写真撮影による下顎運動測定法

坂東 永一* 栗山 實** 河野 正司**

中野 雅徳** 長谷川成男**

Photographic Analysis of Mandibular Movement

Eiichi Bando*, Minoru Kuriyama**, Shoji Kohno**,

Masanori Nakano**, Shigeo Hasegawa**

I. 緒 言

下顎運動の測定法の1つに写真計測を利用する方法がある。東京医科歯科大学第2歯科補綴学教室でも電氣的測定法¹⁻⁴⁾は、その他^{5,6)}の方法とともによく用いられてきた。

写真計測法には、まず佐久間⁷⁾により開発されたマルチフラッシュ法がある。この方法は切歯点部前方に標点用の突起を出し、そこに2個の白い標点をつけ、シャッター開放でマルチフラッシュ光源によりガラス乾板上にこの標点の運動軌跡を撮影するものである。測定対象は下顎の矢状面内運動であり、2点2次元測定とよべるもので、下顎上の任意の点の矢状面内運動を算出しうる。この方法により末次⁸⁾は Vertical Stop のない被験者の下顎運動、下顎位について研究を行い、また河野⁹⁾は全運動軸を発見した。

マルチフラッシュ法に加えて写真法には古屋¹⁰⁾により開発された、ミラーを用い2方向からみた標点ランプの運動を同時に1枚のポラロイドフィルムに撮影する方法がある。この方法により古屋は顎関節症患者の切歯部の3次元運動について研究した。中野¹¹⁾はミラーとポラロイドカメラを両側顎頭部にも追加設置することで、下顎の3点3次元運動が記録可能なように改良して、切歯路

と顎路の関係について研究した。さらに、栗山¹²⁾の用いた方法では上顎および各カメラ部に標点を追加することで、上顎に対する下顎の運動をより純粋に測定できるようにして、歯牙指導要素を種々に変化させたときの顎路への影響を研究した。

この方法は、下顎の位置を立体的に絶対測定することを可能としたもので、写真計測法としては1つの完成形に到達したものである。そこで本論文において、この研究方法を中心として写真計測法による下顎運動測定の問題点、下顎運動測定データの誤差、データ処理法について検討を加えた。

II. 測定法について

東京医科歯科大学第2歯科補綴学教室で写真計測法を利用した下顎運動に関する研究の一覧を表1に示す。佐久間により開発されたマルチフラッシュ法は2点2次元計測であり、測定データは4個の座標値である。このうち3個が有効情報、1個は冗長情報である。

1959年のこの研究により写真法による下顎運動の解析への道は拓かれたが、全運動軸の発見には電子計算機の使用も可能となった約10年後の河野の研究までまたねばならなかった。古屋はミラーを使用して豆電球の動きを1枚のフィルム上に2方向から見た軌跡として撮影できるような装置を製作して、顎口腔機能に異常のある被験者を主とする切歯点部の3次元運動について解析した。中野は両側顎頭部全運動軸上にさらに標点を追加して、3台のカメラの測定データの同期をとることで3点3次元測定を可能にした。さらに、栗山の用いた方法では各フィルムの4隅に基準点を撮影するために12個の

* 徳島大学歯学部第2歯科補綴学教室

** 東京医科歯科大学歯学部第2歯科補綴学教室

* 2nd Prosthetic Dentistry, School of Dentistry, Tokushima University

** 2nd Department of Prosthodontics, School of Dentistry, Tokyo Medical and Dental University

昭和54年8月31日受付

表 1 写真計測法を利用して行われた下顎運動の研究

研究者	発 表	研究方法	研究対象	標 点	測 定 量	主たる研究成果	測定精度、データ処理
佐久間 孔毅	口病誌26 1511-1536 昭和34 1959	マルチフ ラッシュ 法	矢状面内 限界運動 (2点2次元 3要素)	切歯点部前方黑板に2個の白点 頭部動揺監視用標点 ミラーで矢状面内運動を監視	1下顎位に4座 標値×約80下顎 位×10人	測定方法・解 析方法の開発	切歯部0.1mm 機械式卓上計 算器
末次 恒夫	補綴誌5 131-169 昭和36 1961	マルチフ ラッシュ 法	矢状面内 限界運動 各種下顎位(2 点2次元3要素)	切歯点部前方黑板に2個の白点 側方偏位の少ない被験者を選択	4×80×12人	無歯顎者の切 歯点、顎頭点 運動範囲の明 示	切歯部0.1～ 0.5mm 機械式卓上計 算器
河野 正司	補綴誌12 350-380 昭和43 1968	マルチフ ラッシュ 法	矢状面内 限界運動 開閉路 (2点2次元 3要素)	切歯点部前方黑板に2個の白点 頭部動揺監視用に2個の白点 後方限界路を除き開口量10mmま での範囲で標点間距離の短縮量 が0.5mmを超えるものは除く	4×50×10人	全運動軸の発 見	切歯部0.1mm 医用器材研究 所 NEAC 2101
古屋 良一	補綴誌18 221-245 昭和48 1973	ミラー組 み合わせ ボロイ ドカメラ 1台	下顎切歯点部 の限界運動路 (1点3次元 3要素)	下顎切歯点前方40mmに豆電球を 1個 頭部動揺監視用1個	(3+1)×150× (30+40)人	顎機能異常者 の診断法の確 立	0.1mm 東大 HITAC 8800/8700
中野 雅徳	補綴誌19 461-479 昭和50 1975	ミラー組 み合わせ ボロイ ドカメラ 3台	歯牙接触滑走 運動 (3点3次元 6要素)	下顎側側頭部及び切歯点部に 計3個の豆球 頭部動揺監視用に1個	(3+1)×3× 6×31人	切歯 Guide の 算出法の確立	読取部0.12mm 東大 HITAC 8800/8700
栗山 実	補綴誌23 126-147 昭和54 1979	ミラー組 み合わせ ボロイ ドカメラ 3台	歯牙接触滑走 運動他 (3点3次元 6要素)	上顎基準用に9個、フィルム基 準用に12個、下顎に3個の計24 個の豆球標点	{2座標値×4隅 +4座標値×(上 顎3点+下顎1 点×220下顎位)} ×6経路×3カ メラ×5人	顎路の測定法 の確立	研究対象のす べての部位に おいて0.1mm ～0.25mm 東大 HITAC 8800/8700

標点ランプと、各フィルムに完全な上顎の動揺のデータを得るために各3点計9個の標点ランプを追加して、基準となる咬頭嵌合位が失われても各フィルム間でのデータが比較できるように、いいかえれば下顎位、下顎運動の絶対測定が可能ないように改良した。これで写真計測法としては一応完成した形となったわけであるが、標点数は2個から4個、4個から24個と等比級数的に増加して、写真法の限界に達した感がある。実際、この方法には1度に24個の標点ランプを使用しているので、読みとるべきデータの数が多いこと、1枚のフィルムに数下顎位を撮影したときに各下顎位毎には頭部動揺を補正しきれないこともある。しかし、写真測定法には装置の作製、実験が容易であり、また得られた記録が直接的に理解できるという優れた面もあるので、今後はこのような装置による場合でも光電変換等により自動測定をめざすべきであろう。

中野、栗山は顎頭部標点を全運動軸上に設置したが、これは生データをそのままで見ると見やすいという利点はあるが、作業側運動路は運動量が極端に小さく

なったり、あるいは後戻り運動^{5,13)}等では対応点を判別し難くなる欠点もある。任意の3点でのデータがあれば下顎上の任意の場所の運動は数学的に容易に求めることができるので、臨床用の検査機器の場合とはともかく、研究用には運動範囲の大きい場所に標点を設置する方が有利であろう。

なお、20 数年前の測定結果を見ると、これは写真測定法に限ってこのことではないが、限界運動範囲等に最近の結果とやや異なる点があるが、これはおそらく被験者側の問題ではなく、われわれ研究者側の知識に基づく問題であろう。測定装置の作製を含めて実験には下顎運動に関する十分な基礎的知識が必要かと思う。

III. 測定値の処理法について

1. 2次元データの重心基準剛体化処理法

写真法で得られるデータは空間に、ある位置を占めている標点のある平面に対する座標値として得られる。

マルチフラッシュ法による2点2次元測定の場合、図

図 1 矢状面内下顎運動の測定法 (佐久間, 末次, 河野)

図 2 標点間距離についての剛体条件のくずれの例 (河野)

横軸のスケールは写真乾板上での値であり、撮影倍率は 1/3.6 であるので、3.6 倍すれば実寸となる。負領域の誤差は点線で表わす分布がほぼ計測誤差であり、他は生物学的に起因する誤差と考えられる。

1に示すようにデータとしては標点 A, B の矢状面内における座標値 (x_a, y_a) , (x_b, y_b) の 4 つが得られる。しかし、これらの値から標点 AB 間距離を計算すると毎回一定値になるわけではない。この原因は実験中に標点のついているアルミ板標識がたわんで標点間距離が変わったと考えるより、測定値に誤差が含まれているためと考えられ、その差より測定精度を知ることができる。誤差の原因の 1 つは被験者が焦点平面以外の運動^{7,9)}をするという生物学的な要因によるものであり、他の 1 つは計

図 3 開口量と測定精度の例 (河野)

- : 後方限界運動路,
- △: 開閉口運動路,
- : 前方滑走-開口運動路

測上のことに起因するものである。実際の例を河野⁹⁾のデータについて示せば図 2 のようになる。誤差は真の標点間距離に対して、測定した標点間距離が短くなり負に分布するものがやや多くなり、標準偏差 $\sigma = 0.324$ mm である。計測した標点間距離が短くなる原因の大部分は下顎運動時に下顎が側方偏位して焦点平面から外れることにある。この要因を考えると、図 2 の点線で示すごとく、正の誤差を縦軸に対称に負にもとった分布が計測誤差であり、その他のものが下顎の側方偏位などに由来する生物学的な誤差と推定できる。この標点間距離の誤差 Δl と開口量との関係を求めると図 3 のようになり、一般に咬頭嵌合位付近のデータでは精度が良くなる。またこの Δl と計測した下顎運動経路との関係をみると、後方限界運動や開閉運動では開口量が大きくなると Δl も負領域に比較的大きな値をとるようになり、下顎が開口と共に側方偏位していることが推定できる。また前方滑走運動路では上下顎前歯に指導される運動であるので、前歯部の咬合状態の影響を受けるためか開口量の小さな範囲においても比較的大きな側方偏位が認められている。

このように観測値が剛体条件を満たさないことは稀れてはいるが、そのまま解析を進めるとか、モデル化あるいはシュミレーションを行うと不都合なことが生じやすい。2 点 2 次元のこの測定の場合、4 個の観測値 (x_a, y_a, x_b, y_b) が得られているとともに、標点間距離は既知の値で一定である。

そこで、いま 4 個の観測値に含まれている誤差の分布型および大きさが等しい場合について検討してみる。4 個の観測値 (x_a, y_a) , (x_b, y_b) に対する真の値を (X_a, Y_a) , (X_b, Y_b) としてそのときの誤差を $\pm e$ ($e \geq 0$) とすれば

$$\left. \begin{aligned} X_a &= x_a \pm ex_a \\ Y_a &= y_a \pm ey_a \\ X_b &= x_b \pm ex_b \\ Y_b &= y_b \pm ey_b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)式$$

となる。

いま、A、B 兩標点間の midpoint G に注目して、その真の座標値を (X_g, Y_g) 、上記の観測値から得られる座標値を (x_g, y_g) とすれば、

$$\left. \begin{aligned} x_g &= 1/2(x_a + x_b) \\ y_g &= 1/2(y_a + y_b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)式$$

$$\left. \begin{aligned} X_g &= x_g \pm ex_g \\ Y_g &= y_g \pm ey_g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)式$$

となる。ここで $\pm ex_g, \pm ey_g$ に注目すれば

$$\left. \begin{aligned} \pm ex_g &= 1/2(\pm ex_a \pm ex_b) \\ \pm ey_g &= 1/2(\pm ey_a \pm ey_b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)式$$

となる。 $|\pm ex_g|$ すなわち、 ex_g は ex_a あるいは ex_b の大きい方より大きくなることはない。 ey_g についても同様である。したがって、G 点では標点部分より誤差の小さい観測データが得られることになる。確率的には2個の観測値の平均値であるので、誤差は x 方向、y 方向のそれぞれについて $1/\sqrt{2}$ の大きくなる。 $\overline{AG}, \overline{GB}$ の距離は既知の一定の値であるので、直線 AB 上に G を基準にして逆に A、B の位置を求め直すことができる。このようにして求めた A、B の座標値はもとの、なまの観測値より誤差の大きさがそれぞれ $1/\sqrt{2}$ の大きさになっている。

ここまでは各観測値に含まれている誤差の大きさは等しいものとして議論を進めてきたが、精度に差がある場合にはそれぞれの観測値に重みをつけた、重み付きの重心 G を求め同様の処理をすることができ、このような処理法を重心基準剛体化処理と呼ぶことにする。

2次元運動の場合、運動の記述は基準座標系に対して移動する座標系の原点の移動 (x_0, y_0) とそのまわりの回転 θ の3つの要素で表すことができる。これに対して観測値は4個あるので、ここに述べる重心基準剛体化処理が可能となる。すなわち、4個の観測値のうち任意の3個を選ぶことで数学的に下顎の位置は一義的に決まってくるが、残りの1観測値を使って原点の移動に関する誤差を確率的に小さくする処理法である。座標軸の回転 θ に関しても、もちろん誤差は含まれているが、2標点を結ぶ直線 AB の傾きを合理的な方法で修正することはできない。また、重心基準剛体化処理後のデータより計算をすすめる場合は演算によって測定誤差を増大させる危険性が少ない。

図4 任意の点の運動算出における重心基準剛体化処理による効果

2点A、Bから任意の点Cを推定した場合処理によってCの誤差範囲は1/2の面積となる。

処理の効果を図4によって説明する。いま、観測すべき2標点A、Bがあり、 $\overline{AB}$ 間の距離は一定で一直線上を運動しているものとする。また、任意の点Cは点A、Bを通り、直線ABとそれぞれ一定の角をなす直線の交点として定義されていて、その点の運動も知りたいものとする(図4)。このときA、Bの測定を行えば、それぞれに誤差を持つため、 $A \pm e, B \pm e$ の範囲内のどこかに観測される。そこで観測された2つの標点から $\overline{AB}$ にそれぞれ一定の角度で2本の直線を引き、その交点Cを求めると、図中点Cのまわりに示した大きな平行四辺形のなかのどこかに位置することになる。これに対して重心基準剛体化処理を行うと誤差は確率的に小さくなり、A、Bの観測位置はそれぞれ $A \pm 1/\sqrt{2}e, B \pm 1/\sqrt{2}e$ の範囲内に求まり、Cは図中点Cのまわりの小さい方の平行四辺形の中に求まることになる。この大、小両平行四辺形の面積比は2:1になっている。

また、この2点2次元の解析において任意の点Cの定義を、Gを一端とする直線ABと一定の角をなす線分GCの他端点と改めると、Cは小さい平行四辺形の直線ABと平行な方の対角線上に求まることになる。これに対して点Cを生データのAまたはBからの線分他端点と定義すれば、大きい平行四辺形の対角線上に求まることになる。この対角線の長さの比は $1/\sqrt{2} : 1$ になっている。

このような問題は純粋に解析幾何学的に解けばどのような方法でも同じ正しい結果が得られるはずであるが、観測値に誤差が含まれているため、処理方法によっては結果の精度にこのような差があるのである。

2. 3次元データの重心基準剛体化処理法

重心基準剛体化処理を3次元運動に適用してみる。下顎に3標点(P, Q, R)を設けそれぞれについて(x, y, z)の座標値が得られ、各観測値の重みが(i, j, k)であるとき、重心 $G(x_g, y_g, z_g)$ の値は

$$x_g = \frac{i_P x_P + i_Q x_Q + i_R x_R}{i_P + i_Q + i_R}$$

$$y_g = \frac{j_P y_P + j_Q y_Q + j_R y_R}{j_P + j_Q + j_R}$$

$$z_g = \frac{k_P z_P + k_Q z_Q + k_R z_R}{k_P + k_Q + k_R}$$

となる。重みがすべて1.0すなわち等しい場合、それぞれの座標値に含まれる誤差は各標点の生のデータの誤差の $1/\sqrt{3}$ の大きさになる。重心Gの誤差の空間的な大きさは $(1/\sqrt{3})^2 \approx 1/5.2$ となる。この場合も得られた観測値9個のうち、少なくともP, Q, Rの要素を1個は含む任意の6要素で下顎位は一義的に決まるので、残りの3要素でより確からしい位置を求めることになる。上顎に対する下顎の座標系の原点の移動に関する3要素と各軸のまわりの回転3要素のうち、平面PQRの空間的傾きを合理的に修正する方法はないので、原点の移動に関してのみ修正することになる。

以上、述べたように重心基準剛体化処理法とは平均値の原理に基づき観測値から誤差が確率的に最も少なくなる点、すなわち重心を求め、以後この点を基準として解析をすすめることで、解析過程での誤差の増大を可及的に防止することを目的としたデータ処理法である。

3. 観測精度を剛体条件より推定する方法

写真法で得られるデータの要素数はその下顎位を一義的に定めるために最小限必要な要素数より多く得られることが多い。この冗長データがある場合には実験全体の観測精度について統計的に判定できるとともに、個々のデータについてもその精度をある程度まで推定することができる。例えば、2点2次元の場合観測データの要素数は4、必要要素数は3、冗長要素数は1で剛体条件による束縛要素は1である。

観測データに誤差が含まれている場合の誤差の符号について考察してみる。そこでは剛体条件を満たさないような組み合わせの場合と、逆に見かけ上剛体条件を満たす方向の組み合わせとが等確率で起こる。したがって、1要素の剛体条件を満たすからといって、ただちにそのデータが正しいと断定することはできないが、逆に剛体条件を満たさない場合は明らかに誤差を含んでいるとい

える。見かけ上条件を満たす方向と、乱す方向は等確率で起こるので全体のデータを統計的に評価することはできる。見かけ上誤差が大きくなる場合は誤差の符号は正負等確率で起こるはずである。もし等確率でない場合は何らかの原因による系統誤差が含まれている可能性が、解析によってとり除ける可能性がある。また、観測データの各要素に関して同じ大きさの誤差が存在しても、剛体条件を乱しやすさの感度の高い方向の要素とこれに垂直な感度の低い方向の要素とが存在する。

3点3次元の場合、観測データの要素数は9、必要要素数は6、冗長要素数は3で剛体条件による束縛要素数は各標点間の長さについて3、その各辺のなす角について3である。いま各辺の長さだけをチェックの対象として各辺について見かけ上誤差が打ち消される場合と拡大される場合の確率をおおの1/2とすると、誤差が存在するのに3辺そろって偶然に剛体条件が満たされる確率は $(1/2)^3 = 1/8$ 以下である。上下顎ともに3点3次元測定している場合に上下顎の各3辺、計6辺のすべてについての剛体条件の成立が偶然に起こる確率は $1/8 \times 1/8 = 1/64$ より高くない。したがって、このような場合にはそのデータを正しいと判定しても誤りを犯す危険は小さい。

さらに、3点3次元測定より標点を増やして4点3次元⁶⁾とした場合に得られる観測データ要素数は12、必要要素数は6、冗長要素数は6となり、標点間距離についての剛体条件による束縛条件は6となる。

栗山¹²⁾の用いた絶対写真計測法で、上顎は9標点、下顎は3標点でチェックした束縛要素は12であった。これがすべて満たされている場合に、偶然そうなる確率は $(1/2)^{12} = 1/4096$ より低く、正しいと判定しても誤りを犯す危険性はほとんどない。この方法で上顎9標点について得られる観測データ要素数27、必要要素数6、冗長要素数21であり、各標点間の距離に関する束縛要素数は36である。実際にはこのうちの9要素についてチェックを行った。

IV. 絶対写真計測法について

本計測法については、既に概略は報告してあるが¹²⁾、以下の3点を目指として開発したものである。

(1) 従来の測定法は咬頭嵌合位で重ね合わせることで、各下顎運動経路を比較するという咬頭嵌合位に対する相対位置の測定法であったのに対し、咬頭嵌合位がなくとも測定比較のできる絶対測定が可能な方法とする。

(2) 上顎に対する純粋な下顎運動を取り出し、データ

は任意の点の運動を容易に計算できるような標準形に直して整理する。

(3) 測定精度は石原¹⁴⁾以下下顎運動測定の基準となっている 0.1 mm を一応の目標とする。

などを念頭に置いて従来の測定器¹¹⁾、測定方法の改良を行ったので、以下データ処理の順に従い、処理方法と改良点について述べる。

1. 下顎運動測定装置の構成

下顎運動測定装置は、①撮影用カメラ（マミヤ・ユニバーサル・プレス：レンズの焦点距離 $f=100$ mm, $F3.5$, 絞り $=F22$, 中間リング使用）両側顎頭部、下顎切歯点部各 1 台、計 3 台、②ポラロイドフィルム Type 107 and 667, ③タイマー¹⁵⁾と新たに製作した電力増幅回路からなる標点滅装置、なお標点ランプの点灯特性ならびに寿命の改善を図るため予熱回路をもつけた、④頭部固定装置¹¹⁾、⑤標点、濱井電球社製 No.-0041 をフィルム位置基準用に各カメラ前に 4 個、計 12 個、頭部動揺測定用に上顎 Face-bow の各カメラ前に 3 個、計 9 個そして下顎運動測定用に下顎 Face-bow の両側顎頭部、下顎切歯部に各 1 個、計 3 個、標点総数 24 個、⑥座標読取装置¹¹⁾、等より構成され、データ処理は東京大学大型計算機センターにて行った。

2. ポラロイドフィルム上の標点の座標値の求め方について

カメラの前に固定した標点を置き、この標点を何枚かのフィルムに撮影すると標点は毎回各フィルムの同じ位置に撮影されるわけではない。これはフィルムがカメラ内で撮影時に同じ位置をとらないために起こる現象である。このためにデータはフィルム上で平行移動、回転、拡大、縮小されて撮影されることになる。基準位とすべき咬頭嵌合位が撮影されていないフィルム間のデータを比較するためにはこの影響をとり除かなければならない。そこで、各カメラの前の 4 隅に 4 個の標点を設置して、フィルム上のそれらの標点の座標値が予備実験で定めた標準値に戻るよう各フィルム毎に回帰式の係数を求め、そのフィルム上の全データをその係数を使った回帰式で基準化処理した。すなわち、フィルム上には図 5 に示ように 4 隅に基準標点 $P(x_p, y_p)$, $Q(x_q, y_q)$, $R(x_r, y_r)$, $S(x_s, y_s)$ の 4 点が撮影されている。予備実験で求めた基準座標値を $P(X_p, Y_p)$, $Q(X_q, Y_q)$, $R(X_r, Y_r)$, $S(X_s, Y_s)$ とすれば、 x, y それぞれについて

図 5 撮影された標点

フィルム位置基準化のための 4 隅の標点 P, Q, R, S と 2 方向からみた観測標点 D, D' が撮影される。

$$\begin{cases} X_p = A_1 + A_2x_p + A_3y_p + A_4x_py_p \\ X_q = A_1 + A_2x_q + A_3y_q + A_4x_qy_q \\ X_r = A_1 + A_2x_r + A_3y_r + A_4x_ry_r \\ X_s = A_1 + A_2x_s + A_3y_s + A_4x_sy_s \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$

$$\begin{cases} Y_p = B_1 + B_2x_p + B_3y_p + B_4x_py_p \\ Y_q = B_1 + B_2x_q + B_3y_q + B_4x_qy_q \\ Y_r = B_1 + B_2x_r + B_3y_r + B_4x_ry_r \\ Y_s = B_1 + B_2x_s + B_3y_s + B_4x_sy_s \end{cases} \dots\dots\dots(2)$$

となる。ここで (1) 式および (2) 式が成立するように $A_1 \sim A_4$ および $B_1 \sim B_4$ について連立方程式を解く。ついで、フィルム上のデータ $D(x_d, y_d)$ について次式により基準化データ $D(X_d, Y_d)$ を得る。

$$X_d = A_1 + A_2x_d + A_3y_d + A_4x_dy_d \dots\dots\dots(3)$$

$$Y_d = B_1 + B_2x_d + B_3y_d + B_4x_dy_d \dots\dots\dots(4)$$

以上の処理を鏡を通した像 $D'(x_d', y_d')$ を始め、撮影されているすべての標点について行う。また、この処理は各カメラ、各フィルム毎にすべて行う。これにより処理前の標準偏差 x 方向 0.294 mm (図 6), y 方向 0.275 mm (図 7), 拡大、縮小率 0.295% (図 8), 回転 0.061 度 (図 9) とバラツキのあった値を、各フィルム間の重ね合わせが可能のように基準化データとすることができた。

この処理により各フィルムが彎曲せず平面性を保っているかぎりはフィルムの位置ずれによる影響を除くことができるとともに、座標読取装置の水銀電池の電圧変動による影響等も取り除くことができる。すなわち、同じ空間位にある標点はフィルム上で常に対応する 2 つの 2 次元座標値として測定されることになる。

3. フィルム上のデータから空間座標値の求め方

空間における各標点の位置はフィルム上の 2 次元座標

図 6 ポラロイドフィルムの各カメラ内でのx方向のずれ(栗山)

図のスケールはポラロイドフィルムずれの大きさであり観測標点の運動は1/4に縮小されて撮影されているので観測データに及ぼす影響は2.5倍となる。

図 7 ポラロイドフィルムの各カメラ内でのy方向のずれ(栗山)

横軸のスケールの意味は図6と同じ。

図 8 ポラロイドフィルムに撮影される拡大、縮小率

基準位標点間距離を横軸100%にとつてある。
実線と破線は4隅の各々の対角線を示す。

図9 ポラロイドフィルムの各カメラ内での回転
横軸は基準位のフィルムを0度として角度で表示。
実線と破線は図8と同じ。

図10 絶対写真計測のための較正実験

値として得られるが、この値は光学的な歪を受けている。また、各カメラ間には光軸のずれ、位置設定誤差等が存在する。これらの誤差を修正し、各標点に統一した3次元座標値を求めるために以下の較正を行った。まず、3次元読取顕微鏡⁵⁾を大地に固定して、鏡筒部に実験に使用するものと同じ標点用ランプを取り付けた(図10)。このランプを各カメラの前で下顎運動の範囲を含むように3次元的に動かし、それぞれの位置で写真撮影を行った。顎頭部では150点を30枚のフィルムに撮影し、切歯部では150点について25枚の撮影を行った。

読取顕微鏡のある位置(x_{E1} , y_{E1} , z_{E1})に対し、顎頭部では直接撮影の矢状面投影に近いデータ(x_d , z_d)と鏡を通した水平面投影に近いデータ(x_d' , y_d)が得られ、切歯部では鏡で2度反射した前頭面投影に近いデータ(y_d , z_d)と同じく矢状面投影に近いデータ(x_d , z_d')が得られる。大地系空間座標(X_E , Y_E , Z_E)のそれぞれの要素について写真より得られた観測データについて各

8項からなる次のような回帰式を考えてみた。

$$x_{E1} = A_0 + A_1x_d + A_2y_d + A_3z_d + A_4x_dy_d + A_5y_dz_d + A_6z_dx_d + A_7x_dy_dz_d \dots (5)$$

$$y_{E1} = B_0 + B_1x_d + B_2y_d + B_3z_d + B_4x_dy_d + B_5y_dz_d + B_6z_dx_d + B_7x_dy_dz_d \dots (6)$$

$$z_{E1} = C_0 + C_1x_d + C_2y_d + C_3z_d + C_4x_dy_d + C_5y_dz_d + C_6z_dx_d + C_7x_dy_dz_d \dots (7)$$

$$* (A_i, B_i, C_i, i=0 \sim 7)$$

(5), (6), (7)式それぞれに決定すべき係数は8項(*)があるが、較正実験より与えられる式は150個($i=1 \sim 150$)あるので充分解ける。そこで、最小2乗法にて係数を求め、(5), (6), (7)式の右辺に代入すると、それぞれのデータについて空間座標(X_1 , Y_1 , Z_1)が求まる。このとき空間座標決定誤差

$$ex_1 = X_1 - X_{E1} \dots (8)$$

$$ey_1 = Y_1 - Y_{E1} \dots (9)$$

$$ez_1 = Z_1 - Z_{E1} \dots (10)$$

をそれぞれのカメラについて求め、その頻度分布を示したのが、図11である。なお、 ex_1 , ey_1 , ez_1 のあまりに大きいものは人為的なミスと認定してデータから取り除き、再度係数を求め直した。これにはソフトウェアで自動的に判定する方法¹⁶⁾もあるが、今回は実験者がそのつどすべてのデータに目を通して判定する方法をとった。同時にさらに係数の多い(11)式の形式

$$X_{E1} = A_0 + A_1x_1 + A_2y_1 + A_3z_1 + A_4x_1y_1 + A_5y_1z_1 + A_6z_1x_1 + A_7x_1^2 + A_8y_1^2 + A_9z_1^2 + A_{10}x_1y_1z_1 + A_{11}x_1^2y_1 + A_{12}y_1^2z_1 + A_{13}z_1^2x_1 + A_{14}x_1y_1^2 + A_{15}y_1z_1^2 + A_{16}z_1x_1^2 + A_{17}x_1^2y_1^2 + A_{18}y_1^2z_1^2 + A_{19}z_1^2x_1^2 + A_{20}x_1^2y_1z_1 + A_{21}y_1^2z_1x_1 + A_{22}z_1^2x_1y_1$$

(a)

(b)

(c)

図 11 絶対写真計測校正実験における空間座標決定誤差頻度分布曲線

表2 係数一覧表

A,B,C	X	R Y	Z	X	I Y	Z	X	L Y	Z
i=0	4.81	28.17	100.63	165.19	173.28	57.38	2.59	271.70	99.20
1	2.38	2.82E-2	-4.92E-2	-3.12	3.31E-2	3.70E-2	-2.44	-2.52E-2	-6.00E-3
2	-3.33E-2	2.42	2.60E-2	-5.93E-2	3.08	-1.06E-2	4.85E-2	-2.44	5.27E-2
3	-4.19E-2	-1.09E-1	-2.39	1.72E-2	-3.22E-2	-3.07	1.76E-2	6.83E-2	-2.43
4	2.88E-2	7.69E-4	-3.05E-4	5.70E-2	5.44E-2	-4.88E-4	-3.01E-2	-3.82E-4	-5.58E-5
5	-4.64E-4	2.70E-2	-2.92E-2	-4.33E-4	3.21E-4	-4.93E-4	3.90E-4	-2.83E-2	-3.14E-2
6	-1.46E-3	-2.47E-4	-5.06E-4	3.60E-4	2.51E-4	-4.57E-2	1.20E-3	-9.05E-5	-4.92E-4
7	3.00E-4	5.16E-5	4.24E-5	1.15E-4	1.07E-4	7.97E-4	-2.61E-4	-3.77E-5	3.40E-5

$$\begin{aligned}
 &+A_{23}x_i y_i z_i + A_{24}y_i z_i x_i + A_{25}z_i x_i y_i \\
 &+A_{26}x_i y_i z_i \dots\dots\dots(11)
 \end{aligned}$$

(各カメラについて, $i=1\sim 150$)

$$\begin{aligned}
 &+k_8 d_3 d_4 + k_9 d_4 d_1 + k_{10} d_1 d_2 d_3 + k_{11} d_2 d_3 d_4 + k_{12} d_3 d_4 d_1 \\
 &+k_{13} d_4 d_1 d_2 + k_{14} d_1 d_2 d_3 d_4 \dots\dots\dots(12)
 \end{aligned}$$

(D_{Y_E} , D_{Z_E} についても同様)

についてもすべてのカメラの各要素すべてのデータについて検討したが, 今回は(5), (6), (7)式の形式を採用した(図11). このため得られた係数は各カメラ, 各要素(x , y , z)毎に8個, 合計72個である. 係数の一覧表を表2に示す. 表の値より各カメラの相互位置は右顎頭部カメラ($X=4.81$, $Y=28.17$, $Z=100.63$), 左顎頭部カメラ($X=2.59$, $Y=271.70$, $Z=99.20$), 切歯部カメラ($X=165.19$, $Y=173.28$, $Z=57.38$) mm となることがわかる, また撮影倍率はRカメラの $x=\frac{1}{2.38}$, $y=\frac{1}{2.42}$,

$$z=-\frac{1}{2.39}, \text{ Iカメラの } x=-\frac{1}{3.12}, y=\frac{1}{3.08}, z=-\frac{1}{3.07}, \text{ Lカメラの } x=-\frac{1}{2.44}, y=-\frac{1}{2.44}, z=-\frac{1}{2.43}$$

であることを読み取ることができる. この処理により写真撮影されたデータは正しく空間座標, すなわち読取顕微鏡による大地系の座標(I)に変換される. 今回採用した(5)~(7)式および検討した(11)式の形式とともにデータの x_d , y_d , z_d を捨てている. 前章で検討した重心基準化の考え方に従えばこれらのデータは捨てるべきではなく, 点D(X_E , Y_E , Z_E)に対し, 写真上でデータ(d_1 , d_2), (d_3 , d_4) が得られたとき,

$$D_{X_E} = k_1 + k_2 d_1 + k_3 d_2 + k_4 d_3 + k_5 d_4 + k_6 d_1 d_2 + k_7 d_2 d_3$$

(12)式のような形式を検討すべきであった.

4. 純粋な下顎運動の求め方

咬頭嵌合位における下顎右側顎頭部の標点を原点とし, 全運動軸を y 軸これに垂直でカンペル平面と平行な軸を x 軸, 両者に垂直な軸を z 軸として, 先の大地系の座標(I)を各被験者毎の座標系(II)へ変換しこれを基準座標系とする. この咬頭嵌合位において上顎に設定した座標系(III)と下顎に設定した座標系(IV)は原点および各軸ともその被験者の基準座標系に一致させる.

各フィルム毎, 各運動毎に下顎座標系(IV)から, そのときの上顎座標系(III)の被験者基準座標系に対する運動を消去すれば, 各被験者の基準座標系に対する純粋な下顎運動(V)が求まることになる. いいかえれば上顎の座標系(III)が運動するたびにその値を求め, これが被験者の基準座標系(II)に一致するように, 下顎運動データの座標変換を行い, 上顎に対する純粋な下顎運動(V)を求めるのである. このとき各座標系の運動を

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & x_0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & y_0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & z_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(13)$$

(13)式の形で表現する. 互に独立した6個のパラメータが

あれば剛体の空間における位置は一義的に定まるが、種々の取り扱いに際しては式(13)の形式が便利なのでこれを採用した。式(13)は方向余弦に関して 9 個、原点の移動に関して 3 個の要素を持っている。各要素の値は被験者の基準座標系の各標点の座標値をもとにして日立製作所提供の 1 倍精度最小 2 乗法 (LESQ 1)¹⁷⁾ と 1 倍精度掃出し法 (LINS 1)¹⁷⁾ のサブルーチンを利用して計算により求めた。各標点の座標値の数値の大きさは、例えば右側顎頭の y 座標値はほぼ 0.0 であるのに左側顎頭部のそれは 300.0 程度の大きな数値となり、その間に 2~3 桁位のひらきがある。このためそのまま計算すると LINS 1 より行列が特異であるとの警告文が計算の都度出力される。そこで、原点を (-100.0, -100.0, -100.0) に移した計算機内部座標系に変換して、各数値の見掛けの桁数をほぼ等しくしてから計算した。これにより警告文は出なくなったが、見掛けの相対誤差がほぼ等しくなっただけで絶対誤差が小さくなったわけではない。ソフトウェア的に警告文が出ないようにすることは容易だが、計算機の各チェック機能を充分に活用するということから上記の方法をとった。したがって、計算機内部での以後の計算はすべて計算機内部座標系により行い、入出力部に変換ルーチンを設けることで被験者の基準座標系との対応を図った。実際の計算手順は以下のように行った。

一直線上にない 3 点のそれぞれから独立の 6 要素を選び出せば剛体の空間における状態を一義的に決定することはできる。しかし、今回は重心基準剛体化処理法の考え方を一部とり入れて、左右顎頭部 (LR)、切歯部 (I) の 3 標点で作る三角形 (RLI) の平面上に各標点の重み係数 1.0 で重心 (G) を求め、さらにこの平面に重心を通る垂線をたてて平面からの距離 100 mm のところに点 P を求める。直交座標系 I (x, y, z) から回転および平行移動した直交座標系 II (X, Y, Z) への変換式は

$$\left. \begin{aligned} x &= l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + x_0 \\ y &= m_1 X + m_2 Y + m_3 Z + y_0 \\ z &= n_1 X + n_2 Y + n_3 Z + z_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

で与えられる。つまり式(14)の各行の未知数 4 個に対して (R, L, I, G, P) の 5 点から各 5 個の方程式が得られ、これを各行ごとにそれぞれ最小 2 乗法で解くことにより式(13)の 12 要素がすべて求まる。

運動の最初のフィルムには上顎の標点 that 各カメラ毎に 3 点、計 9 点ある。それらフィルムについてそれぞれのカメラ部から 1 点ずつ標点を選び出し、3 個の平面について G と P を求める。ここで式(13)の各行 4 個の要素を求

めるために 15 個の式が成立し、それぞれを最小 2 乗法で解いた。

この方法は剛体化処理としては非常にゆるやかなものであり、式(14)にその点の座標値を代入して各標点の位置を再度計算すると生データに近いものが得られる。剛体条件のくずれは各方向余弦に吸収された形であるので、各軸の直交条件等は完全には満たされていない。上顎の座標系をこのように処理した後、下顎の標点のデータ修正を行う場合、各カメラ毎に起因する系統誤差が存在する場合には、これは有効な方法である。しかし、シャッターのセット、フィルムの着脱等でカメラの位置が動かないように固定を強化するなどの対策を施してあるので、このような処理法がよいのか、完全に剛体化処理をする方がよいのかは第 6 項で検討する。いずれにせよ原データが正しく得られていれば、どちらの処理方法によっても正しい結果が得られるので、上顎座標系の動きを消去した下顎標点の座標値より上顎と全く同じルーチンを使用して純粋な下顎運動を求めた。

5. その他の誤差要因

(1) 温度、湿度変化の影響

測定器 (図 10) のうち測定に直接関与する頭部固定装置、写真撮影装置の部分の大きさは約 30 cm × 30 cm × 30 cm である。これらは一部アルミ材が使用されているが、ほとんどは鉄材が使用されている。したがって、装置のこの部分の温度変化による膨縮は 30 cm × 20 × 10⁻⁶/°C = 6 μm/°C 程度と考えられる。この値は 10°C の温度変化で 60 μm 程度であるので、特に補正は行わなかった。また、ポラロイドフィルムの膨縮、座標読取器の温度による変化等の影響が考えられるが、これらの膨縮が一様に生ずるかぎり、先に述べたカメラ前の 4 基準標点の座標値を常に標準値に戻す操作で補正できる。また、今回はポラロイドフィルムにコーティング処理が不要な Type 667 を採用したので、フィルムの膨縮による影響は相当に小さくなり、実測値にみられるようにほとんど問題はなくなった (図 11)。

(2) 計算誤差

各種演算は、特に誤差の増大が予想される特別な場合を除いては 32 bit 単精度浮動小数点で行った。これは 10 進で仮数部 7 桁余の精度であり、累積誤差は最大下 2 桁程度と考えられる¹⁷⁾。この研究では 30 cm 程度の範囲を研究対象とするため計算誤差が 30 cm × 10⁻⁵ = 3 μm を越えることはないと考えられる。

(3) 生体に座標軸を設定する際の誤差

先に述べたような方法で各被験者ごとに基準座標系を設定した。Y軸は運動論的に決定された全運動軸を採用しているが、X軸はカンペル平面という形態学的な基準に平行に定めている。このことが同一被験者の繰り返し実験および被験者間のデータを比較するときどのような意味を持っているのかは今後の研究課題としたい。

6. 小括ならびに考案

この研究での測定精度は1標点の空間座標測定に関しては、すべての標点のすべての方向に対し図11に示したようにR, L, Iの標準偏差の平均値は0.094 mmであった。また、上顎の3個の三角形および下顎の1個の三角形の各辺の長さの基準長に対する差分を各データ毎

に出力して測定精度の基準とした(図12)。図12に示すように上顎に設置した標点の剛体条件のくずれからみた精度は標点間距離の差の標準偏差の平均0.109 mm、これの相対誤差は各辺約210 mmであるので、0.05%となる。下顎に設置した標点の剛体条件は上顎の動きを修正する前は標準偏差0.072 mm、上顎の動きの修正後は0.250 mmであった。したがって、最終的に得られた標準形のデータにおいて直交性の乱れも同じ程度となった。これらの値は各測定値毎にプリントアウトしたので、個々のデータの評価が可能である。

上顎の動きの修正の前後において下顎標点の剛体条件の乱れが拡大したことについて、少し補足説明してみる。誤差は演算操作において伝搬するが、加減算処理の場合それは

図 12 絶対写真計測における剛体条件のくずれの例(栗山)

$$\sqrt{\text{data (1) SD}^2 + \text{data (2) SD}^2} \dots\dots\dots (15)$$

となる。ここで、data (1) と data (2) が一様な測定誤差をもつならば、(15)式はもとの SD の $\sqrt{2}$ 倍となる。

図 12 に示した結果は ①頭部動揺の計算、②真の下顎運動を求める計算、③剛体条件の検討といずれも減算処理にあたるものである。したがって、誤差の伝搬は頭部動揺修正前については③で $\sqrt{\text{LSD}^2 + \text{LSD}^2} = \sqrt{2} \text{LSD}$ となり、頭部動揺修正後については①で、 $\sqrt{\text{USD}^2 + \text{USD}^2} = \sqrt{2} \text{USD}$ 、②で $\sqrt{\text{LSD}^2 + 2\text{USD}^2}$ 、③で $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\text{LSD}^2 + 2\text{USD}^2}$ となる。いま、上顎に関する USD と下顎に関する LSD を一様とすると、頭部動揺修正前、後の剛体条件のくずれに関する誤差、伝搬の比は $\sqrt{2} : \sqrt{6} = 1 : \sqrt{3}$ となる。しかし、これは理論値で図 12 では $1 : 3 \sim 4$ となっている。この差異はおそらく以下のことによるものであろう。

剛体条件のくずれの標準偏差は上顎で $109 \mu\text{m}$ 、下顎で $72 \mu\text{m}$ なので、この算出のもとである観測された各標点の座標値の誤差の標準偏差はその $1/\sqrt{2}$ に相当する $51 \sim 77 \mu\text{m}$ となる。そしてこの $51 \sim 77 \mu\text{m}$ を除いた残りの標準偏差は図 11 の校正実験の結果からみて、校正時の真の値となるべき 3 次元読取顕微鏡の設定誤差などに原因するものであろう。

なお、校正時にこの程度の位置設定誤差があったにもかかわらず、写真計測法としては高い精度が得られたのは、多数の点から最小 2 乗法で変換式を求めたためである。

次にデータの処理方法についてであるが、上顎の動きの修正の前後において下顎標点の剛体条件の乱れは拡大したので、各フィルムに起因する系統誤差は存在しないことになり、完全な重心基準剛体化処理を行うべきであったことになる。

標点の観測から下顎運動の解析までには先にも少し触れたが、①頭部動揺の計算、②真の下顎運動を求める計算、④下顎運動を標準形（原点あわせ）とする計算、⑤下顎運動解析のための計算の 4 段階がある。したがって、剛体化処理を全く行わない時の誤差の伝搬は $2\sqrt{2}$ 倍となり、完全剛体化処理を行えば、第三章、第 2 項にも述べたように各標点の観測された座標値に含まれる誤差は $1/\sqrt{3}$ となるので、誤差の伝搬も前者に比べて $1/\sqrt{3}$ となる。すなわち、完全剛体化処理によって座標値の誤差の標準偏差を約半分とすることができ、解析を進めるために計算を行っても誤差を増大させることはないということになる。ただし、剛体条件の乱れのチェックは常に 0.0 となり、このような方法で各観測値の測定

精度を検定することはできなくなる。

しかし、剛体化処理を行わなかったときの値を 1.0 とすると、完全に剛体化処理を行えば $1/\sqrt{3} = 0.577$ となるが、栗山¹²⁾の顎路に関する研究に際しては、系統誤差の存在を恐れ、誤差 1.0 の点を 3 点と誤差 $1/\sqrt{3}$ の点を 2 点等価に扱い最小 2 乗法で計算をすすめたので、各標点の誤差は $\sqrt{\frac{1^2 + 1^2 + 1^2 + (1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2}{5}} = 0.856$ という不完全なゆるい剛体化処理しか行わなかった。

標点の発光体としては現在入手可能なもののなかで可及的に小さいものを選んだが、それでも外形は 1 mm の大きさを持ち、発光部のフィラメントは不整形をしているため、下顎運動により標点とカメラの相対的位置が変化すると、微小電球の被計測部位が異なってくる。このため下顎が大きく動いたときに剛体条件のくずれが増大する現象がみられた。これは系統的誤差であり、補正が可能なものと考えられるが今回は特に対策はとらなかった。また、このことは校正時に読取顕微鏡につけた標点と各被験者の標点の被測定部位が完全には一致していないということでもある。

さらに上・下顎の Face-bow をそれぞれ完全に固定することが難しいために生ずる誤差も認められ、咬頭嵌合位を繰り返したときの上下顎の相対位置のずれる現象の大部の原因となっているであろう。また Face-bow に関してはそのものの自体の歪も運動時には考えられる。

上顎の Face-bow には各カメラ毎に 3 個の標点がついているが、これは下顎位の絶対測定をするための改良過程の産物であり、最終的に実験の全体のバランスという点からは各 1 個の合計 3 個でもよかったものである。

この計測方法では頭部動揺を消去して純粋な下顎運動を抽出することになっているが、1 枚のフィルムに数個の下顎位が撮影されている場合、上下顎標点間の対応関係が難しいこと、また後戻り現象などの場合に時間的關係、つまり他のカメラのフィルムとの対応関係が難しいことの欠点をなお残している。これを解決するためには 1 下顎位毎に 1 枚のフィルムに撮影するとか、光電変換により電氣的に処理する方法などが考えられる。しかし、光電変換によるものは写真計測法とはいいたいがたいし、1 下顎位、1 フィルムという方法はポラロイドフィルム使用の場合には不可能に近いともいえる。また、長尺フィルムを自動送りで使用するにしてもそのデータ読取りおよびデータ処理は大変な作業になり、理論的には、この方法に対する改良も可能だが、実際問題として

は写真撮影による下顎運動測定としてはこれではほぼ極限にまで到達しているといえる。

測定精度については、写真計測法以外の下顎運動測定法を含めても0.1 mmとするものが多いが、実際に論文を詳読すると計測部位の1要素についてのものであったり、読取器の精度であったりすることもある。この絶対写真計測法での精度標準偏差 250 μ m という値は一見大きく見えるが、現在歯科が関心を持っているような範囲のどの部位に関してもこの精度であり、種々の解析処理をしてもこれ以上に誤差を増大させないという値である。このような意味からは先人の測定精度よりはるかに高いものといえる。

しかし、生体の要求する補綴物の精度¹⁸⁾等と比べれば必ずしも十分な値とはいえないので、写真法を利用するか否かは別問題として、なお下顎運動測定の精度向上には努力しなければならないであろう。

V. 総 括

写真計測法による3点3次元下顎運動測定法を完成形と考えられる程にまで改良することに成功したので、その測定装置の構成および測定方法について記述した。

また、観測値からの解析結果の精度を高めるために重心基準剛体化処理法を提案した。

文 献

- 1) 大石司郎：アーム型運動分解器とコンデンサー法による下顎運動の研究。第2報 側方滑走運動ならびに咀嚼運動の水平面投影に関する考察。補綴誌，7：196～205，昭和38（1963）。
- 2) 川口豊造：電気的測定装置による習慣的開口および嚙下の歯牙接触位に関する研究。補綴誌，12：397～422，昭和43（1968）。
- 3) 田中伐平：ID-tracer，投稿予定，補綴誌。
- 4) Shoji Kohno, Eiichi Bando, Batsuhei Tanaka, Minoru Kuriyama and Tsuneo Tabata: Man-

dibular Movement and Mandibular Position in Man. In Jaw position and jaw movement, edited by Kubota, K., Nakamura, Y. and Schumacher, G. H. (Eds.), VEB Verlag Volk und Gesundheit, Berlin, 1979, (in press).

- 5) 真柳昭弘：側方滑走運動における顎頭運動に関する研究，補綴誌，14：158～182，昭和45（1970）。
- 6) 野村孝太郎：側方咬合位における咬合器の再現性と運動様式に関する研究，補綴誌，15：239～266，昭和46（1971）。
- 7) 佐久間孔毅：マルチフラッシュ装置による有歯顎の前後および開閉運動の研究，口病誌，26：1511～1536，昭和34（1959）。
- 8) 末次恒夫：マルチフラッシュ装置による無歯顎の前後，開閉運動並びに下顎位の研究，補綴誌，5：131～169，昭和36（1961）。
- 9) 河野正司：下顎の矢状面内運動に対応する顎頭運動の研究，第2報，マルチフラッシュ装置による矢状面運動の解析，補綴誌，12：350～380，昭和43（1968）。
- 10) 古屋良一：顎口腔系の機能に異常を有する者の下顎運動の研究，補綴誌，18：221～245，昭和50（1975）。
- 11) 中野雅徳：側方滑走運動における顎路と切歯路に関する研究，補綴誌，19：461～479，昭和50（1975）。
- 12) 栗山実：歯牙指導要素が平衡側顎路に及ぼす影響について，補綴誌，23：126～147，昭和54（1979）。
- 13) 坂東永一，新井泉，古屋良一，長谷川成男，田端恒雄：下顎限界運動の図形表示による解析，補綴誌，20：295～303，昭和51（1976）。
- 14) 石原寿郎：下顎運動に関する最近の研究，口病誌，30：81～99，昭和38（1963）。
- 15) 福島俊士：習慣的開閉運動における顎頭運動の研究，補綴誌，15：267～290，昭和46（1971）。
- 16) 中川徹，小柳義夫，戸川隼人：最小二乗法標準プログラム SALS（第2版）利用の手引（第1部 基礎篇・第2部 制御・解法篇），東京大学大型計算機センター，1975，（整理番号T-3-06，T-3-07）。
- 17) HITAC 8700 MSL：プログラム・マニュアル（アプリケーション），8700-7-005，昭和47（1972）。
- 18) 田中伐平：咬頭咬合位における補綴物の高さが顎口腔系に及ぼす影響，補綴誌，19(4)：480～506，昭和51（1976）。