二流体モデルに対する高次風上差分法の適用性^{*}

(第1報：線形モデル方程式に基づく考察)

Applicability of High-Order Upwind Schemes to Two-Fluid Model (1st Report : Examination Based on a Linear Model Equation for the Two-Fluid Model)

大 川 富 雄^{**}
OHKAWA Tomio

富 山 明 男[†]
TOMIYAMA Akio

Abstract Numerical solutions based on the two-fluid model are likely to be unstable due to its ill-posedness. The first-order upwind scheme is usually adopted for the convection terms for stabilization while high-order upwind schemes are seldom used. In this study, the applicability of high-order upwind schemes was examined by analyzing the amplification factor of finite difference equations for a single linear model equation of the two-fluid model. The numerical stability of various schemes was systematically clarified by making use of a concept of mapping in a complex plane. It was confirmed that high-order upwind schemes tend to yield unstable numerical solutions. It was also demonstrated that the inclusion of an explicit diffusion term into the basic equation can remove the numerical instability.

Keywords : Two-Phase Flow, Numerical Analysis, Two-Fluid Model, High-Order Upwind Scheme, Numerical Stability

1. 緒言

一次元一圧力二流体モデルでは、基礎方程式系が初期値問題として数学的に不適切になる場合があるため数値解が不安定になりやすい[1]。このため、二流体モデルによる数値計算では様々な方法を用いて離散化方程式の安定性を高めている[2-4]。特に、ほとんどの二相流解析プログラムでは短波長の不安定性を回避するために、対流項に一次風上差分法が用いられている。しかし、一次精度の風上差分法では数値拡散が大きく、スラグ流の

ように気相と液相の分布が不均一な条件では高精度の解析は困難となる[5]。このため、対流項をより安定かつ高精度に評価できる手法が求められており、現在までに対流項への高次精度TVDスキームの適用などが試みられている[6]。しかし、単相流解析で広く用いられている高次風上差分法を二流体モデルの対流項に適用した場合の数値的安定性に関する検討はほとんど行われていない。

本研究では、Stewartにより導入された複素数の伝播速度を持つ線形モデル方程式[7]

* 1993.6.2 受付

** 財電力中央研究所原子力システム部伝熱工学Gr. 〒201 狛江市岩戸北2-11-1
TEL(03)3480-2111(ex.397)FAX(03)3480-2493

† 神戸大学工学部機械工学科

を用いて、単相流解析でよく用いられている4種類の高次風上差分法とその比較対象として一次風上差分法と中心差分法の計6種類の差分法を二流体モデルの対流項に適用した場合の数値的安定性を増幅係数を用いて検討した。安定性解析では離散化方程式に現われる5種類の変数をパラメーターとし、各パラメーターが離散化方程式の数値的安定性に与える影響を複素平面における一次変換の概念を用いて体系的に検討した。ここで5つのパラメーターとは、(1)Courant数、(2)生成項の大きさ、(3)複素速度の割合(不適切の程度)、(4)対流項の陰な程度、(5)生成項の陰な程度である。この結果、複素平面における一次変換の回転角や倍率は各パラメーターの値により一意に定まり、使用する差分法とは無関係であることを示した。また、高次風上差分法は一次風上差分法と比べ数値的に不安定になりやすいことを定量的に示した。さらに、高次風上差分法を用いて安定に計算を行うためには、Leith法[8]と同様に離散化により生じる負の数値粘性を除去するための陽的な拡散項を導入することが有効であることを示した。

2. モデル方程式と増幅係数

一次元一圧力二流体モデルの基礎方程式系は初期値問題として数学的に不適切な場合がある[1]。本来、不適切な初期値問題を差分法により数値的に解く場合には、数値的不安定性が発生し安定な解は得られないはずである[9]。実際の二流体モデルによる解析では、仮想質量項の付加、対流項への一次風上差分法の適用による陰的な数値拡散の付加、界面せん断力等の生成項による減衰など様々な効果により数学的に不適切な偏微分方程式から数値的に安定な離散化方程式を構成し、安定な数値解を得ていると解釈されている[7,10]。しかし、このときの安定条件は完全に明かではない[11]。そこで、二流体モデルの数値的安定性を調べるため、二流体モデルの基礎方程式系と同型の特性根を持ち、界面せん断力等の生成項の効果も考慮した次の複素伝播速

度を有する線形モデル方程式を導入する[7, 12,13]。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v(1+i\epsilon)\frac{\partial \phi}{\partial z} + K\phi = 0 \quad (1)$$

ここで、 v は対流速度の実数成分、 ϵ は対流速度の虚数成分の実数成分に対する割合、 K は生成項を線形化することにより得られる係数[14]で、それぞれ実定数である。また、 ϕ は輸送量、 t は時間、 z は空間座標、 i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表す。以後、式(1)に各種の高次風上差分法を適用した場合の数値的安定性を増幅係数を用いて検討する。まず、式(1)を次のように離散化する。

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \\ & + \frac{v(1+i\epsilon)}{\Delta z} \{ (1-\theta_1) \text{CONV}_j^n + \theta_1 \text{CONV}_j^{n+1} \} \\ & + K \{ (1-\theta_2) \phi_j^n + \theta_2 \phi_j^{n+1} \} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、対流項と生成項はそれぞれ θ_1 、 θ_2 を調節することによりその評価時刻を変えることができる。すなわち、 $\theta = 0$ ならば陽、 $\theta = 1$ ならば陰に評価される。 Δt 、 Δz はそれぞれ時間刻み幅、空間刻み幅を表し、上付き添字の n は時刻($t = n\Delta t$)、下付き添字の j は位置($z = j\Delta z$)を表す。また、 CONV は対流項の離散化に用いる差分法により決定され、一般に次のように表される。

$$\text{CONV}_j = \sum_{m=1}^5 a_m \phi_{j+m-3} \quad (3)$$

ここで、 a_m は対流項に用いる差分法により決定される定数である。本研究では、二次中心、一次風上、QUICK[15]、二次風上、三次風上、河村スキーム[16]の6種類の差分法を用いる。各差分法における a_m の値をTable 1に整理しておく。

各種の条件下における式(2)の数値的安定性を検討するため、 ϕ の波数 k のFourier成分 $\phi_j^n = \phi_0^n \exp(ijk\Delta z)$ を式(2)に代入し、

Table 1 a_m for each difference scheme.

Difference Scheme	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Centered	0	-1/2	0	1/2	0
1st-order upwind	0	-1	1	0	0
QUICK	1/8	-7/8	3/8	3/8	0
2nd-order upwind	1/2	-4/2	3/2	0	0
3rd-order upwind	1/6	-6/6	3/6	2/6	0
Kawamura	2/6	-10/6	9/6	-2/6	1/6

$\phi_0^{n+1} = \lambda \phi_0^n$ で定義される増幅係数 λ を求めると、 λ は次式で与えられる。

$$\lambda = \frac{1 - (1 - \theta_1)c(1 + i\varepsilon)\Psi - (1 - \theta_2)K \Delta t}{1 + \theta_1c(1 + i\varepsilon)\Psi + \theta_2K \Delta t} \quad (4)$$

ただし、

$$\Psi = \sum_{m=1}^5 [a_m \exp\{i(m-3)k \Delta z\}]$$

である。また c は Courant 数で $c = v \Delta t / \Delta z$ である。数値解が安定であるためには、 λ の絶対値 $|\lambda|$ がすべての波数 k に対して 1 以下となることが要請される。以下では、式(4)に現われる ε 、 K 、 c 、 θ_1 および θ_2 をパラメーターとして、各パラメーターが式(2)の数値的安定性に与える影響を上を示した 6 種類の差分法について検討する。

3. 半陰解法の数値的安定性

二相流の数値解析では、時間積分に半陰解法を用いる場合が多い[2,3]。このため、まず半陰解法を用いた場合の数値的安定性について検討する。

3. 1 基準条件における数値的安定性

式(2)で、時間積分に半陰解法を用い、対流項を一次風上差分で近似した場合の数値的安定性については、これまでも検討が行われている[12,13]。しかし、従来は各パラメーターを様々な値に設定したときの増幅係数を計算することにより、各パラメーターの影響を検討していた。本研究では、各パラメーター

が式(2)の数値的安定性に与える影響を、複素平面上における増幅係数の写像の概念を用いてより体系的に検討する。このため、写像の原像を決定するための基準条件が必要となる。基準条件として $\varepsilon = K = 0$ 、 $c = 1$ とし、さらに二相流数値解析でよく用いられる半陰解法と同様に $\theta_1 = 0$ (対流項を陽に離散化)、 $\theta_2 = 1$ (生成項を陰に離散化) とする。このときの増幅係数を λ_0 とすると、 λ_0 は式(4)より次のように表される。

$$\lambda_0 = 1 - \sum_{m=1}^5 [a_m \exp\{i(m-3)k \Delta z\}] \quad (5)$$

各差分法について、 $0 \leq k \Delta z < 2\pi$ における λ_0 を複素平面上に描いたものを Fig. 1 に示す。Fig. 1 より、基準条件において次のことがわかる。

- (1) 一次風上差分法は、すべての波数に対して $|\lambda_0| = 1$ となり安定である。
- (2) 高次差分法は $|\lambda_0| > 1$ となる場合があり、不安定である。
- (3) どの差分法を適用した場合でも、 λ の軌跡は(1,0)を通る。

(1)、(2)より、一次風上差分は高次差分と比べて数値的に安定であることがわかる。また、(3)についてはいずれの差分法においても $k \Delta z = 0$ のときに $\lambda_0 = 1$ となることから理解できる。以下では λ_0 を写像の原像と考え、

Fig. 1 Amplification factor for the basic condition: $\lambda_0[\varepsilon = K = 0, c = 1, \theta_1 = 0, \theta_2 = 1]$.

各パラメーターの値が変化した場合の増幅係数を λ_0 からの写像として考える。

3. 2 ε 、 K 、 c による写像の特性

本節では、3種類のパラメーター ε 、 K 、 c がモデル方程式の数値的安定性に与える影響を、複素平面上における写像の概念を用いて体系的に検討する。 $\theta_1=0$ 、 $\theta_2=1$ のとき、 ε 、 K 、 c が基準条件から変化した場合の λ は、 λ_0 を用いて次のように表される。

$$\lambda = \frac{1}{1+K\Delta t} \{1+c\sqrt{1+\varepsilon^2} e^{i\varphi} (\lambda_0-1)\} \quad (6)$$

ただし、 φ は次式で定義される。

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right) \quad (7)$$

式(6)より、 λ は λ_0 の一次変換による像と考えることができ、この一次変換は、

- ・写像1：点(1,0)に関する回転（回転角： φ ）
- ・写像2：点(1,0)に関する拡大または縮小（倍率： $c\sqrt{1+\varepsilon^2}$ ）
- ・写像3：原点(0,0)に関する拡大または縮小（倍率： $1/(1+K\Delta t)$ ）

の3つの写像の合成写像となっている。したがって、上記3つの写像における回転角や倍率は、 ε 、 K 、 c の値によってのみ変化し、使用する差分法とは無関係である。一例として、一次風上差分で $\varepsilon=0.5$ 、 $K=0.5$ 、 $c=$

0.5とした場合の λ_0 から λ への写像をFig. 2 (a)-(c)に示す。本図より、 ε 、 K 、 c がモデル方程式の数値的安定性に与える影響について以下のことがわかる。

- (1) λ_0 は写像1により λ_1 に写される。特に、 $\varepsilon \rightarrow \infty$ ならば $\varphi \rightarrow \pi/2$ となる。また $K=0$ の場合、 λ が点(1,0)を通ること、および点(1,0)における λ_0 の接線の傾きが ∞ であることから、 $\varepsilon \neq 0$ かつ $c \neq 0$ ならばすべての差分法で $|\lambda| > 1$ となる場合があり、数値解は不安定となる。
- (2) λ_1 は写像2により λ_2 に写される。このとき、 c を調節して倍率 $c\sqrt{1+\varepsilon^2}$ を小さくすれば安定化の効果があるが、 λ_1 の実数部に1よりも大きい値がある場合には、倍率の調節のみで安定化することはできない。したがって、どの差分法を用いた場合でも、 $\varepsilon \neq 0$ 、 $K=0$ の場合には c のみの調節により安定化できない。
- (3) λ_2 は写像3により最終的に λ に写像される。 $K\Delta t > 0$ ならば原点に関する縮小写像となるため、安定化の効果は大きい。したがって、 $K > 0$ であれば Δt を大きくし、かつ c を一定に保つことにより安定化できる。逆に、 c 一定で Δt を小さくした場合、数値解は不安定化する。

以上の考察より、 λ_0 から λ への写像は用いる差分法にはよらず、いずれの差分法を用いた場合でも、 ε と c が大きく、 K が小さい場

Fig. 2 Mapping from λ_0 to λ when $\theta_1=0$ 、 $\theta_2=1$
[1st-order upwind、 $\varepsilon=0.5$ 、 $K=0.5$ 、 $c=0.5$].

合に式(2)は数値的に不安定化することがわかる。また、 K は数値計算を安定化する上で重要な役割を持ち、特に、 $K=0$ かつ $\varepsilon \neq 0$ の場合には c の値によらず不安定になる。さらに、 c が一定ならば空間分割が細かいほど不安定化する。

3. 3 各差分法の増幅係数の具体例

次に、実際の条件下における各差分法の数値的安定性を把握するため、パラメーターに具体的な値を代入した場合の増幅係数を調べておく。前節での検討より、安定に数値計算を行う上で厳しい条件として、 $\varepsilon=0.5$ 、 $K=0$ 、 $c=0.5$ としたときの各差分法における λ の像をFig. 3に示す。Fig. 3より、この条件ではすべての差分法で数値的に不安定になることがわかる。次に、 ε と c は変化させず $K=0.3$ としたときの λ の像をFig. 4に示す。Fig. 3、4を比較すると、どの差分法でも K により安定化される傾向があるが、 $K=0.3$ では一次風上以外の差分法はまだ不安定であることがわかる。したがって、通常の半陰解法により二流体モデルに高次精度の差分法を適用して安定な解析を行うことは一次風上と比較して困難であると考えられる。ただし、もちろん K は安定化のために操作できるパラメーターではなく、安定化のためには他の方策が必要である。

Fig. 3 Image of λ for each difference scheme
[$\varepsilon=0.5$, $K=0$, $c=0.5$, $\theta_1=0$, $\theta_2=1$].

Fig. 4 Image of λ for each difference scheme
[$\varepsilon=0.5$, $K=0.3$, $c=0.5$, $\theta_1=0$, $\theta_2=1$].

4. 対流項および生成項の評価時刻が数値的安定性に与える影響

4. 1 生成項の評価時刻が数値的安定性に与える影響

前章の考察では、 $\theta_1=0$ 、 $\theta_2=1$ とした。本章では、 θ_1 、 θ_2 が式(2)の安定性に与える影響について検討する。まず、 θ_2 から検討する。式(4)で $\theta_1=0$ とすると、 λ は λ_0 を用いて次のように表される。

$$\lambda = \frac{\{1+c\sqrt{1+\varepsilon^2} e^{i\varphi} (\lambda_0-1) - (1-\theta_2)K\Delta t\}}{1+\theta_2 K\Delta t} \quad (8)$$

式(8)より、 $\theta_2 \neq 1$ の場合には原点に関する拡大または縮小の前に、実軸の負の方向に $(1-\theta_2)K\Delta t$ の平行移動が加わり、原点に関する縮小率は $1/(1+\theta_2 K\Delta t)$ に減少する。したがって、 K の値が大きいときには平行移動により λ が単位円の外側に移動する可能性がある。また、原点に関する縮小率が減少し写像3による安定化の効果が低下する。従って、従来から経験的に指摘されているように、生成項の陽な離散化は安定性上望ましくない。

4. 2 対流項の評価時刻が数値的安定性に与える影響

次に θ_1 が式(2)の数値的安定性に与える影

Fig. 5 Image of λ when θ_1 is a parameter [QUICK, $\varepsilon = 0, K = 0, c = 1, \theta_2 = 1$].

響を検討する。式(2)で θ_1 以外のパラメーターを基準条件($\varepsilon = 0, K = 0, c = 1, \theta_2 = 1$)に固定すると、 λ は λ_0 を用いて次のように表される。

$$\lambda = \frac{1 + (1 - \theta_1)(\lambda_0 - 1)}{1 - \theta_1(\lambda_0 - 1)} \quad (9)$$

QUICKを例にとり、 θ_1 をパラメーターとして式(9)より λ の像を求めた結果をFig. 5に示す。Fig. 5ではQUICKを例として示した

(a) without explicit diffusion term

が、対流項の陰な離散化は、すべての差分法に対して安定化の効果がある。しかし、対流項を陰に評価した場合には数値拡散が生じるため、数値解の精度が低下する可能性がある。したがって、本手法を用いる際にはさらに精度に関して検討しておく必要がある。

5. 陽的な拡散項の付加による数値解の安定化

5. 1 陽的な拡散項の導入

以上の考察より、従来と同様の手法を用いて二流体モデルの対流項に高次風上差分法を適用することは困難であることがわかった。したがって、高次風上差分法を用いるためには安定化のために何らかの方策が必要である。

そこで、まず高次風上差分法が数値的に不安定になる原因について考察する。筆者らは、既報[17]において対流・拡散方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (10)$$

に対して、Courant数 $c = v \Delta t / \Delta z$ と拡散数 $d = \alpha \Delta t / \Delta z^2$ をパラメーターとして高次差分法のLax-Richtmyerの意味での安定領域を調べ、Fig. 6(a)を得ている。ただし、時間積分には陽解法、拡散項には中心差分を用いている。図より、対流項に高次差分法を用

(b) with explicit diffusion term

Fig. 6 Stable region of the linear convection-diffusion equation.

いた場合、 $d=0$ のときの安定領域は $c=0$ だけなので、安定な計算は不可能であることがわかる。普通、一次元二流体モデルでは拡散は考慮されないため $d=0$ の場合に対応しており、これが安定な計算が困難となる主要な原因と考えられる。

ところで、式(10)の時間積分に陽解法、対流項に高次風上差分法、拡散項に中心差分を用いて差分方程式を導出し、Hirtの安定性解析[18]に従って、この差分方程式の各項をTaylor展開して連続体に対する偏微分方程式に還元すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + O(\Delta t^2, \Delta z^2) \quad (11)$$

が得られる。また、式(10)を用いて式(11)を変形し、三階以上の高階の微分項を無視すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(\alpha - \frac{v^2 \Delta t}{2} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (12)$$

が得られる。式(10)と式(12)を比較すると、離散化により式(10)に負の数値拡散項が付加されることがわかる。この負の数値拡散を打ち消し本来解くべき偏微分方程式をより高精度に近似する差分方程式を導くため、Leith法[8]で行われるように式(10)に陽的な拡散項を加えて、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(\alpha + \frac{v^2 \Delta t}{2} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (13)$$

とすれば、Fig. 6 (a)に示した安定領域はFig. 6 (b)のように変化する。Fig. 6 (b)より、陽的な拡散項を付加した場合には、 $d=0$ で高次風上差分法を用いた場合にも安定領域が存在することがわかる。したがって、 $d=0$ の場合には、陽的な拡散項の付加により高次風上差分法を用いた場合の数値的安定性を向上させることができる。なお、対流項に高次差分法を適用した場合、式(13)を差分化した次式

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + \frac{v}{\Delta z} \text{CONV}_j^n \\ & = \left(\alpha + \frac{v^2 \Delta t}{2} \right) \frac{\phi_{j-1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j+1}^n}{\Delta z^2} \end{aligned} \quad (14)$$

をTaylor展開し、偏微分方程式に還元すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (15)$$

となり、式(10)と一致する。すなわち、解くべき方程式の形は式(13)に変化しているが、差分解は元の方程式(10)と一致しており、陽的な拡散項の付加により精度の低下は生じていないことを注意しておく。

5. 2 半陰解法に陽的拡散項を付加した場合の数値的安定性

以上の対流・拡散方程式に関する考察から、二流体モデルのモデル方程式(1)の数値的安定性の向上にも陽的拡散項の追加は有効であると考えられる。そこで、式(1)に式(13)と同型の陽的拡散項を加えた

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v(1+i\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial z} + K\phi = \frac{v^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (16)$$

の数値的安定性を検討する。なお、前節でも指摘したように陽的拡散項の追加により差分式の精度は向上する。したがって、陽的拡散項の追加により精度の低下は生じないことを再度注意しておく。式(16)を式(2)のように差分化し、 $\theta_1=0$ 、 $\theta_2=1$ とする。また、拡散項は陽的に、中心差分で近似する。このときの λ は、 λ_0 を用いて次のように表される。

$$\lambda = \frac{[1 + c\sqrt{1 + \varepsilon^2} e^{i\varphi} (\lambda_0 - 1) - c^2 \{1 - \cos(k\Delta z)\}]}{1 + K\Delta t} \quad (17)$$

式(17)より、陽的拡散項を加えた場合には写像3による縮小変換の前に実軸の負の方向に $c^2 \{1 - \cos(k\Delta z)\}$ の平行移動が行われることがわかる。この平行移動により、Fig. 4 で不

Fig. 7 Image of λ for each difference scheme with explicit diffusion term [$\varepsilon=0.5$, $K=0.3$, $c=0.5$, $\theta_1=0$, $\theta_2=1$].

安定であった差分法でも安定化される可能性がある。陽的拡散項を追加し、Fig. 4 と同様の解析条件で λ を求めた結果を Fig. 7 に示す。図より、陽的拡散項の追加により一次風上のほかに中心差分、QUICK および三次風上の3種類の高次差分法も安定になることがわかる。また、二次風上と河村スキームはこの条件では不安定であるが、 c を小さくすれば安定化できる。以上より、陽的拡散項の追加は、モデル方程式の数値的安定化に効果があることが確認できた。したがって、本手法は、高次風上差分法を二流体モデルに適用するための手法の一つとして有効であると考えられる。実際の方程式に陽的拡散項を追加した場合の数値的安定性については、次報で報告する。

5. 3 完全陰解法に陽的拡散項を付加した場合の数値的安定性

4. 3 節で述べたように、対流項も陰に評価し完全陰解法を用いた場合には、数値的安定性は向上するが数値拡散が生じるために解析精度は低下する。この数値拡散を打ち消すために、式(1)に陽的な負の拡散項を加えて

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v(1+i\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial z} + K\phi = -\frac{v^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (18)$$

と変形すると、このときの λ は次式で与えら

Fig. 8 Image of λ for each difference scheme with explicit diffusion term [$\varepsilon=0.5$, $K=0.3$, $c=0.5$, $\theta_1=1$, $\theta_2=1$].

れる。

$$\lambda = \frac{1 - c^2(\cos \theta - 1)}{1 + K \Delta t - c(1+i\varepsilon)(\lambda_0 - 1)} \quad (19)$$

この場合の λ の像を Fig. 4、7 と同一の条件で描いたものを Fig. 8 に示す。Fig. 8 より、この条件では中心差分を除く全ての差分法で数値的に安定となる。また、中心差分でも Courant 数を調節することにより数値的に安定にすることは可能である。したがって、対流項を陰に離散化することにより生じる正の数値拡散を陽的な負の拡散項により消去する本手法も、高次風上差分法を二流体モデルに適用するための手法の一つとして有効であると考えられる。しかし、この方法を用いると、任意の Courant 数で無条件安定という完全陰解法の利点は失われる。したがって、半陰解法に対する優位性はなく、アルゴリズムの単純さの観点からは、半陰解法を用いるべきと考えられる。

6. 結論

本研究では、二流体モデルに高次風上差分法を適用するための基礎検討を実施した。対流項に複素速度を持つ線形モデル方程式を用いて、増幅係数を解析することにより、以下

の結論を得た。

- (1) 二流体モデルを用いた数値解析に現われるパラメーターが数値的安定性に与える影響を、複素平面上における写像の概念を用いて体系的に整理した。この結果、基準条件からの写像の回転角や倍率はパラメーターの値により一意に定まり、使用する差分法とは無関係であることを示した。
- (2) 二流体モデルの対流項に高次風上差分法を用いた場合、数値的安定性を確保することは困難であることを定量的に示した。
- (3) 高次風上差分法を二流体モデルの対流項に適用した場合に十分な数値的安定性を確保するために、離散化により生じる数値拡散を除去するための陽的拡散項を追加する手法を提案した。

Nomenclature

CONV: difference form of convective term
 K : interfacial drag coefficient
 a_m : coefficient for convection term of difference equation
 c : Courant number
 d : diffusion number
 i : imaginary unit
 k : wave number
 t : time
 Δt : time step
 v : real part of velocity
 z : position
 Δz : mesh size

Greek letters

α : diffusion coefficient
 ε : rate of imaginary part of velocity
 ϕ : dependent variable
 φ : rotational angle of mapping
 λ : amplification factor
 λ_0 : amplification factor for the basic condition
 θ_1 : implicitness of convection term
 θ_2 : implicitness of source term

Superscript

n : discrete time

Subscript

j : discrete location

参考文献

- [1] Lyczkowsky, R.W. et al., Nucl. Sci. and Eng., Vol. 66, 378-396 (1978)
- [2] Ransom, V.H. et al., NUREG/CR-4312, EGG-2396 (1987)
- [3] Liles, D.R. et al., NUREG/CR-3567, LA-9944-MS (1984)
- [4] Akimoto, M. et al., Proc. of 2nd Int. Top. Mtg. on Nucl. Power Plant Thermal Hydraulics and Operations, Vol. 1, 72-79, Tokyo (1986)
- [5] 富山、坂口、二流体モデル熱水力相関式の評価(II)研究成果報告書、88-98、日本混相流学会(1990)
- [6] Okano, T., Sugawara, S., Proc. of the Int. Conf. on Multiphase Flows, 303-306, Tsukuba (1991)
- [7] Stewart, B.H., J. of Compt. Phys., Vol. 33, 259-270 (1979)
- [8] Roche, P.J. (高橋他訳), コンピューターによる流体力学<上>, 111, 構造計画研究所(1978)
- [9] Richtmyer, R.D., Morton, K.W., Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience Publishers, Inc., New York (1967)
- [10] Ransom, V.H., Trapp, J.A., EGG-M-26682 (1983)
- [11] 日本原子力学会熱流動部会編, 気液二相流の数値解析, 朝倉書店(1993)
- [12] Ransom, V.H., 1st ASME/JSME Int. Conf. on Nucl. Eng., Int. Lecture Courses (II), 139-188, Tokyo (1991)
- [13] Trapp, J.A., ANS Int. Top. Mtg., Proc. of Advances in Math., Comp. and Phys., 3, 1.1.1-9 (1991)
- [14] Patankar, S.V. (水谷、香月訳) コンピューターによる熱移動と流れの数値解析、森北出版(1985)
- [15] Leonard, B.P., Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., Vol. 19, 59-98 (1979)
- [16] Kawamura, T., Kawahara, K., AIAA-84-0340 (1984)
- [17] 富山、高橋、日本原子力学会誌、Vol. 32, No. 10, 999-1008 (1990)
- [18] Hirt, C.W., J. of Compt. Phys. Vol. 2, 339-355 (1968)