流砂および流砂を伴う流れの力学*

(2. 掃流状集合流動)

Mechanics of Sediment Transport and Sediment Laden Flows

(2. Sediment Gravity Flow)

江 頭 進 治

EGASHIRA Shinji

第1回目は土石流の力学に関する研究成果について解説した。ここでは、それに引き続き掃流状集合流動あるいは土砂流と呼ばれている流れについて解説する。土石流の解説[1]において勾配がある限界値よりも大きい場合には、砂礫と水との混合物の流れは、巨視的には水と砂礫とは一体になって流れるが、勾配が限界値よりも緩くなると、自由水面近傍には砂礫を含まない水の流れが形成される。このような流れを土砂流あるいは掃流状集合流動と呼んでいる。したがって、一流体モデルによる解析においては、上層の流れは通常の清水流の応力モデルが適用でき、下層の流れには、土石流のものが直接適用できる。なお、以下の議論は、あくまで平均流に関するものである。

1. 支配方程式と構成則

1. 1 支配方程式

簡単のため、一次元流れ、かつ定常等流場を対象とする。Fig. 1 は、このような流れを模式的に示したものである。すると、前報[1]で示した運動量保存則 (式(2))、およびエネルギー散逸率 (式(6)) はそれぞれ次のように簡略化される。

$$\rho_m b_x + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_m b_z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\Phi = \tau \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3)$$

ここに、 b_x 、 b_z は重力の x 、 z 成分であり、 $b_x = g \sin \theta$ 、 $b_z = -g \cos \theta$ 、 τ はせん断応力、 p は圧力、 u は流速の x 成分、 Φ はエネルギー散逸率、 ρ_m は混合物の密度で次式で与えられる。

$$\rho_m = (\sigma - \rho)c + \rho \quad (4)$$

ここに、 c は砂礫の体積濃度、 σ は砂礫の密度、 ρ は流体(水)の密度である。

1. 2 構成関係式

(1) 下層の領域 ($0 \leq z \leq h_s$)

Fig. 1 に示す流れの下層に着目すると、この領域の流れは水と砂礫との混合物の流れになっている。したがって、この領域のエネルギー散逸は、前回に示した土石流のものと同一機構によって起こっているとみなせば、せん断応力の決定機構も土石流のそれと同じになる。せん断応力に江頭ら[1,2]のものをを用いることにすれば、これは次のようであった。

$$\tau = \tau_y + \tau_d + \tau_f \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= p_s \tan \phi \\ \tau_d &= k_d \sigma (1 - e^2) c^{1/3} d^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \\ \tau_f &= k_f \rho \{ (1 - c)^{5/3} / c^{2/3} \} d^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

* 1997.8.7 受付

** 立命館大学理工学部 〒525-77 草津市野路東1-1-1

TEL(0775)61-2732 FAX(0775)61-2667

Fig. 1 Steady uni-directional uniform sediment gravity flow.

ここに、 τ_y はクーロン型降伏応力、 τ_d は非弾性衝突に伴う応力、 τ_f は粒子に囲まれている間隙領域のレイノルズ応力、 p_s は砂粒子の接触に伴う静的な圧力、 ϕ は砂礫粒子の摩擦角、 e は砂礫同士の反発係数、 d は砂礫の代表粒径、 k_d および k_f は実験定数で、 $k_d=0.0828$ 、 $k_f=0.16\sim 0.25$ である。なお、 τ_f の中にはせん断に伴う純粹の粘性応力も含まれているが、ここの表現では省略している。また、 p については次のようであった。

$$p = p_s + p_d + p_w \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_s}{p_s + p_d} &= \left(\frac{c}{c_*} \right)^{1/n}, \quad (n=5) \\ p_d &= k_d \sigma e^2 c^{1/3} d^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \\ p_w &= \rho g (h_t - z) \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに、 p_s は粒子接触に伴う圧力、 p_d は粒子衝突によって保存されるエネルギーから定まる圧力、 p_w は間隙水の圧力である。

せん断応力および圧力の式に示されるように、このモデルにおいては粒子の乱れ運動、すなわち浮遊は考慮されておらず、流れの場合は、粒子と流体を含む領域のスケールで見た場合には、いわゆる層流場として取り扱われている。

(2) 上層の領域 ($h_s \leq z \leq h_t$)

この領域の流れは、非常にポーラスな固定河床を有する開水路流れにおいて、河床がある速度で移動するとき形成されるような流れに近い。したがって、通常の乱流モデルを用いればかなり精緻な流れの解析ができる。乱流モデルの適用については、この講座の最終回に触れることにし、ここでは、少し泥臭い古典的な取り扱いを紹介する。平均流のエネルギー散逸を議論する場合には、乱

れエネルギーは全て散逸とみなしてもよいので、乱れエネルギーの散逸時間を T とすれば、式(3)は次のように書ける。

$$\tau \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{k}{T} \quad (9)$$

ここに、 k は乱れの運動エネルギーである。散逸時間 T は、散逸空間の大きさを L とすれば、「 $L/\text{乱れ強度}$ 」のように近似でき、さらに $k \sim \rho (L \partial u / \partial z)^2$ として、これらの関係を式(9)に適用すれば、 τ はプラントルの運動量輸送理論のそれと等価になる。すなわち、

$$\tau = \rho L^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \frac{\partial u}{\partial z} \quad (10)$$

圧力については、レイノルズ応力による静水圧からのずれは考慮せず次のように置く。

$$p = p_w = \rho g \cos \theta (h_t - z) \quad (11)$$

2. 断面平均粒子濃度

定常等流状態における砂礫の断面平均粒子濃度は、前回[1]の式(21)と同じ式で評価される。すなわち、式(1)、(2)を任意の z から水面まで積分し、水面における τ 、 p を0とすれば、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_y(z) + \tau_d(z) + \tau_f(z) &= \\ g \sin \theta \int_z^{h_t} \rho \{ (\sigma / \rho - 1) c + 1 \} dz \end{aligned} \quad (12)$$

$$p_s(z) + p_d(z) = g \cos \theta \int_z^{h_t} \rho (\sigma / \rho - 1) c dz \quad (13)$$

$z=0$ においては、 $c(0)=c_*$ であるから、これを式(8)の第一番目の式に代入すれば、 $p_d(0)=0$ となる。すなわち、 $z=0$ では $\partial u / \partial z = 0$ である。これより、 $\tau_d(0)=0$ および $\tau_f(0)=0$ となる。これらのことを考慮し、式(12)、(13)において、 $z=0$ とすれば次式が求められる。

$$\begin{aligned} \tau_y(0) &= g \sin \theta \int_0^{h_t} \rho \{ (\sigma / \rho - 1) c + 1 \} dz \\ &= \rho g \sin \theta \{ (\sigma / \rho - 1) \bar{c} + 1 \} h_t \end{aligned} \quad (14)$$

$$p_s(0) = g \cos \theta \int_0^{h_i} \rho (\sigma / \rho - 1) c dz$$

$$= \rho g \cos \theta (\sigma / \rho - 1) \bar{c} h_i \quad (15)$$

ここに、 $\bar{c} = \int_0^{h_i} c dz / h_i$ である。 $\tau_y = p_s \tan \phi$ であるから、式(14)、(15)より断面平均粒子濃度は次式のようになる。

$$\bar{c} = \frac{\tan \theta}{(\sigma / \rho - 1)(\tan \phi - \tan \theta)} \quad (16)$$

土砂流においては、領域 $h_s \leq z \leq h_i$ において砂粒子は存在しないが、断面平均濃度は土石流の場合と同じ式で表される。また、掃流砂流においても、理論河床から自由水面までの領域の断面平均濃度の推定式は同じ式になる。

次に、領域 $0 \leq z \leq h_s$ における砂粒子の断面平均濃度と流動層厚比 h_s / h_i との関係についてみる。式(14)、(15)において、積分を $0 \sim h_s$ と $h_s \sim h_i$ とに分けて積分すると、

$$\tau_y(0) = \rho g \sin \theta \left[\int_0^{h_s} \{(\sigma / \rho - 1) c + 1\} dz + \int_{h_s}^{h_i} dz \right]$$

$$= \rho g \sin \theta [\{(\sigma / \rho - 1) \bar{c}_s + 1\} h_s + (h_i - h_s)] \quad (17)$$

$$p_s(0) = \rho g \cos \theta \int_0^{h_i} (\sigma / \rho - 1) c dz$$

$$= \rho g \cos \theta (\sigma / \rho - 1) \bar{c}_s h_s \quad (18)$$

ここに、 $\bar{c}_s = \int_0^{h_s} c dz / h_s$ である。上の二つの式より、次の関係が得られる。

$$\frac{h_s}{h_i} = \frac{1}{(\sigma / \rho - 1) \bar{c}_s} \frac{\tan \theta}{\tan \phi - \tan \theta} \quad (19)$$

上式を変形して、流動砂層厚 h_s を粒子径 d を用いて表せば、

$$\frac{h_s}{d} = \frac{1}{\bar{c}_s \cos \theta} \frac{1}{\tan \phi - \tan \theta} \tau_* \quad (20)$$

ここに、 $\tau_* = h_i \sin \theta / \{(\sigma / \rho - 1) d\}$ であり、これは無次元掃流力と呼ばれる。なお、式(19)は、高橋[3]によって導かれた式と同じものである。

上式の $\bar{c}_s$ は、静止堆積層(理論河床面より下層)の砂礫濃度 c_* を用いて $\bar{c}_s = \alpha c_*$ とすれば、 $\alpha = 0.4 \sim 0.5$ と置くことによって近似的に評価できるこ

とが明らかになっている[3,4]。

3. 流速と粒子濃度の鉛直分布

領域 $0 \leq z \leq h_s$ においては、式(5)～(8)を式(1)、(2)に適用すれば、流速と濃度に関する微分方程式が得られる。結果は、前回[1]の式(24)、(25)に同じである。

領域 $h_s \leq z \leq h_i$ においては、プラントルの混合距離を $l = \kappa (z - h_s + \eta_0)$ とおけば、式(10)と式(1)より次式が導かれる。

$$\frac{u(z)}{u_{*w}} = \frac{u_i}{u_{*w}} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z - h_s + \eta_0}{\eta_0} \quad (21)$$

ここに、 u_{*w} は $z = h_s$ の摩擦速度で $\sqrt{g(h_i - h_s) \sin \theta}$ 、 u_i は $z = h_s$ における流速、 κ はカルマン定数、 η_0 は対数則の原点を $z = h_s$ ではなく、これより η_0 だけ下方へとシフトさせた長さである。これを合理的に与えるのは難しいが、立方格子配列の粒子に囲まれた内部の間隙スケールの長さを考えれば、これは次のように表される。

$$\eta_0 = a l_0 = a \sqrt{k_f} \{ (1 - c) / c \}^{1/3} d \quad (22)$$

ここに、 a は補正係数であり、不都合が生じない限り、 $a = 1$ としておく。 k_f は前出(式(6)参照)。

$0 \leq z \leq h_s$ と $h_s \leq z \leq h_i$ における流速を接続するためには、二つの領域の境界 $z = h_s$ の定義が必要である。 $z = h_s$ は、粒子摩擦や粒子衝突による応力が微少になる位置である。ここでは、便宜的に、 $c = 0.05$ となる位置を $z = h_s$ とする。このとき、上述の原点補正值 η_0 は、式(22)に $c = 0.05$ を代入した値である。

ここで、所定の条件、たとえば、勾配 θ 、粒径 d 、摩擦角 ϕ 、反発係数 e および全流量あるいは全水深の条件のもとで、前回[1]の式(24)、(25)および上述の式(21)を連立して解くことによって流速分布と粒子濃度分布が得られる。

砂礫粒子が存在する下層の流動砂層と上層の清水流の層を分割し、下層の粒子濃度を $c(z) = \text{const.} = \bar{c}_s$ とすれば、流速分布は容易に求められる。すなわち、式(6)を式(12)に代入し、式(8)を式(13)に代入して $c = \bar{c}_s$ とすれば、流速分布と断面平均流速は解析的に求められる[4,5]。このように、 $c(z) = \text{const.}$ として得られる解を、ここでは近似解と呼ぶことにする。

前回[1]の式(24)、(25)および式(21)を用いて得られる流速と粒子濃度の鉛直分布をそれぞれFig. 2およびFig. 3に示している。流速は、表面流速を用いて基準化し、粒子濃度は c_* を用いて基準化している。また、Fig. 4には、 $\theta = 5^\circ$ における流れに関する各応力の鉛直分布を示している。ここで、応力分布は、 $z = 0$ すなわち理論河床における全せん断力(重力の流れ方向成分)で基準化している。なお、これらの計算は、 $\phi = 34.0^\circ$ 、 $c_* = 0.52$ 、 $e = 0.85$ 、 $h_t/d = 10.0$ として得られている。

Fig. 2, 3の $\theta = 15^\circ$ のものは、土石流のものであって、勾配の緩い $\theta = 10^\circ$ 、 5° のものが土砂流のものに対応し、 $\theta = 1^\circ$ のものは、従来の掃流砂を伴う流れに相当する。速度勾配が $z = h_s$ のところで不連続になっているが、これは、せん断

Fig. 2 Profiles of velocity distribution in sediment gravity flows.

Fig. 3 Profiles of sediment concentration in sediment gravity flows.

Fig. 4 Shear stress profiles in a sediment gravity flow.

Fig. 5 Depth of sediment transport layer.

応力の連続性に注意を払っていないためである。すなわち、全層平均の流れの抵抗をなるべく適切に評価するため、式(6)の τ_f と式(10)の τ とを $z = h_s$ で等値していないためである。応力の連続性を考慮した議論[5]も行われているが、これに重点を置いた解析結果では、抵抗は過大に評価される。

粒子濃度の分布についてみると、勾配 θ が減少すると、粒子濃度は理論河床から上方へ向かって急激に減少し、清水流の層が形成される。応力分布に示すように、清水流の領域は流動応力(レイノルズ応力)と外力が釣り合っており、領域 $0 \leq z \leq h_s$ においては、外力から τ_y を差し引いた分が流動応力であり、 $z = 0$ においては、 τ_y と外力とが等しくなっている。

$c = 0.05$ となる位置を $z = h_s$ として、これを計算によって求め、 h_s と θ の関係をみると、Fig. 5 のようである。図には、 h_s に関する近似解(式(19))とともに水路実験によって調べられたデータも示されている。実験データはバラつきが大きいので、変動の範囲をバーで示している。 $h_s/h_t = 1$ は、砂粒子が自由水面に存在する、いわゆる土石流の状態であるが、計算結果によれば、土砂流から土石流へ滑らかに遷移していることがわかる。

4. 抵抗則

土石流の状態から土砂流へ遷移するとき、流れの抵抗がどのようになるかを示そう。前回の式(24)、(25)および本報の式(21)を用いて算定される流速分布から断面平均流速 v を求め、 v/u_* ($u_* = \sqrt{gh_t \sin \theta}$) と h_t/d の関係をみると、Fig. 6 のようである。図には、輸送濃度 c_f をパラメータとして v/u_* を示すとともに、一般の開水路清水流で適用されている対数型抵抗則も示している。なお、 c_f および対数型抵抗則はそれぞれ次のようである。

$$c_f = \int_0^{h_t} u c dz / \int_0^{h_t} u dz$$

$$\frac{v}{u_*} = 6.0 + 2.5 \ln \frac{h_t}{k_s}$$

ここに、 k_s は相当粗度であり、固定床粗面では粒径 d のオーダーである。

図において、 $c_f \leq 0.3$ の線は土砂流の抵抗を表している。これより、同じ h_t/d に対する抵抗をみ

Fig. 6 Change of flow resistance with relative submergence, h_t/d , and flux sediment concentration, c_f .

ると、 c_f が小さくなるほど抵抗は小さく (v/u_* は大きく) なる。これは、 h_s が小さくなると (c_f が小さくなると)、流れの抵抗に対する砂粒子間の摩擦の影響が相対的に減少するためである。流れの抵抗は、 $c_f \rightarrow 0$ では対数型抵抗則に漸近する。 h_t/d が 20 を越えると土砂流の抵抗は清水流のものよりも小さくなる。これは、間隙の乱れスケールが清水流のものよりもかなり小さく推定されているためである。したがって、江頭らの理論の適用領域は、 $h_t/d \leq 20$ 程度に推察される。

5. あとがき

土石流に引き続き土砂流(掃流状集合流動)について紹介した。土砂流は土石流よりも地形勾配の緩い領域で形成されるが、砂礫粒子と水との混合物の流れの領域とその上部に清水流の領域が形成される以外は、土石流と本質的には同じものであって、両者の流れは滑らかに遷移する。

土砂流と土石流の力学は同じであるとは云うものの、 $z = h_s$ 近傍の粒子濃度が薄い領域では粒子間隙スケール l_0 が大きくなり過ぎて、清水流との接続については検討を要する。とくに、間隙スケールと流れの場のスケールの大小には注意が必要である。しかし、あまり条件を付け過ぎると問題の本質が見えにくくなる。なお、今回の講座では、江頭ら以外の研究にはあまり触れなかったが、文献[3],[5]は土砂流を扱った論文である。

謝辞 図表の作成と文章のチェックに立命館大学大学院博士前期課程の伊藤隆郭君に御協力いただいている。

参考資料

- [1] 江頭進治：流砂および流砂を伴う流れの力学 (1. 土石流の力学), 混相流, 第11巻, 2号, pp.151-156(1997).
- [2] 江頭進治・宮本邦明・伊藤隆郭：掃流砂量に関する力学的解釈, 水工学論文集, 第41巻, 土木学会, pp.789-794(1997).
- [3] Takahashi, T.: Debris Flow, IAHR Monograph, Balkema, pp.121-153(1991).
- [4] 江頭進治・芦田和男・高濱淳一郎・田野中新：連続体モデルに基づく流砂量式の誘導, 水工学論文集, 第35巻, 土木学会, pp.441-446(1991).
- [5] 橋本晴行・平野宗男：掃流状集合流動の抵抗則と流砂量, 土木学会論文集, No. 545/II-36, pp.33-42(1996).