衝撃波を伴う固気二相流のシミュレーション*

Simulation of Gas-Solid Two-Phase Flow Accompanying Shock Waves

三 浦 宏 之**
MIURA Hiroyuki

Abstract Fundamental equations are given for gas-solid flows when the effect of compression of the gas is significant. Problems of unsteady propagation of shock waves in the two-phase system are solved numerically. The relaxation nature of the flow induced by the shock wave is investigated. The influence of nonuniformity of particle size on the shock propagation is also discussed.

Keywords ; Gas-solid two-phase flow, Shock wave propagation, Relaxation phenomena

1. はじめに

固体微粒子群と気体の混合した流れは粉体輸送や集塵器など工学上しばしば現れる。こうした固気二相流において気体の圧縮性の影響が重要となるのは流速が大きい場合や波動が生じる場合である。例として固体推進剤ロケットの排気流や微粒子を含んだ気体中の高速飛翔体まわりの流れ、あるいは大気や粉体輸送系で爆発などの原因により起こる波の伝播があげられる。

固気二相流の特徴は固体粒子と気体が異なる速度と温度をもつことから出てくる。これは大きな慣性と熱容量のために粒子が気体ほど早く状態変化をすることができずに遅れが起こることによる。そこで粒子はまわりの気体から速度差と温度差に応じた抵抗と熱伝達を受け運動量とエネルギーをやりとりする。この二相の相互作用に支配されて流れの状態が変化していくことになる。

ここでは固気二相の運動のモデル化と数値計算法について述べ、特に固気二相の相互作用が典型的に現れまた実験的にもよく調べられている衝撃波を伴う場合に適用する。

2. モデル化

非常に沢山の微粒子のそれぞれの運動とその周囲の気体の流れの詳細をすべて解析することは不可能でありモデル化が必須となる。流れの中に全体からみて状態変化が小さいけれども多くの微粒子を含むような微小な流体要素を考え、流れの状態を表す量として平均をとった圧力、濃度、温度、速度を用いて運動を記述する。すなわち粒子群も気体もそれぞれを連続体として

* 1989. 5. 9 受付

** 近畿大学理工学部機械工学科

〒577 東大阪市小若江 3-4-1

扱うわけである。

気体と粒子群の性質を考えるときにここでは簡単に完全気体と一様な球形粒子群を仮定する。一般に固体の密度は気体に比べて非常に大きいので粒子群の占める体積は無視でき、また圧力への寄与も無視する。それ故、気体の質量濃度は密度と近似的に等しい。二相の間の運動量と熱量の交換をひきおこすもとなる気体の粘性および熱伝導性は欠くわけにはいかないが、気体内部での影響は無視する。

いま一方向だけの流れを考えてその方向の空間座標を x 、時間を t とし、流れの変数として気体の圧力、密度、温度、速度をそれぞれ (p, ρ, T, u) によりまた粒子群の濃度、温度、速度を (σ, Θ, v) で表し流れを支配する方程式を導く。気体および粒子群それぞれの質量保存を表す連続の式は次のように書ける。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma v) = 0 \quad (2)$$

気体と粒子の運動量は次式に従って変化する。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\sigma}{m} D \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma v) + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma v^2) = \frac{\sigma}{m} D \quad (4)$$

但し、 m と D は粒子 1 個あたりの質量と気体によってもたらされる抵抗である。エネルギーに関する式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(C_v T + \frac{1}{2} u^2 \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho u \left(C_v T + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right\} = -\frac{\sigma}{m} (vD + Q) \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sigma \left(C_m \Theta + \frac{1}{2} v^2 \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sigma v \left(C_m \Theta + \frac{1}{2} v^2 \right) \right\} = \frac{\sigma}{m} (vD + Q) \quad (6)$$

となるが、ここで C_v は気体の定積比熱、 C_m は粒子を構成する物質の比熱であり、 Q は粒子 1 個あたりに気体から与えられる熱伝達量の割合である。完全気体に対しては気体定数を R として次の状態方程式が成り立つ。

$$p = \rho R T \quad (7)$$

7 個の流れの変数に対し (1)–(7) の方程式系が得られたが、更に (3)–(6) 中の抵抗と熱伝達量を流れの変数と結びつけて方程式系が閉じられる。モデル化でこの点は二相の相互作用を定める意味で重要であり、これまで多くの研究者が種々の理論式や実験式をとりあげている。粒子群の体積分率は大変小さいので粒子の受ける力と熱伝達は無限にひろがった気体の一様な流れの中を一定の速さで運動する 1 個の粒子の場合と近似的に同じであると考ええる。いま D と Q を抵抗係数 C_D とヌッセルト数 Nu を用いて書けば次の形になる。

$$D = \frac{\pi}{8} d^2 \rho |u-v| (u-v) C_D \quad (8)$$

$$Q = \pi d k (T - \Theta) Nu \quad (9)$$

但し、 d は粒子の直径であり k は気体の熱伝導率である。固体球に相対的な気体の定常流れの相似性により無次元パラメータ C_D と Nu は気体の慣性力と粘性力の比である粒子レイノルズ数 Re および相対速度と気体の音速の比である相対マッハ数 M の関数として表される。

$$Re = \rho d |u-v| / \mu \quad (10)$$

$$M = |u-v| / \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (11)$$

但し、 μ は気体の粘性係数であり γ は気体の定圧比熱と定積比熱の比である。粒子レイノルズ数と相対マッハ数に関する依存性を適当に与えてやることにより気体の対流効果に加えて圧縮性の効果もと入れられる。ここでは $Re = O(10^2)$, $M = O(1)$ の範囲を考えるがそれに適した表式としてHenderson²⁾とFox³⁾の提案した次の経験式を仮定する。

$$\begin{aligned} C_D = & 24[Re + (\gamma/2)^{1/2} M \{4.33 + (3.65 - 1.53\Theta/T)(1 + 0.353\Theta/T)^{-1} \\ & \times \exp(-0.247(\gamma/2)^{1/2} Re/M)\}^{-1} + \exp(-0.5M/Re^{1/2}) \\ & \times \{4.5 + 0.38(0.03Re + 0.48Re^{1/2})\}(1 + 0.03Re + 0.48Re^{1/2})^{-1} \\ & + 0.1M^2 + 0.2M^8] + 0.6(\gamma/2)^{1/2} M \{1 - \exp(-M/Re)\} \quad (M \leq 1) \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} C_D = & [0.9 + 0.34/M^2 + 1.86(M/Re)^{1/2} \{2 + 4/\gamma M^2 + 1.058(2\Theta/\gamma T)^{1/2}/M - 4/\gamma^2 M^4\}] \\ & \times \{1 + 1.86(M/Re)^{1/2}\}^{-1} \quad (M \geq 1.75) \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} C_D = & C_D(M=1, Re) + 4/3(M-1)[C_D(M=1.75, Re) - C_D(M=1, Re)] \\ & (1 < M < 1.75) \end{aligned} \quad (12c)$$

$$\begin{aligned} Nu = & 2 \exp(-M)(1 + 17M/Re)^{-1} + 0.459 Pr^{0.33} Re^{0.55} \\ & \times \{1 + 0.5 \exp(-17M/Re)\} / 1.5 \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)において Re は $M > 1$ のときには粒子の前方にできる衝撃波直後の気体の流れ状態に基づいたレイノルズ数をとっており、 Pr は気体のプラントル数を表す。

固気二相流で重要な因子である気体の粘性率と熱伝導率は温度によって変わる。温度変化が小さければ一定としてさしつかえないが、そうでないときは二相の緩和過程に影響するので温度依存性も考慮すべきである。いま例に空気を取り粘性率について次の実験式⁴⁾を仮定する。

$$\mu = a T^{3/2} (T + 113)^{-1} [1 + 1.53 \times 10^{-4} (T/113 - 1)^2], \quad a = 1.47 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1/2} \quad (14)$$

熱伝導率は粘性率にはほぼ比例しておりプラントル数を一定と仮定する。

$$Pr = \mu C_p / k = 0.7 \quad (15)$$

結局、圧縮性気体二相流の解析は(1)-(15)の方程式系の解を求めることに帰着する。

3. 衝撃波の非定常伝播

時間的に変化する流れを調べるには前節で得た連立偏微分方程式を数値的に解析することが要求される。これまでいろいろな数値計算法が試みられているが、人工粘性を含む差分法では気相の不連続変化が不明瞭になる欠点がある。特性線に基づく方法を適用すればよい結果を得られるが、不連続の現れる位置を識別し適当な変化を当てはめるといった操作が厄介である。ここでは扱いも簡単で不連続変化を明確に描く一つの方法を述べる。

(1)-(6)式は次の形にある。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = H \quad (16)$$

これに演算子分割法を適用して数値解を求める。すなわち

$$\frac{\partial F}{\partial t} = H \quad (17)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

の両式を小さな時間刻みに対し交互に解き続けることにより解が得られる。第1の式は時間増分 Δt について数値的に積分して

$$F(x, t + \Delta t) = F(x, t) + H(x, t) \Delta t \quad (19)$$

Fig.1 Solution of Riemann problem for the gas.

この段階で計算された流れの諸量を改めて初期値として第2の式(18)を解き、時間 $t + \Delta t$ の流れの状態が定まる。ここで双曲型方程式の解法として提案され気体力学にも応用されているランダム・チョイス法⁽⁵⁻⁷⁾を用いる。二相の相互作用は(16)の右辺の項にあり(18)は気体と粒子に対して分離するので前者に対しては既存の方法が使える。空間的に隣接した格子点において与えられた状態から Δt 後の状態を定める基本過程を以下に説明する。領域を格子間中点で区切りそこで左右の状態が不連続的に変わる初期条件を想定する。このリーマン問題の解は一般に図1のように左右に伝わる波とその間の接触不連続面から構成される。接触面両側では圧力

と速度は同じでそれらの値を p_* および u_* とすると右に伝播する波に対して次式が成り立つ。

$$u_* - u_r = \begin{cases} \left(\frac{p_*}{p_r} - 1 \right) \left[\frac{2 p_r}{(\gamma+1) \rho_r} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p_*}{p_r} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{-\frac{1}{2}} & \left(\frac{p_*}{p_r} \geq 1 \right) \\ - \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma p_r}{\rho_r} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{p_*}{p_r} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right] & \left(\frac{p_*}{p_r} < 1 \right) \end{cases} \quad (20)$$

ここで添字 r は右側の格子点での諸量を意味する。また、右辺で圧力比が 1 より大きいときには衝撃波、小さいときには膨張波の関係式を表している。(20)と左に伝播する波に対する同様な式から u_* と p_* が求められ、衝撃波とわかれば気体力学のランキン・ウゴニオ関係式を用いて波面後方の密度や伝播速度が見出せる。膨張波の場合にはエントロピー変化はなくその内部の状態は特性線理論から

$$p \rho^{-\gamma} = \text{const.} \quad (21)$$

$$\frac{x}{t} = u \pm \left(\frac{\gamma p}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

$$u \mp \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma p}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} = \text{const.} \quad (23)$$

によって定められる。但し、複号はそれぞれ右および左へ伝わる膨張波に対応している。以上のようにして得られる $\Delta t' = 0.5 \Delta t$ 後の気体に対する(18)の解から格子点間の区間でランダムにとった一点での状態を左右格子点の midpoint での状態として定める。同様の操作をもう一度行えば同一格子点での Δt 後の状態が求められることになる。ランダム・チョイス法を用いれば若干のランダムな乱れが含まれるけれども不連続はあいまいにならず流れの挙動を平均的に正しく記述できる。粒子に対する方程式(18)については不連続な初期条件を設定するのは速度が多価となるため適切ではない。そこで粒子に対しては図 1 の Δx だけ離れた両格子点での値を基にした線形変動の初期条件を想定する。すなわち粒子の濃度、速度、温度について

$$q = (q_r - q_l) x / \Delta x + 1/2 (q_r + q_l) \quad (24)$$

の形の初期条件を仮定すると(18)の解は

$$v = [\Delta x + (v_r - v_l) t]^{-1} [(v_r - v_l) x + 1/2 \Delta x (v_r + v_l)] \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} \Theta = & [\Delta x + (v_r - v_l) t]^{-1} [(\Theta_r - \Theta_l) x + 1/2 \Delta x (\Theta_r + \Theta_l) \\ & + (\Theta_l v_r - \Theta_r v_l) t] \end{aligned} \quad (25b)$$

$$\begin{aligned} \sigma = & \Delta x [\Delta x + (v_r - v_l) t]^{-2} [(\sigma_r - \sigma_l) x + 1/2 \Delta x (\sigma_r + \sigma_l) + \\ & (\sigma_l v_r - \sigma_r v_l) t] \end{aligned} \quad (25c)$$

と得られる。⁸⁾ 気体と同様に(25)についてランダム・サンプリングを行うことにより解が定まっ

ていく。但し、粒子群がある領域の中にだけ存在する場合には数値的散逸を防ぐためその境界の粒子だけについては気体と同じように不連続的初期条件を設定しておくべきである。この方法による計算は常に安定であるが、物理的に意味のある解を得るにはいわゆるCFL条件を満たすように時間増分を小さくとらねばならない。

上に述べた数値解析法を適用した例として空気中を一定の速さで伝播してきた衝撃波が直径 $10\mu\text{m}$ のガラス粒子が質量濃度比1で一様に分布している固気二相領域に入射する問題を考える。⁹⁾ 図2は衝撃圧力比5の衝撃波が $x=0$ で二相領域に入ってから2.81ms経過したときの温度と速度の分布を示している。衝撃波が通過したあとと波面背後で粒子は気体にひきずられて加速し高温の気体に囲まれて次第に温度を上げていくが、逆に気体の方は粒子によって減速させられ熱を奪われる。こうして先頭波面の不連続変化はより小さくなりそれ故波の伝播速度も小さくなっていく。気体は減速することによって圧縮され粒子群境界の近くでは圧力が入射衝撃波後方の値より高くなる。その結果、気体だけの領域内へ固気二相境界から反射した衝撃波が形成される。

Fig.2 Flow structure after shock transmission into a gas-solid mixture.
 ————— ; gas, — — — — ; particles, ; equilibrium flow.

二相領域内では先頭波面での気相不連続に続く非平衡領域の後方に粒子と気体が平衡になった一様状態が作りだされ、透過した衝撃波は定常に伝播するようになる。巨視的観点から粒子と気体が至るところで平衡状態にあると考えれば固気二相系は一つの完全気体のように振舞う。これは気体だけの場合に比べて小さなみかけの比熱比と音速をもつ。¹⁾ 図2の破線はこの平衡気体近似による気体力学の解である。緩和時間より長い時間が経過したときの流れのおおよその様子がそれによってよく表されている。粒子群境界では気体の温度と密度が不連続的に変化し、その前方では粒子群と平衡状態には達しているが温度と密度が緩やかに変化している。この領域の粒子は減衰する前の強い衝撃波通過を経験しているために温度が一様平衡領域のものより高くなっている。こうした接触領域の構造は透過衝撃の内部構造とともに平衡気体理論からは見出すことができない。

これまでは均一な粒径の粒子群を仮定していた。実際の現象ではそうではなく例えば衝撃波管を用いた実験¹⁰⁻¹²⁾ではかなりそろった大きさの粒子を使用しているがそれでも粒径のばらつきは見逃せない。粒径分布を考慮するには粒子群をいくつかの異なった粒径の群に分け、各粒子群の運動を解析すればよい。それらの運動方程式は(2)(4)(6)と同様の形で表され、気体に対しては(1)(3)(5)で右辺の粒子との相互作用の項をすべての粒子群についてとられた和の形にしておく。粒子は同じ大きさのものであっても気体とは異なり他の粒子を追いついて動くことも

あり得る。そのような場合、粒子の諸量は位置の多価関数となり(2)(4)(6)のオイラー式記述は無効となる。しかし、粒子の諸量がその初期位置の滑らかな関数であればラグランジュ式記述が可能である。いま変数を時間 t と n 種の粒径粒子群の初期位置 x_{j0} ($j=1,2,\dots,n$) にとり支配方程式を表すと

$$\sigma_j \frac{\partial x_j}{\partial x_{j0}} = \sigma_{j0} \quad (26)$$

$$m_j \frac{\partial v_j}{\partial t} = D_j \quad (27)$$

$$m_j C_m \frac{\partial \theta_j}{\partial t} = Q_j \quad (28)$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial t} = v_j \quad (29)$$

但し、 x_j は時間 t のときの粒子の位置であり σ_{j0} は初期の濃度である。(27)-(29)を時間について数値的に積分していけば速度、温度、位置が求められるが、粒子の位置は気体の状態が与えられている固定格子点からずれているので抵抗と熱伝達を計算する際には近接した2格子点での値を基に内挿して気体の諸量を評価する。粒子の濃度は(26)から計算され、最初 Δx_{j0} であった粒子間距離が Δx_j になったと知られると $\sigma_j = \sigma_{j0} \Delta x_{j0} / \Delta x_j$ と表される。気体の方程式にランダム・チョイス法を適用するがこのときのランダム変動の影響が粒子の濃度に大きな空間的乱れをもたらす。物理的には有り得ないことなので、これを防ぐため粒子の位置 x_j が x_{j0} に関して滑らかに変化するように適当な平滑化を行う。

Fig.3 Size distribution of solid particles.

上に述べた方法をSommerfeldの実験¹²⁾で設定された状態に合わせて適用してみる。実験では上部下部にそれぞれ低圧と高圧の空気を入れ、低圧側の空気隔膜から離してガラス粒子を混合させた鉛直衝撃波管を使う。ガラス粒子は平均 $27 \mu\text{m}$ の大きさだが図3に示される粒径分布をもっているため、解析では11種の群に分けて取り扱った。図4は初期の衝撃波マッハ数が1.48で粒子の気体に対する濃度比が1.32の場合に破膜後10ms経過したときの温度と速度の分布を示す。図中の印についている曲線が11種の粒子群の状態を表しており x 座標の原点は最初の固気二相領域の境界にとっている。先にみたように固気二相中に入射した気相衝撃波は二相の相互作用によって減衰している。粒径が大きな粒子ほど慣性が大きくまわりの気体との速度

差と温度差は大きい。粒子と気体は平衡状態に至っておらず透過衝撃波は管内で十分発達したところまでいかない。粒子群の境界において気体の温度は不連続的に変化していないが、これは先の例とは違ってより大きな粒子が後方にとり残されているためで滑らかな変化だけの接触領域の構造が形成される。固気二相領域から反射した衝撃波はいまの場合には初めの高圧と低圧の空気の接触不連続面を透過しており若干弱められている。また高圧空気側に伝播した膨張波が管端で反射してきている。

Fig.4 Flow structure in a gas-solid shock tube.

————; gas, lines with symbols; particles of different sizes, a_{f0} ; speed of sound for the gas ahead of the shock wave.

固気二相中に入射した気体衝撃波の伝播速度は進むにつれて小さくなる。図5は濃度比が0.62および1.32の場合の衝撃波マッハ数の変化を示したもので実験結果のプロットとともに計算結果が実線であらわされている。現在の結果はおおよそ一致を与えているが、強い衝撃波の場合には実際の伝播速度が理論結果より小さい値へと変化している。これは管壁に形成される境界層の影響によるものと考えられる。図中の破線は平均粒径の一種類の粒子を想定したときの結果であるがそれよりも現在の結果の方が実験結果をよく表しており、粒径分布を考慮に入れることが重要であるとわかる。

Fig.5 Variation of shock Mach number.

————; numerical results, symbols; experimental results,
 - - - - -; numerical result for case of particles of uniform diameter.

4. おわりに

気体の圧縮性が重要となる固気二相流のモデル化および数値シミュレーションから見出され

る流れの特徴について述べた。粒子の体積を無視し気体との運動量と熱量の交換に対して単一球の場合と同じと簡単に仮定したが、同程度の質量濃度をもつ二相系の場合には実験結果と定量的にもよく一致する結果が得られたことから妥当な仮定であると考えられる。もっと高濃度になると粒子同士の衝突や粒子の運動に対するまわりの粒子存在の影響などを考慮したモデル化が必要となろう。

文献

- (1) Rudinger, G.: Fundamentals of Gas-Particle Flow, Elsevier(1980).
- (2) Henderson, C. B.: AIAA J., Vol. 14, 707-708(1976).
- (3) Fox, T. W., Rackett, C. W. & Nicholls, J. A.: Proc. 11th Int. Symp. Shock Tubes and Waves, 262-268, University of Washington Press(1978).
- (4) Gottlieb, J. J. & Ritzel D. V.: DRES Suffield Technical Note, No. 454(1979).
- (5) Chorin, A. J.: J. Compt. Phys., Vol. 22, 517-533(1976).
- (6) Sod, G. A.: J. Fluid Mech., Vol. 83, 785-794(1977).
- (7) Saito, T. & Glass, I. I.: Prog. Aerospace Sci., Vol. 21, 201-247(1984).
- (8) Miura, H. & Glass, I. I.: Proc. R. Soc. Lond., Vol. A 382, 373-388(1982).
- (9) Miura, H. & Glass, I. I.: Proc. R. Soc. Lond., Vol. A 385, 85-105(1983).
- (10) Rudinger, G.: Trans. ASME, Vol. D 92, 165-172(1970).
- (11) Outa, E., Tajima, K. & Morii, H.: Bull. JSME, Vol. 19, 384-394(1976).
- (12) Sommerfeld, M.: Experiments in Fluids, Vol. 3, 197-206(1985).