼ぶ) を用いる。

$$k_d = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (1)$$

ここで、 p_v は飽和蒸気圧、 p_∞ および U_∞ はそれぞれ無限遠方における圧力ならびに速度、 ρ は液体の密度である。この式からわかるように k_d が小さいほどキャビテーションは発生しやすくなる。

また、ポンプなどでは同様な無次元数として、トーマのキャビテーション数がある。

$$k_T = \frac{NPSH}{H} \quad (2)$$

ここで、 $NPSH$ は有効吸い込みヘッド、 H は全揚程を表わしており、 $NPSH$ は次式で与えられる。

$$NPSH = H_a - H_s - H_{loss} - H_v \quad (3)$$

ここで、 H_a は大気圧ヘッド、 H_s は吸入ヘッド、 H_{loss} は損失ヘッド、 H_v は蒸気圧ヘッドを表わしている。なお、キャビテーション数を表す記号として、通常 σ 、 K 、 k などがよく用いられる。

4. 気泡の運動方程式

用語と関連して、キャビテーション気泡の支配運動方程式を示す。紙面の都合上、もっとも基礎となる単一気泡の運動方程式の紹介にとどめる。

4.1 Rayleigh-Plesset の式

単一球形気泡の運動方程式に限っても、いくつかの式が導かれているが、もっとも簡単なものは、Rayleigh-Plesset の式と呼ばれる非圧縮性流体中での球形気泡の運動方程式である [5,6]。これは、ラプラス方程式を速度連続の境界条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \dot{R} \quad (4)$$

圧力の釣り合いに関する境界条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 = -\frac{1}{\rho} \left(-p_\infty + p_B - \frac{2\sigma}{R} \right) \quad (5)$$

のもとで解くことにより得られる。ここで、 φ は速度ポテンシャル、 R は気泡半径、ドットは時間微分、 p_B は気泡内の圧力、 σ は表面張力係数を表わしている。

$$p_w = p_B - \frac{2\sigma}{R} \quad (6)$$

と定義すると、 p_w は気泡表面での液体圧力を表わしていることがわかる。最終的に得られる運動方程式は次式で与えられる。

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} \left(-p_\infty + p_B - \frac{2\sigma}{R} \right) \quad (7)$$

式(7)は、最初Rayleighにより、空洞気泡(Cavity)の崩壊および内部気体が等温圧縮する場合の気泡の問題に対して導かれ[5]、その後、Plessetによる改良が施された[6]。そのため、この方程式ならびに後述する液体の粘性の効果の項を考慮した式は、Rayleighの式、一般化したRayleighの式[7]、Rayleigh-Plessetの式[4]、または一般化したRayleigh-Plessetの式[4]などと呼ばれている。私見では、式(7)で表面張力の項がない場合がRayleighの式、表面張力の項がある場合がRayleigh-Plessetの式、粘性項まで含めた場合が一般化したRayleigh-Plessetの式と呼ぶのが妥当だと思うが、著者が調べた範囲内ではこれらの名称の使い分けは必ずしも明確ではない。

さて、式(7)を解くには気泡内部の圧力 p_B を与えればよい。内部気体の圧力の与え方には、いくつか考えられる。最も簡単には、内部圧力を一定とすればよい。この仮定は、気泡内の溶存ガスを無視し、気泡内には蒸気のみが入っているとした場合の気泡の運動を扱う際によく用いられる。この仮定は、蒸気の凝縮速度が気泡の収縮速度よりも十分速い場合には有効である。しかし、気泡の収縮速度が速くなると、蒸気の凝縮が追いつかず、蒸気は非凝縮性の気体のように圧縮され、内部圧力は上昇する[8]。また、気泡内部には非凝縮性の気体が入っているものとし、それがポリトロップ変化するとして、以下のように内部圧力を与えることも可能である。

$$p_B = p_{g0} \left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^{3\gamma} \quad (8)$$

ここで、 R_0 は初期半径、 p_{g0} は気泡内の気体の初期圧力、 γ はポリトロップ指数を表している。しかし、実際の気泡の挙動を、一つのポリトロップ指数で表現することには限界があり、より厳密には気泡内の圧力を、以下に示す気体の支配方程式から解く必要がある[9,10]。

$$\dot{p}_g = \frac{3}{R} \left[(\kappa - 1) \lambda_g \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} - \kappa p_g \dot{R} \right] \quad (9)$$

ここで、 T は温度、 κ は気泡内気体の比熱比、 λ_g は気体の熱伝導率を表している。詳細は省略するが、式(9)は、気泡内の気体圧力が空間的に一様という仮定のもとで、理想気体の状態方程式を用いて、気体の質量保存、エネルギー保存式を

変形することにより導出される。式(9)を計算するには、気液界面での気体の温度勾配を求める必要があるが、これは気体および液体のエネルギー方程式を解かないとわからない。さらに厳密に内部圧力を扱うには、気液界面での蒸発・凝縮に伴う熱・物質の移動、拡散の効果等を考慮する必要があるが、この詳細については文献[8,11]を参照されたい。

4.2 中立安定条件

いま、気泡内には蒸気と非凝縮性の気体が入っているものとし、

$$f = -p_\infty + p_w \quad (10)$$

とおくと、 $f < 0$ ならば気泡は収縮し、 $f > 0$ ならば成長する。 $f = 0$ は気泡の内と外の圧力が釣り合っていることを表しており、この点での安定性を考えると、 $df/dR < 0$ のとき安定で、 $df/dR > 0$ のとき不安定であることがわかる。 $df/dR = 0$ は中立安定の条件であり、この時の気泡半径 R_c は、蒸気圧 p_v が一定で、非凝縮性気体が等温変化すると仮定すると、

$$R_c = \frac{-4\sigma}{3(p_\infty - p_v)} \quad (11)$$

と与えられる。

4.3 気泡の崩壊時間

式(7)で、 $p_B = 0$ 、 $\sigma = 0$ の場合の空洞気泡の崩壊問題(気泡周囲の液体圧力が $0 \rightarrow p_\infty$ にステップ状に上昇したことに相当)を考える。いま、時間、長さ、圧力に関して、それぞれの代表量を $R_0\sqrt{\rho/p_\infty}$ 、 R_0 、 p_∞ とし、式(7)を無次元化すると以下の式が得られる。

$$R_* R_*''^2 + \frac{3}{2} R_*'^2 = -1 \quad (12)$$

ここで、 $*$ は無次元量を、 $'$ は無次元時間に関する微分を表している。式(12)を積分し、半径が零になるまでの無次元時刻 τ_* を求めると、 $\tau_* = 0.91468$ となる。したがって、気泡が消滅するまでの時間は、初期半径に比例し、気泡に加えられる圧力上昇の平方根に反比例することがわかる。

4.4 固有振動数

次に、蒸気圧は一定、気泡内気体がポリトロップ変化する場合に式(7)から導かれる気泡の固有振動数を示す。気泡の固有振動数は、気泡の振動が微小であるとし、以下のように近似し

$$R = R_0(1 + x), \quad x \ll 1 \quad (13)$$

式(7)を x に関して線形化することにより得られる。平衡条件から得られる次の関係式を用いると

$$p_{g0} = p_{\infty} - p_v + \frac{2\sigma}{R_0} \quad (14)$$

気泡の固有振動数 f_0 は、次のように与えられる。

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho R_0^2} \left\{ 3\gamma(p_{\infty} - p_v) + \frac{2\sigma(3\gamma - 1)}{R_0} \right\}} \quad (15)$$

4.5 液体の粘性の効果

球形気泡の場合、液体の粘性を考慮するのは容易である。単一球形気泡の場合、流れは渦なしであるから、粘性の効果は境界条件にのみ現れることになる。したがって、境界条件式(5)を応力の釣り合いの条件に変えればよい。このとき、気泡表面での液体圧力は以下のように与えられる。

$$p_w = p_B - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu\dot{R}}{R} \quad (16)$$

ここで、 μ は液体の粘性係数を表している。

4.6 液体の圧縮性の効果

気泡の崩壊過程で、気泡の収縮速度が、液体の音速に近づくと、液体の圧縮性の効果が無視できなくなる。液体の圧縮性の効果を考慮した運動方程式には多数のタイプが存在するが、Prosperettiら[12]により、いくつかのタイプの方程式を包含した方程式が導出されているので、それを紹介する。液体の音速を a_{∞} とすると $\varepsilon = \dot{R}/a_{\infty}$ の一次のオーダーまで正しい運動方程式は

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - (\Lambda + 1) \frac{\dot{R}(t)}{a_{\infty}} \right\} R(t) \ddot{R}(t) \\ & + \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left(\Lambda + \frac{1}{3} \right) \frac{\dot{R}(t)}{a_{\infty}} \right\} \dot{R}^2(t) \\ & = \left\{ 1 + (1 - \Lambda) \frac{\dot{R}(t)}{a_{\infty}} \right\} \left\{ h_w(t) - \frac{p_s(t)}{\rho_{\infty}} \right\} \\ & + \frac{R(t)}{a_{\infty}} \frac{d}{dt} \left\{ h_w(t) - \frac{p_s(t)}{\rho_{\infty}} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

と書ける。ここで、 $p_s(t)$ は、気泡が存在しない時の気泡中心位置における液体圧力の(p_{∞} からの)変動分を表しており、例えば、振幅 p_a 、振動数 ω_d の正弦波状の変動の場合には、 $p_s(t) = p_a \sin \omega_d t$ とおけばよい。 h_w は気泡表面と無限遠方とのエンタルピーの差を表しており、

$$h_w = \int_{p_{\infty}}^{p_w} \frac{dp}{\rho} \doteq \frac{p_w - p_{\infty}}{\rho_{\infty}} + O(\varepsilon^2) \quad (18)$$

と近似すると、圧力表示の運動方程式が得られる。また、 Λ は $O(1)$ の任意定数であり、 Λ の値を変えることによりいくつかの代表的な運動方程式が導かれる。 $\Lambda=0$ のときにKeller型の運動方程式[13]が、 $\Lambda=1$ のときにHerring型の運動方程式[14,15]が得られる。これまでに行われた単一球形気泡に関する解析によると、Herring型の式よりもKeller型の式の方が精度がよく、圧力項で表された式よりもエンタルピー項で表された式の方が精度がよいことを報告されている。なお、式(17)で圧力表示を用い、 $a_{\infty} \rightarrow \infty$ とすると、式(7)が得られる。

このほかにも、式(17)を拡張し、 ε の二次のオーダーまで正しい方程式[16]などが導出されているが、この詳細は文献を参照されたい。

謝 辞

本報を執筆するにあたり、東京大学工学系研究科教授 加藤洋治先生の著書[1]からいくつかの箇所を引用させていただいた。引用を許可してくださった加藤先生に感謝致します。

参考文献

- [1] 加藤, キャビテーション (増補版), 横書店, (1990).
- [2] Knapp, R. T., Daily, J. W. and Hammitt, F. G., *Cavitation*, McGraw-Hill Book Company, (1970).
- [3] 山崎, キャビテーション工学, 日刊工業新聞社, (1978).
- [4] Brennen, C. E., *Cavitation and Bubble Dynamics*, Oxford University Press, (1995).
- [5] Rayleigh, Lord, *Phil. Mag.*, Vol. 34, 94-98, (1917).
- [6] Plesset, M. S., *J. Appl. Mech.*, Vol. 16, No. 3, 277-282, (1949).
- [7] Plesset, M. S. and Prosperetti, A., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 9, 145-185, (1977).
- [8] Fujikawa, S. and Akamatsu T., *J. Fluid Mech.*, Vol. 97, 481-512, (1980).
- [9] Prosperetti, A., Crum, L. A. and Commander, K. W., *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 83, No. 2, 502-514, (1988).
- [10] 高比良, 機論 B, Vol. 61, No. 592, 4241-4248, (1995).
- [11] Matsumoto, Y. and Beylich A. E., *J. Fluid Eng., Trans. ASME*, Vol. 107, No. 2, 281-286, (1985).
- [12] Prosperetti, A. and Lezzi, A., *J. Fluid Mech.*, Vol. 168, 457-478, (1986).
- [13] Keller, J. B. and Miksis, M., *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 68, No. 2, 628-633, (1980).
- [14] Herring, C., *Columbia Univ. NDRC Rep.*, C-4-sr10-010, (1941).
- [15] Trilling, L., *J. Appl. Phys.*, Vol. 23, No. 1, 14-17, (1952).
- [16] Lezzi, A. and Prosperetti, A., *J. Fluid Mech.*, Vol. 185, 289-321, (1987).