流砂および流砂を伴う流れの力学*

(3. 掃流砂の力学)

Mechanics of Sediment Transport and Sediment Laden Flows

(3. Mechanics of Bed Load)

江 頭 進 治

EGASHIRA Shinji

**

沖積地河川には、大小さまざまなスケールの流路・河床変動が現れる。これらは、流砂輸送の不均衡によって引き起こされる。流砂のうち、河床を転動、滑動、跳躍しながら輸送されるものが掃流砂である。ここでは、前回に引き続き、流砂に関連する諸問題のうち、掃流砂に関する輸送量の推定式がどんな経緯で導かれてきたかを紹介するとともに、それらと土石流の力学との相違点と類似点について紹介する。

1. はじめに

流路・河床変動には、ダム下流域に見られる河床低下などマクロスケールのものから、流路蛇行、砂州の消長などメソスケールの変動や、水深スケールの変動など、大小さまざまなスケールのものがある。これらはいずれも流砂輸送の不均衡(侵食≠堆積)によってもたらされる。すなわち、侵食よりも堆積が卓越する場合には河床が上昇し、逆のときには低下する。このような変動は、Fig. 1を参照すれば、河床表面より下層に存在する砂礫の質量保存則を用いて次のように表される。

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{c_*} \left(\frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{by}}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

ここに、 z_b は基準面(水平)からの河床高、 c_* は河床面より下層の静止堆積層の砂礫の体積濃度、 q_{bx} 、 q_{by} はそれぞれ単位幅当たりの掃流砂の x 、 y 成分であって、これらは一般に実質体積で議論される。

任意の時間と場所における z_b を得るためには、 q_{bx} 、 q_{by} の関数形が与えられた上で、時々刻々変化する河床上の流れを同時に解く必要がある。流れの解析モデルは、河床変動の解析目的に応じて使い分けられる。例えば、一方向における河床位

の変化を予測すれば十分な場合には、一次元流れの支配方程式を用い、局所洗掘など流路横断形状を予測する場合には二次元あるいは三次元流れの支配方程式が用いられる。二次元あるいは三次元流れの支配方程式のうち、実際上の問題を解く場合には、一般に0-方程式が採用されているが、実験室などの現象の解析には、2-方程式系も適用されている。

q_{bx} 、 q_{by} は、砂礫相の運動方程式から直接に求められるべきものであり、水の相と同等の運動方

Fig. 1 2-D bed-surface elevation.

* 1997.11.11 受付

** 立命館大学理工学部 〒525-77 草津市野路東1-1-1 TEL(0775)61-2732 FAX(0775)61-2667

程式が用意できれば容易に問題は閉じる。ところが、掃流砂の運動は、ごく薄い一粒径オーダーの領域におけるものであり、しかも多体問題であるため、問題はかなり複雑である。そのため、砂礫相の運動方程式に関する研究よりもむしろ、流れの従属変量としての研究が推進されている。

このような観点から流砂量をみると、流砂量ベクトル(q_{bx} , q_{by})は、砂粒子径、密度、摩擦角などの粒子の物理特性値、砂礫に働く流体力および河床勾配に依存する。問題を単純化するため、流砂研究は一方向流れを対象として議論されることが多い。一方向流れにおける流砂量 q_b が求められていれば、 q_{bx} , q_{by} は流体力の向きと河床勾配を用いて容易に求められるからである。以下、一方向流れにおける単位幅あるいは単位長さ当たりの流砂量 q_b について議論しよう。

2. 掃流砂量式

Fig. 2 は、掃流砂の運動を模式的に示したものである。これより流砂量は、次のように定義されることが明らかである。

$$q_b = \int_0^{h_t} u_s(z) c(z) dz = \int_0^{h_t} u_s(z) c(z) dz \quad (2)$$

ここに、 u_s は砂粒子の流速、 c は砂粒子の体積濃度である。

質点系あるいは粒状体としての扱いにおいては、式(2)を次のようにまとめる。

$$q_b = \bar{u}_s h_s \bar{c}_s \quad (3)$$

ここに、 h_s は砂粒子の移動層厚、 $\bar{c}_s$ は移動砂粒子の体積濃度であって、 $h_s \bar{c}_s$ は単位面積当たりの実質の移動体積である。式(3)の $\bar{u}_s$ と $h_s \bar{c}_s$ を独立に

Fig. 2 Uni-directional flow field with bed-load movement.

扱った研究で、現在も実用に供されているものに、佐藤・吉川・芦田(1958)および芦田・道上(1972)の研究がある。

佐藤らは、 $h_s \bar{c}_s$ は、これに働く重力よりも河床表面の揚圧力(揚力)が大きくなる部分で定まると考えて、次の関係を想定した。

$$h_s \bar{c}_s \sim \int_{p_c}^{\infty} p f(p) dp \quad (4)$$

ここに、 p は揚力、 p_c は砂粒子の移動限界時の揚力、 $f(p)$ は揚力の確率密度関数である。また、 $\bar{u}_s$ は砂礫粒子への作用流速に比例するものとして、

$$\bar{u}_s \sim u_* \quad (5)$$

のように置いた。ここに、 u_* は河床表面の摩擦速度であって、水流による河床せん断力を τ_b とすれば、次式で定義される。

$$u_* = \sqrt{\tau_b / \rho} \quad (6)$$

佐藤らは、式(4)および(5)に基づいて、単位幅流砂量が、摩擦速度の大きい領域で u_*^3 に比例する式を提案した。

芦田・道上は、Fig. 3 に示すように、掃流力(せん断力)が河床面において、クーロン力 τ_c と粒子が移動する限界のせん断力 τ_c との和に等しいと考えて、次のように置いた。

$$(\sigma - \rho) g \bar{c}_s h_s \tan \phi + \tau_c = \tau_b \quad (7)$$

Fig. 3 Bed shear stress proposed by Ashida and Michiue [2].

ここに、 σ は砂粒子の密度、 ρ は水の密度、 ϕ は砂粒子の摩擦角である。式(7)より、

$$\bar{c}_s h_s = \frac{u_{*c}^2 - u_*^2}{(\sigma/\rho - 1)g \tan \phi} \quad (8)$$

ここに、 u_{*c} は移動限界摩擦速度である。一方、 $\bar{u}_s$ については、砂粒子の滑動を考慮して、定常状態における単粒子の運動方程式、すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_d A_p |u_b - \bar{u}_s| (u_b - \bar{u}_s) \\ - (\sigma/\rho - 1)g V_p \tan \phi = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

に基づいて、次のような解を得ている。

$$\bar{u}_s = A(u_* - u_{*c}) \quad (10)$$

ここに、 u_b は砂粒子抗力の代表流速で、 $u_b = Au_*$ としている。 A_p は流れに対する粒子の射影面積、 V_p は粒子の体積である。式(8)、(10)より、次のような流砂量式が得られている。

$$\frac{q_b}{\sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd^3}} = 17(1 - \tau_{*c}/\tau_*) (1 - \sqrt{\tau_{*c}/\tau_*}) \tau_*^{3/2} \quad (11)$$

ここに、係数の17は、誘導過程に導入された係数をまとめた、これらを実験データに一致するように同定したものである。 τ_* および τ_{*c} は、それぞれ掃流力(河床せん断力)と限界掃流力であって、次のような無次元量である。

$$\tau_* = u_*^2 / \{(\sigma/\rho - 1)gd\}, \tau_{*c} = u_{*c}^2 / \{(\sigma/\rho - 1)gd\}$$

τ_{*c} は、粒子レイノルズ数 $u_* d/\nu$ によって若干変化するが、 $u_* d/\nu > 60$ において一定値をとり、 $\tau_{*c} = 0.05$ 程度の値になる。

式(11)は、力学的な合理性の面からは少なからず問題を残しているものの、実用的には多く用いられている。

1980年代から1990年代にかけて、 $0 \leq z \leq h_s$ すなわち、掃流砂層における運動をもう少し詳細に議論しようとする研究が現れた[3,4]。このとき、河床は固定床が想定され、流れは、次の対数型流速分布を基本としている。

$$\frac{u(z)}{u_*} = A_r + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{k_s} \quad (12)$$

ここに、 A_r は8.5、 κ はカルマン定数、 k_s は相当粗度である。このような流れ場における粒子の跳躍軌跡を質点系の運動方程式を用いて追跡するものである。このモデルをFig. 4に示している。これらの研究によって、跳躍高さや移動速度の不規則性は、河床粒子との衝突によってもたらされていることなど、砂粒子の運動特性に関する理解が深められ、時空間で平均した砂粒子の移動速度については、Sekineら[4]によって次のような結果が得られている。

$$\bar{u}_s = \alpha \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right)gd} \frac{u_*}{w_0} \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}}\right) \quad (13)$$

ここに、 $\alpha = 8.0$ であり、 w_0 は静止水中における砂粒子の沈降速度である。

ところが、跳躍モデルにおいては、通常、固定床の粗度粒子と運動している粒子との二体衝突を扱っているため、流砂量式を構成するために必要な $\bar{c}_s h_s$ については、異なる力学系から得られるもの、例えば式(8)によって推定せざるを得ない状況にある。

上述の跳躍モデルによる解析は、単一の粒子を追跡するものであるが、粒子～流体モデル、かつ、二体衝突の範疇において、多数の粒子を同時に追跡する方法[5]によっても議論されている。Fig. 5および6は、後藤ら[5]によって得られた結果であり、これらは単一粒子および多数粒子の追跡によって得られる砂粒子の存在確率密度および砂粒子の移動速度の分布を示している。これらの結果は、多分、固定床上の流砂に相当するものと思われる、示唆に富んでいるものの、流砂量や流れの抵抗といった問題をシミュレートするためには、理

Fig. 4 Saltation model of a single grain.

Fig. 5 Probability density function for moving grains after Gotoh, et al. [5].

Fig. 6 Profile of particle movement velocity after Gotoh, et al. [5].

論河床近傍の扱いに工夫が必要である。

掃流砂に関する主要な研究をみてきたが、これらの研究以外に、中川・辻本[6]のStochastic Modelがある。これは、砂礫の離脱率(pick-up rate)および砂礫が離脱してから休止するまでの移動距離(step length)を確率変数として扱うものであるが、本講座の目的から少し外れるため省略している。

3. 掃流砂と土石流との相似性

3. 1 掃流砂層厚 h_s 。

式(8)の両辺を $\bar{c}_s d$ で除せば次式を得る。

$$\frac{h_s}{d} = \frac{1}{\bar{c}_s \tan \phi} (\tau_* - \tau_{*c}) \quad (14)$$

上式は、 $\tau_* \gg \tau_{*c}$ において、 h_s がに比例することを示している。

近年における土砂流に関する研究[7]や粒状体のシミュレーション[8]に関する結果を参照すれば、 τ_{*c} の導入の仕方には若干の問題はあるものの、式(14)は粒子の滑動や跳躍運動を含む移動層厚の評価式として、かなり適切である。

一方、水と砂礫の混合物からなる連続体とした扱いにおいては、これまでの[9,10]の講座に示したように、 h_s/d は次のように求められている。

$$\frac{h_s}{d} = \frac{1}{\bar{c}_s \cos \theta (\tan \phi - \tan \theta)} \tau_* \quad (15)$$

ここに、 θ は路床あるいは理論河床の勾配である。無論、式(15)は τ_* が τ_{*c} よりも小さいところでは適用されない。式(14)には勾配の影響が考慮されていないが、これを考慮すれば式(14)と(15)とは、 τ_{*c} の有無を除けば同じである。

河床せん断力 τ_* が τ_{*c} よりもかなり大きくなると、理論河床 $z=0$ において $\partial u / \partial z = 0$ となり、流体力(流動応力)は0となる[9,10]。したがって、 $z=0$ 近傍においては τ_{*c} に相当する流れは形成されないと見なした方がよい。

Fig. 7は、式(14)および(15)において $\bar{c}_s = 0.26$ とした近似解と、 $\theta = 0^\circ \sim 12^\circ$ における実験値[11]、

Fig. 7 Depth of bed-load layer.

および $\bar{c}_s$ を前回の方法[10]によって計算した結果(厳密解)を示している。 $\bar{c}_s=0.26$ としたのは、 $z=0$ とその下方では砂粒子濃度は静止堆積層の濃度 $c_*(=0.52)$ に等しく、 $z=h_s$ では $c\cong 0.0$ であり、これらの単純平均値が0.26となるからである。これによれば、 h_s/d に関し、土石流の構成則から得られる結果と掃流砂研究で用いられてきたものとは有意な差は認められない。

3. 2 掃流砂層の粒子移動速度と流砂量式

前述したように、掃流砂層における砂粒子の移動速度は、式(9)に見られるように、質点系の運動方程式を用いて求められている。この際、砂粒子同士のinteraction、および砂粒子と水流(流体相)とのinteractionをいかに評価するかが重要である。最近、粒状体の流動に関するシミュレーションが行われるようになってきてはいるものの、いまだこの段階にはない。

対象とする砂粒子と同じ粗度を有する固定床上における単一粒子の平均移動速度は、式(10)あるいは式(13)のようになる。すなわち、 $\bar{u}_s$ は、 $u_* \gg u_{*c}$ において、 u_* あるいは $\tau_*^{1/2}$ に比例する形をとる。

一方、掃流砂の移動層厚 h_s は、式(14)で表され、これは3. 1で示したように、粒状体の知見を導入した連続体の構成則から導かれる式(15)とほぼ等価である。そこで、Fig. 3の $0 \leq z \leq h_s$ の領域において、前回の講座[10]に示す式(1)、(2)、(5)、(6)、(7)および(8)を用いて、 $0 \leq z \leq h_s$ における平均流速 u_m を求めると、次のようになる。

$$\frac{u_m}{u_*} = \frac{4}{15} \frac{K_1 K_2}{\sqrt{f_d + f_f}} \tau_* \quad (16)$$

ただし、 $0 \leq z \leq h_s$ における砂粒子の濃度は $c(z) = \bar{c}_s (= \text{const.})$ として導かれている。ここに、

$$\tau_* = \frac{u_*^2}{(\sigma/\rho - 1)gd} = \frac{h_l \sin \theta}{(\sigma/\rho - 1)d}$$

$$f_d = k_d(1 - e^2)(\sigma/\rho)\bar{c}_s^{1/3} \quad (k_d = 0.0828)$$

$$f_f = k_f(1 - \bar{c}_s)^{5/3}/\bar{c}_s^{2/3} \quad (k_f = 0.16)$$

$$K_1 = \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\tan \theta - \tan \phi}$$

$$K_2 = \frac{1}{\bar{c}_s} \left\{ 1 - \frac{\tan \theta}{\bar{c}_s(\sigma/\rho - 1)(\tan \phi - \tan \theta)} \right\}^{1/2}$$

e は反発係数で、 $e=0.85$ 程度の値である。

式(16)は、 $u_* \sim \tau_*^{1/2}$ であることを考慮すると、掃流砂層における水と砂粒子の混合物の平均移動速度が u_*^3 あるいは $\tau_*^{3/2}$ に比例することを示している。これは、固定床上における単一粒子の平均移動速度の結果との顕著な違いである。 τ_* が τ_{*c} に近くなると、水流と砂粒子との相対速度が顕著になるものと思われるが、これを気に留めず、 $\bar{u}_s = u_m$ として式(16)と(15)を式(3)に代入すると、流砂量式が次のように得られる。

$$\frac{q_b}{\sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd^3}} = \frac{4}{15} \frac{1}{\sqrt{f_d + f_f}} = K_1^2 K_2 \tau_*^{5/2} \quad (17)$$

これは、江頭ら[11]が導いた式とほぼ同じである。掃流砂層の u_s と $\bar{c}_s h_s$ を同じ力学系で議論したものと、そうでないものから得られる流砂量式が異なるのは当然である。これらの違いを図上で見ると、Fig. 8のようである。図には、式(11)と式(17)を示すとともに、式(2)の $\bar{u}_s(z)$ および $c(z)$ について厳密解を求めて、これらから得られる流砂量曲

Fig. 8 Bed-load formulas.

線を示している。なお、式(17)においては、Fig. 7における場合と同様、 $\bar{\sigma}_s=0.26$ としている。

4. おわりに

1950年代から1970年代にかけて掃流砂量式に関する研究は活発であった。これらを勉強し直し、整然とした姿で紹介するつもりであった。しかし、殆どの研究において、力学的条件から定められるべき運動学的条件が安易な形で導入され、その意味について検討されないまま、流砂量式の形に構成されており、これらをまとめることができないままの内容になった。

今後、掃流砂層の内部におけるエネルギー散逸の構造、あるいは応力構造の議論が必要である。それをしない限り、土石流と掃流砂の力学の直接的な比較はできない。しかしながら、連続体としての扱いから見ると、掃流力の大きい領域では土石流と掃流砂層の応力構造には顕著な違いはないものと思われる。

流砂量式は、流砂の運動方程式の姿を変えたものであって、将来、この分野が目覚ましく進展するものとすれば、現状においては土砂水理現象に関する支配方程式系を閉じるために導入されていると考えておく方が賢明かも知れない。しかし、一方において流砂運動は、砂山の挙動からも分かるように、極めて摩擦の強い現象であり、定常等流場において導かれた流砂量式が、河床変動の激しい場や非定常性の強い流れ場においてかなり合理性をもって適用できることも事実である。

謝辞 図表の作成と文章のチェックに立命館大学大学院博士前期課程の伊藤隆郭君に御協力いただいている。

参考資料

- [1] 佐藤清一・吉川秀夫・芦田和男：河床砂礫の掃流運搬に関する研究(1),建設省土木研究所報告,98, pp.151-156(1958).
- [2] 芦田和男・道上正規：移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究,土木学会論文報告集,206,pp.59-69(1972).
- [3] 水理委員会共同研究グループ：固液混相流における支配方程式とその適用性,水工学論文集, 39, pp.537-550(1995).
- [4] Sekine,M.and H.Kikkawa: Mechanics of saltating grains. II, Jour.Hydraulic Engineering, ASCE,Vol.118,4,pp.536-558(1992).
- [5] 後藤仁志・辻本哲郎・中川博次：粒状体モデルによる掃流粒子群の挙動に関する数値解析,水工学論文集,37,pp.611-616(1993).
- [6] 中川博次・辻本哲郎：水流による砂礫の移動機構に関する基礎的研究,土木学会論文報告集,244,pp.71-80(1975).
- [7] 江頭進治・宮本邦明・伊藤隆郭：掃流砂量に関する力学的解釈,水工学論文集,41,pp.789-794(1997).
- [8] 後藤仁志・酒井哲郎：河床構成粒子群との相互作用を考慮した流砂の流動過程の数値解析,水工学論文集,41,pp.819-824(1997).
- [9] 江頭進治：流砂および流砂を伴う流れの力学,混相流, 11, No.2, pp.151-156(1997).
- [10] 江頭進治：流砂および流砂を伴う流れの力学,混相流, 11, No.3, pp.258-262(1997).
- [11] 江頭進治・芦田和男・高濱淳一郎・田野中新：エネルギー散逸に基づく流砂モデル,京大防災研年報,33号B-2,pp.293-306(1990).