剛体条件の補正に関する研究

第4報 誤差の伝播

舟久保 太 根本 一男

Studies on the Correction of the Rigid Body Condition

Part IV. Propagation of Error

Takashi Funakubo and Kazuo Nemoto

Abstract : When we study articulator movement and mandibular movement, we usually regard them as the rigid body movements. Now we attach some targets to an articulator and observe their three-dimensional displacements. Our observational data consist of X, Y and Z values of targets, and each value has an accidental error. When we correct these errors by the method of least squares, we can obtain the most probable values which make us to calculate a position and a displacement of the rigid body as observational results.

In this article, in the first place, we indicate accidental errors in our observational data by the use of formulae from ② to ⑤. Secondary, we investigate theoretically how to propagate these errors to standard errors of observational results according to law of the propagation of errors (formulae from ⑥ to ⑪). Using the variance and covariance matrix, which is obtained when we correct accidental errors by the method of least squares, we can easily calculate these standard errors (formulae from ⑫ to ⑲). Lastly, we show concretely how to calculate standard errors when we correct accidental errors by the indirect conditional observation of the method of least squares (formulae from ⑳ to ㉔). We also point out that we can calculate standard errors of observational results by the use of the direct conditional observation and the indirect observation of the method of least squares to correct accidental errors.

Key words : propagation of error, accidental error, standard error, method of least squares, indirect conditional observation

目 次

I. 緒 言

II. 誤差の伝播

1. 記号の定義

2. 単位重みの1回観測の標準誤差

3. 最確値への誤差の伝播

4. 観測結果への誤差の伝播

5. 分散共分散行列

III. 剛体上の任意点の位置とその標準誤差—条件付間接法を例として—

1. 座標系の名称と位置行列

2. 位置行列の決定

3. 任意点の位置を求めるための式

4. 任意点の位置に関する標準誤差

筑波大学臨床医学系

Department of Stomatology, Institute of Clinical Medicine, the University of Tsukuba

昭和60年11月12日受付

IV. 考 察

1. 測定誤差と観測結果について
2. 独立間接法で測定誤差を補正する場合
3. 条件付直接法で測定誤差を補正する場合
4. 測定誤差の補正法に関する問題点
5. 基準座標系の決定について
6. 任意点の変位距離とその標準誤差

V. 結 論

1. 2. 3. 4. 5.

文 献

I. 緒 言

下顎や咬合器を剛体と考え、これにいくつかの観測標点を取り付け、その立体的変位を観測して得たデータには測定誤差が含まれている。この測定誤差には定差（定誤差）と過失（過失誤差）および偶差（偶発誤差）の3種類がある。定差と過失は観測条件を一定にしたり、注意深く観測することによって避け得るが、偶差は人為的には絶対に除き得ないとされる。通常、測定誤差という場合には、この偶差を意味している¹⁻⁴⁾。観測データにおける測定誤差（偶差）の存在は、本来一定であるべき観測標点間距離の変化、つまり剛体条件のくずれとなって現れる⁵⁾。そこで著者らは、観測データに含まれる測定誤差を、剛体条件が満足されるように補正する方法として、条件付間接法（第1報）と条件付直接法（第2報）および独立間接法（第3報）を報告した⁶⁾。これら3つの測定誤差の補正法は、いずれも最小二乗法を応用し、剛体の空間的位置や立体的変位を明らかにする要素を最確値として求めている。したがって、測定誤差の補正を行った後、これらの最確値を利用して、剛体上の任意点の3次元的位置やその立体的変位を観測結果として算出することも可能である。

本論文では、観測データに含まれる測定誤差が、最確値やそれらを利用して得た観測結果にどのように伝播するのかについて検討し、これを標準誤差^{2,7)}（標準偏差^{1,3,4)}）として算出する方法を示している。標準誤差の算出方法は、誤差の伝播法則に基づくもので、3つの測定誤差の補正法のどれにでも適用できる。観測データに含まれる測定誤差の補正を行い、最確値の標準誤差や剛体上の任意点の標準誤差を算出すると、利用する補正法によって最確値の個数や意味が異なるから⁶⁾、最確値の標準誤差は比較できないが、3次元的な変位をした剛体上の任意点の位置とその標準誤差は、どの補正法を利用して

も同じである。

II. 誤差の伝播

測定誤差（偶差）を定量的に取り扱うための表現方法の1つとして、標準誤差がある。観測データの測定誤差を標準誤差で表し、これから観測結果の標準誤差を求めることが誤差の伝播である。観測データの測定誤差（偶差）は Gauss の誤差法則にしたがって確率的に発生するから、観測結果の標準誤差は Gauss の誤差伝播の法則を利用して求め得る¹⁻⁴⁾。標準誤差の代わりに公算誤差や平均誤差を使用することも可能である¹⁾。

1. 記号の定義

本論文では、条件付間接法、条件付直接法、独立間接法のいずれで測定誤差の補正を行っても、標準誤差の算出が可能となるような形式で、誤差伝播の法則を検討する。そこで、これまでの補正法⁶⁾と、本論文で共通して使用する記号を再度定義しておく。

$$B = (b_1 \ b_2 \ b_3 \ \cdots \ b_k)^t$$

$$U = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_k)^t$$

$$V = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ \cdots \ v_k)^t$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & 0 \\ & & p_3 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & p_k \end{pmatrix}_{(k \times k)}$$

A = 条件付間接法と条件付直接法で使用する観測方程式の係数行列で、その大きさは $k \times s$

A_n = 独立間接法で使用する観測方程式の係数行列で、その大きさは $k \times s$

t : 転置行列⁸⁾を意味する。

m : 観測標点の個数

k : 観測方程式の個数 ($k=3m$)

s : 未知数（最確値の個数）

g : 拘束条件式の個数

.....①

観測値行列 B は、剛体がある顎位に達したとき、剛体に固定された m 個の観測標点の3次元的位置を、測定機器で各標点につき1回計測して得た $k (=3m)$ 個の座標を要素とする行列である。この行列 B の各要素には、測定誤差が含まれる。どの補正法を利用する場合でも、基本的には行列 B の構成要素は同じであるが、補正計算を簡潔にするために、条件付直接法では、その並び方を

変えることもある。

最確値行列 U は観測方程式の未知数（最確値）を要素とする行列である。測定誤差を補正する際に、どの補正法を利用するかによって、最確値行列 U の要素の意味やその個数は異なる。条件付間接法では、剛体に固定された座標系の原点の座標と各座標軸の方向余弦の合計 12 個 ($s=12$) を最確値として求め得る。独立間接法では、剛体に固定された座標系の原点の座標と各座標軸まわりの回転角度の合計 6 個 ($s=6$) を最確値として求め得る。条件付直接法では、測定誤差が補正された観測標点の座標 (k 個) を最確値として求め得る ($s=k=3m$)。行列 B と行列 U の構成要素は、いずれも測定機器の座標系における値である。その具体的な並び方については、第 1 報と第 2 報の表 1 および第 3 報の⑩式で示した。観測結果（たとえば、立体的変位をした時の剛体上の任意点の位置）を算出するための関数は、行列 U の要素 u_e ($e=1, 2, 3, \dots, s$) を変数とする。そして、この関数に測定誤差の補正によって明らかになった最確値を代入して、具体的な結果を求め得る。

残差行列 V は、測定誤差を含む観測標点の座標と測定誤差が補正された観測標点の座標との差を構成要素 (k 個) とする。したがって、条件付直接法では行列 B と行列 U の差として簡単に求め得る。しかし、条件付間接法と独立間接法では、それらの補正法で求めた最確値行列 U を利用して測定誤差が補正された観測標点の座標を算出し、これと観測値行列 B の差によって行列 V を求め得る。行列 V の具体的な求め方については、第 2 報⑩式（条件付直接法と条件付間接法の場合）と第 3 報⑩式（独立間接法の場合）で説明した。

重み行列 P は、観測標点に測定精度の違いがある場合に各データを等価なものとして扱うために使用され、第 1 報 IV 章 3 節で説明した。

条件付間接法と条件付直接法における観測方程式の係数行列 A は、初期状態における各観測標点の座標を要素とし、逐次近似計算の過程で常に一定である。その具体的な要素については、第 1 報と第 2 報の表 1 で示した。

独立間接法の観測方程式の係数行列 A_n の要素は、初期状態の観測標点の座標と、それまでの逐次近似計算で求めた最確値の近似値を変数とする関数である。そのため、逐次近似計算の回数によって変化する。誤差の伝播では、逐次近似計算の打ち切り条件を満たしたときの係数行列が使用される。その具体的な要素については、第 3 報の⑩式で示した。

利用する補正法によって、未知数（最確値）の個数 s

表 1 実験系の自由度

	条件付間接法	条件付直接法	独立間接法
観測標点の数	m	m	m
観測方程式の数 k	$3m$	$3m$	$3m$
未知数の数 s	12	$3m$	6
拘束条件式の数 g	6	$3(m-2)$	0
実験系の自由度	$3(m-2)$	$3(m-2)$	$3(m-2)$

と拘束条件式の個数 g は異なる（表 1）。第 3 報 III 章 1 節⑩式で報告したように、いずれの補正法も

剛体系の自由度 $6=s-g$ =独立な未知数 6 個を満足している⁶⁾。

2. 単位重みの 1 回観測の標準誤差

観測データの測定誤差を標準誤差で表すために、次のように考える。真値と観測値の差が測定誤差（偶差）である。しかし、どのような精度の良い観測を行っても真値を知ることはできないから、真値の代わりに最確値（剛体条件が満足されるように測定誤差が補正された後の標点の座標も最確値である）を使用し、これと観測値との差、つまり残差を測定誤差の推定量として利用する。測定誤差の推定量としての残差は、測定時の小原因によって、ある場合には正、ある場合には負の方向に変動するから、1 つの実験系の誤差の総量を表す方法として残差の 2 乗和を考える。

今、①式の残差行列 V を利用して、残差の 2 乗和 v^2 を②式によって定義する。

$$\begin{aligned} v^2 &= V^t P V \\ &= p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_k v_k^2 \\ &= \sum_{j=1}^k p_j v_j^2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^k} \right\} \dots\dots\dots \text{②}$$

残差の 2 乗和 v^2 は、ある顎位に達したときの観測標点 W_i ($i=1, 2, 3, \dots, m$) の X 座標、Y 座標、Z 座標を各 1 回だけ観測することによって生じた測定誤差の総量である。残差の 2 乗和を実験系の自由度¹⁾で割れば、単位重みの 1 回観測の分散 ρ^2 を求め得る。さらに、 ρ^2 の平方根をとれば、単位重みの 1 回観測の標準誤差 ρ を得る。それらを③式と④式に示す。 $(k-s+g) = \{k-(s-g)\}$ は、実験系の自由度である。どの補正法でも、実験系の自由度は $3(m-2)=(k-6)$ となることを、表 1 に示した。

$$\rho^2 = \frac{V^t P V}{k-s+g} \dots\dots\dots \text{③}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{V^t P V}{k-s+g}} \dots\dots\dots \text{④}$$

ρ^2 と ρ は、行列 B の各要素が1回の観測で持つと考えられる測定誤差を、重み1で表している。測定誤差が小さければ、 V, v^2, ρ^2, ρ も小さな値を示すから、いずれも測定精度を表すと考え得る。

3. 最確値への誤差の伝播

観測値行列 B の要素 b_j の重みは、①式より p_j ($j=1, 2, 3, \dots, k$) である。一方、単位重みの1回観測の分散は、③式より ρ^2 である。よって、重みを考慮した b_j の分散 σ_j^2 と標準誤差 σ_j は⑤式によって示される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_j^2 &= \frac{\rho^2}{p_j} \\ \sigma_j &= \frac{\sqrt{\rho^2}}{\sqrt{p_j}} = \frac{\rho}{\sqrt{p_j}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑤$$

行列 B の要素 b_j の標準誤差 σ_j は⑤式によって示されるから、最確値行列 U の e 番目の要素 u_e の標準誤差 η_e を求めるためには、行列 U の要素が行列 B の要素の関数として表される必要がある。

条件付間接法と条件付直接法で、拘束条件式 $F(U) = C$ を満足する行列 U は、第1報の⑧式と⑩式より

$$\left. \begin{aligned} U &= (E_n - J_n) U_1 + K_n C_n \\ &= (E_n - J_n) N^{-1} A^t P B + K_n C_n \\ N &= A^t P A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑥$$

と表される。⑥式で使用する行列 E_n, J_n, U_1, K_n, C_n については、第1報と第2報で定義した。-1は逆行列⁸⁾を表す。ここで

$$\left. \begin{aligned} T &= (E_n - J_n) N^{-1} A^t P \\ C_e &= K_n C_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑦$$

とおけば、行列 U は行列 B と定数行列 C_e を用いて

$$U = TB + C_e \dots\dots\dots ⑧$$

と表し得る。

独立間接法では、測定機器の座標系と剛体に固定された座標系が重なっている初期状態を最確値の近似値（近似値行列 U_1 の要素がすべて0）と考え、 n 回の逐次近似計算によって、計算の打ち切り精度を満足する行列 U を得る（第3報II章）。その場合の行列 U は、第3報⑩式より

$$\left. \begin{aligned} U &= N_n^{-1} A_n^t P (B - C_n) + U_n \\ N_n &= A_n^t P A_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑨$$

と表される。もしも、最確値の近似値をうまく選ぶことが可能なら、1回の計算で打ち切り条件を満足する最確値を得ることができる。したがって、行列 U_n と C_n は定数として考え得る。そこで

$$\left. \begin{aligned} T &= N_n^{-1} A_n^t P \\ C_e &= N_n^{-1} A_n^t P C_n + U_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑩$$

とおけば、独立間接法の行列 U は行列 B と行列 C_e を用いて、やはり⑧式で表し得る。⑨式で使用する行列 C_n, U_n は第3報で定義した。

条件付間接法や条件付直接法で測定誤差を補正した場合には⑦式、独立間接法の場合には⑩式を利用して、⑧式における T と C_e を計算する。そして、この T と C_e を⑩式のように示せば、⑧式は⑪式のように示し得る。ただし、行列 T と C_e の大きさや要素は、利用する補正法によって異なる。

$$\left. \begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1k} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2k} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{s1} & t_{s2} & t_{s3} & \dots & t_{sk} \end{pmatrix} \\ C_e &= (c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots \ c_s)^t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑪$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1k} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2k} \\ t_{31} & t_{32} & \dots & t_{3k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{s1} & t_{s2} & \dots & t_{sk} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{(k-1)} \\ b_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix} \\ \downarrow U & \quad \quad \downarrow T \quad \quad \downarrow B \quad \quad \downarrow C_e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑫$$

行列 U の e 番目の要素 u_e は⑫式を利用して⑬式のように示し得る。

$$\left. \begin{aligned} u_e &= t_{e1}b_1 + t_{e2}b_2 + \dots + t_{ek}b_k + c_e \\ &= \left(\sum_{j=1}^k t_{ej}b_j \right) + c_e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑬$$

行列 B の各要素 b_j は互いに独立で、その標準誤差 σ_j は⑤式によって表されているので、⑬式に Gauss の誤差伝播の法則を適用すれば、最確値 u_e の標準誤差 η_e は⑭式で表し得る（表2）。⑭式において、たとえば、 $(\partial u_e / \partial b_1)$ は関数 u_e を変数 b_1 で微分したときの偏微分係数¹⁰⁾で、⑬式より

$$\frac{\partial u_e}{\partial b_1} = t_{e1} \quad \frac{\partial u_e}{\partial b_2} = t_{e2} \quad \dots \quad \frac{\partial u_e}{\partial b_k} = t_{ek}$$

となり、これらは一般的に

$$\frac{\partial u_e}{\partial b_j} = t_{ej} \quad j=1, 2, 3, \dots, k \dots\dots\dots ⑭$$

と表し得るから、行列 U の e 番目の要素 u_e の標準誤差 η_e は、⑭式に⑤式と⑬式を代入して、⑬式のように示し得る（表2）。

4. 観測結果への誤差の伝播

条件付間接法や条件付直接法、独立間接法によって求めた最確値行列 U を用いて、観測結果（たとえば、立体的変位をした後の剛体上の任意点の位置 Q_A ）を求め

表2 最確値と観測結果への誤差の伝播

$$\eta_e = \sqrt{\left(\frac{\partial u_e}{\partial b_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial u_e}{\partial b_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \left(\frac{\partial u_e}{\partial b_3}\right)^2 \sigma_3^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u_e}{\partial b_k}\right)^2 \sigma_k^2} \quad (14)$$

$$\eta_e = \sqrt{(t_{e1})^2 \frac{\rho^2}{p_1} + (t_{e2})^2 \frac{\rho^2}{p_2} + (t_{e3})^2 \frac{\rho^2}{p_3} + \cdots + (t_{ek})^2 \frac{\rho^2}{p_k}} = \rho \sqrt{\sum_{j=1}^k \frac{(t_{ej})^2}{p_j}} \quad (16)$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial b_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial b_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial b_3}\right)^2 \sigma_3^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial b_k}\right)^2 \sigma_k^2} = \rho \sqrt{\sum_{j=1}^k \left\{ \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial b_j} \right)^2 \div p_j \right\}} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial b_j} = \frac{\partial \Gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial u_1}{\partial b_j} + \frac{\partial \Gamma}{\partial u_2} \times \frac{\partial u_2}{\partial b_j} + \cdots + \frac{\partial \Gamma}{\partial u_s} \times \frac{\partial u_s}{\partial b_j} = \sum_{e=1}^s \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_e} \times \frac{\partial u_e}{\partial b_j} \right)$$

$$= \frac{\partial \Gamma}{\partial u_1} t_{1j} + \frac{\partial \Gamma}{\partial u_2} t_{2j} + \cdots + \frac{\partial \Gamma}{\partial u_s} t_{sj} = \sum_{e=1}^s \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_e} t_{ej} \right) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_j} \right)^2 &= \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_1} \right)^2 (t_{1j})^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_2} \right)^2 (t_{2j})^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_3} \right)^2 (t_{3j})^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_s} \right)^2 (t_{sj})^2 \\ &+ 2 \left\{ \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_2} \right) (t_{1j} \ t_{2j}) + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_3} \right) (t_{1j} \ t_{3j}) + \cdots + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_s} \right) (t_{1j} \ t_{sj}) \right. \\ &+ \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_2} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_3} \right) (t_{2j} \ t_{3j}) + \cdots + \left. \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_2} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_s} \right) (t_{2j} \ t_{sj}) \right. \\ &+ \cdots + \cdots + \left. \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_{(s-1)}} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_s} \right) (t_{(s-1)j} \ t_{sj}) \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

$$= \sum_{e=1}^s \sum_{f=1}^s \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_e} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_f} \right) (t_{ej} \ t_{fj})$$

$$\omega = \rho \sqrt{\sum_{j=1}^k \left\{ \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_j} \right)^2 \div p_j \right\}} = \rho \sqrt{\sum_{j=1}^k \sum_{e=1}^s \sum_{f=1}^s \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_e} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_f} \right) \left(\frac{t_{ej} \ t_{fj}}{p_j} \right)} = \sqrt{\sum_{e=1}^s \sum_{f=1}^s \left\{ \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_e} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_f} \right) \cdot \rho^2 \sum_{j=1}^k \left(\frac{t_{ej} \ t_{fj}}{p_j} \right) \right\}} \quad (21)$$

る場合などに使われる関数を

$$\Omega_A = \Gamma(u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_s) = \Gamma(U) \quad \cdots \cdots \cdots (17)$$

とする。観測結果 Ω_A は関数 $\Gamma(U)$ によって与えられる結果である。関数 Γ の括弧内の変数は関数 Γ を構成するすべての変数を表しているわけではなく、観測結果 Ω_A に影響を及ぼすような誤差を持つ変数のみを掲げている。

⑰式における行列 U は、⑱式から明らかなように観測値行列 B の関数であるから、観測結果 Ω_A の標準誤差 ω は表2の⑳式のように表し得る。ここで、 $\partial \Gamma / \partial b_j$ は $\Gamma(U)$ の b_j における偏微分係数で、合成関数の微分法¹⁰⁾を応用し、⑱式を考慮すれば㉑式を得る。㉑式を2乗して㉒式を得る。㉒式を㉓式に代入すると、観測結果 Ω_A の標準誤差 ω は結局㉔式のように示し得る(表2)。

5. 分散共分散行列

表2の⑱式によって最確値行列 U の e 番目の要素 u_e の標準誤差 η_e を、㉔式によって最確値行列 U を利用して得た観測結果 Ω_A の標準誤差 ω を求め得る。しかし、

いちいちこのような計算をするのは煩雑であるため、最確値 U を求める計算過程で使用する行列を利用して、標準誤差 η_e や ω を簡単に求める方法を検討してみた。

⑤式における観測値行列 B の係数行列 T と、⑤式を利用して定義される行列 B の分散共分散行列^{11,12)} ($= \rho^2 P^{-1}$) を用いて

$$M = T (\rho^2 P^{-1}) T^t = \rho^2 (TP^{-1}T^t) \quad \cdots \cdots \cdots (22)$$

を計算する。 ρ^2 は単位重みの1回観測の分散で③式によって、行列 P は行列 B の重み行列で、1節の①式によって定義されている。行列 P は対角行列⁸⁾であるから、その逆行列 P^{-1} は容易に求め得る。㉒式を各行列の要素を用いて表すと表3の㉓式を得る。行列 B の各要素は互いに独立であるから共分散は0となり、 $\rho^2 P^{-1}$ の非対角要素⁸⁾も0である。㉓式を実際に計算すると㉔式を得る(表3)。㉔式より行列 M の要素 m_{ef} (e と $f=1, 2, 3, \cdots, s$) は㉔式のように簡潔に示し得る。観測標点の個数を表す記号 m と行列 M の要素 m_{ef} を混同しないように注意する。ただし、 m が行列の要素を意味するときは、必ず m_{ef} のように添字を伴う。

表 3 分散共分散行列

$$\begin{matrix}
 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1s} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2s} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{s1} & m_{s2} & m_{s3} & \cdots & m_{ss} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1k} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{s1} & t_{s2} & t_{s3} & \cdots & t_{sk} \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} \frac{\rho^2}{p_1} & & & & \\ & \frac{\rho^2}{p_2} & & & \\ & & \frac{\rho^2}{p_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{\rho^2}{p_k} \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{s1} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{s2} \\ t_{13} & t_{23} & \cdots & t_{s3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1k} & t_{2k} & \cdots & t_{sk} \end{bmatrix} \\
 \downarrow M & & \downarrow T & & \downarrow \rho^2 P^{-1} & & \downarrow T^t
 \end{matrix} \quad (23)$$

$$M = \rho^2 \times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k \frac{(t_{1j})^2}{p_j} & \sum_{j=1}^k \frac{(t_{1j} t_{2j})}{p_j} & \sum_{j=1}^k \frac{(t_{1j} t_{3j})}{p_j} & \cdots & \sum_{j=1}^k \frac{(t_{1j} t_{sj})}{p_j} \\ \sum_{j=1}^k \frac{(t_{2j} t_{1j})}{p_j} & \sum_{j=1}^k \frac{(t_{2j})^2}{p_j} & \sum_{j=1}^k \frac{(t_{2j} t_{3j})}{p_j} & \cdots & \sum_{j=1}^k \frac{(t_{2j} t_{sj})}{p_j} \\ \sum_{j=1}^k \frac{(t_{3j} t_{1j})}{p_j} & \sum_{j=1}^k \frac{(t_{3j} t_{2j})}{p_j} & \sum_{j=1}^k \frac{(t_{3j})^2}{p_j} & \cdots & \sum_{j=1}^k \frac{(t_{3j} t_{sj})}{p_j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^k \frac{(t_{sj} t_{1j})}{p_j} & \sum_{j=1}^k \frac{(t_{sj} t_{2j})}{p_j} & \sum_{j=1}^k \frac{(t_{sj} t_{3j})}{p_j} & \cdots & \sum_{j=1}^k \frac{(t_{sj})^2}{p_j} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 \omega = & \sqrt{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_1}\right)^2 m_{11} + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_2}\right)^2 m_{22} + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_3}\right)^2 m_{33} + \cdots + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_s}\right)^2 m_{ss}} \\
 & + 2 \left\{ \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_2}\right) m_{12} + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_3}\right) m_{13} + \cdots + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_s}\right) m_{1s} \right. \\
 & \quad + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_2} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_3}\right) m_{23} + \cdots + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_2} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_s}\right) m_{2s} \\
 & \quad + \cdots + \cdots \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_{(s-1)s}} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_s}\right) m_{(s-1)s} \right\} \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} m_{ef} &= \rho^2 \sum_{j=1}^k \frac{(t_{ej} t_{fj})}{p_j} \\ \text{特に } e=f \text{ (対角要素) のときは} & \cdots \cdots \cdots (26) \\ m_{ee} &= \rho^2 \sum_{j=1}^k \frac{(t_{ej})^2}{p_j} \end{aligned} \right\}$$

②④式の対角要素 m_{ee} の平方根は、⑩式と同じである。すなわち、行列 U の e 番目の要素 u_e の分散は、②④式の e 番目の対角要素 m_{ee} によって示される。したがって、最確値 u_e の標準誤差 η_e は

$$\eta_e = \sqrt{m_{ee}} \quad (26)$$

と表し得る。

②式に②⑤式を代入すると、観測結果 Ω_A の標準誤差 ω は

$$\omega = \sqrt{\sum_{e=1}^s \sum_{f=1}^s \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u_e} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u_f}\right) m_{ef}} \quad (27)$$

と表し得る。行列 M が対称行列⁸⁾ ($m_{ef} = m_{fe}$) であることを考慮して、②⑦式において e と $f=1, 2, 3, \dots, s$,

$e \leq f$ の範囲で変化させれば、表 3 の②③式を得る。②③式は、行列 M の対角要素⁸⁾ と非対角要素の上三角⁸⁾ (下三角でもよい) を利用している。行列 M の非対角要素 m_{ef} は行列 U の e 番目の要素 u_e と f 番目の要素 u_f の間の共分散を示している。

分散共分散行列^{1,7)} M を利用することによって、最確値行列 U の標準誤差 η_e と観測結果 Ω_A の標準誤差 ω は容易に求め得るようになる。

III. 剛体上の任意点の位置とその標準誤差 一条件付間接法を例として—

この章では、条件付間接法 (第 1 報) で測定誤差を補正する場合を中心にして、立体的変位をする咬合器上の任意点の位置を観測結果とし、その標準誤差を求めることを検討する。条件付間接法で測定誤差を補正する場

合、剛体に固定された観測標点は4個以上という制約がある。しかし、3次元の変位をした剛体上の任意点の位置やその標準誤差を求めることは、条件付直接法(第2報)や独立間接法(第3報)を利用する場合よりも簡単である。それは、条件付間接法が、剛体に固定された座標系の原点と各座標軸の方向余弦を、最確値として直接求め得るためである⁶⁾。

1. 座標系の名称と位置行列

大学型 Gysi 平均値咬合器 OU 型¹¹⁾の変位を調べるために、咬合器上部および下部にそれぞれ8個の観測標点($m=8$)を取り付け、これら観測標点の座標を測定する機器の座標系を O-XYZ (座標系 O と略称)とする。咬合器上部の8標点は、咬合器上部に固定された座標系 $O_U-X_UY_UZ_U$ (座標系 O_U) の位置を決定することによって、咬合器と測定機器の位置関係を明らかにするために使用される。咬合器下部の8標点は、咬合器下部に固定された座標系 $O_L-X_LY_LZ_L$ (座標系 O_L) の位置を決定することによって、その立体的変位を明らかにするために使用される。咬合器の立体的変位を検討する基準座標系 $O_A-X_AY_AZ_A$ (座標系 O_A) は、咬合器上部に固定される。咬合器下部が立体的変位をしたときの任意点の位置 Ω_A やその標準誤差 ω は、基準座標系 O_A における値として算出する。

咬合器下部に固定された座標系 O_L における任意点の位置を $\Omega_L(x_L, y_L, z_L)$ 、座標系 O における位置を $\Omega(X, Y, Z)$ とする。咬合器下部が立体的変位をしたとき、座標系 O における座標系 O_L の座標軸の方向余弦を λ_a, μ_a, ν_a ($a=1, 2, 3$)、原点 O_L の位置を (X_0, Y_0, Z_0) とすれば、任意点 Ω と Ω_L の間には②9式のような関係がある。②9式は、条件付間接法と独立間接法で測定誤差を補正する際に、観測方程式を導くための理論式として使用した(第1報Ⅱ章1節⑦式と第3報Ⅱ章1節①式)。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots \textcircled{29}$$

行列を利用した計算を容易に行い得るように、②9式を②9式のように変形する。そして、その行列を③0式で定義すれば、②9式は③0式で表し得る。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & X_0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & Y_0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots \textcircled{30}$$

$$\begin{aligned} \Omega &= (X \ Y \ Z \ 1)^t \\ R_L &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & X_0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & Y_0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} \right\} \dots\dots\dots \textcircled{31} \\ \Omega_L &= (x_L \ y_L \ z_L \ 1)^t \\ \Omega &= R_L \Omega_L \dots\dots\dots \textcircled{32} \end{aligned}$$

③0式の行列 R_L の部分行列 R_1 は回転行列¹²⁾である。部分行列 R_3 と R_4 および行列 Ω と Ω_L の4番目の要素の1は、行列を利用した計算を簡単に行うために、便宜的に付け加えた。

行列 R_L は、測定機器の座標系 O における座標系 O_L (咬合器下部)の位置を示しているの、位置行列と呼ぶことにする。同様に、咬合器上部に固定された座標系 O_U と基準座標系 O_A の位置行列を R_U と R_A とする。特に、咬合器が初期状態にあるときの座標系 O_U と座標系 O_L の位置行列を、それぞれ R_B と R_C とする。各位置行列は、③0式の行列 R_L と同様の形式で表され、座標系 O における各座標系の位置を示すものとする。

2. 位置行列の決定

上述の5つの位置行列のうち、行列 R_A と R_B および R_C は、咬合器が初期状態⁶⁾にあるときに決定される。これに対して、行列 R_U と R_L は、咬合器が立体的変位をした状態で決定される。これらの行列の要素の決め方は、利用する測定誤差の補正法によって異なる。しかし、行列 R_A の決定は、どの補正法でも共通である。

(1) 初期状態での測定と位置行列 R_A の決定

咬合器が立体的変位をする前の初期状態⁶⁾で、上下部合計16個の観測標点および基準座標系 O_A を決定するための5点 S_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) と咬合器下部の任意点 Ω_D の座標を、3次元座標読み取り顕微鏡で精密測定(20回計測)する。そして、その平均値(最確値)をもって、各点の初期状態における座標とする。各観測標点の座標は、条件付間接法や独立間接法では観測方程式の係数行列の要素として使用され、条件付直接法では拘束条件式の標点間距離を決めるために使用される。

座標系 O_A の位置行列 R_A を決定するための5点 S_i の位置関係を図1に示す。 S_1 は切歯指導標先端、 S_2 と S_3 は咬合平面上の点、 S_4 と S_5 は左右の顎頭点とする。座標系の原点 O_A はどこに置いてもよいが、ここでは S_1 (x_1, y_1, z_1) に置くものとする。3点 S_i ($i=1, 2, 3$) で決まる咬合平面 (X_A-Y_A 平面)に垂直で、 S_1 を通る直線方向余弦 λ_3, μ_3, ν_3 によって、 Z_A 軸を決める。顎頭間

図 1 基準座標系の決定

△ S₁ S₂ S₃ は咬合平面, S₄ は顎頭間軸の中点

軸の中点 (S₄ と S₅ の中点) と Z_A 軸で決まる平面 (X_A-Z_A 平面) に垂直で, S₁ を通る直線方向余弦 λ₂, μ₂, ν₂ によって, Y_A 軸を決める. Y_A 軸と Z_A 軸で決まる平面 (Y_A-Z_A 平面) に垂直で, S₁ を通る直線方向余弦 λ₁, μ₁, ν₁ によって, X_A 軸を決める. これにより, 位置行列 **R_A** の要素を求め得る. 各平面の決定 (3 点による決定法, 1 点 1 直線による決定法, 2 直線による決定法) および垂線方向余弦の求め方については, 専門書に詳しいので, ここでは省略する³⁾.

(2) 位置行列 **R_B** と **R_C** の決定

条件付間接法や独立間接法を使用する場合, 咬合器が初期状態にあるときは, 座標系 O と座標系 O_L および座標系 O_U は重なっているので, **R_B**=**R_C**=**E₄** が成り立つ. **E₄** は, 4×4 の大きさの単位行列⁹⁾である (条件付直接法の場合は, IV 章 3 節を参照).

(3) 位置行列 **R_L** と **R_U** の決定

咬合器が立体的変位をしたとき, 咬合器下部 8 標点の観測データにおける測定誤差を条件付間接法で補正すると, 座標系 O_L の位置行列 **R_L** (②式) の要素を最確値 **U** として直接求め得る. 同様に, 咬合器上部 8 標点の観測データにおける測定誤差を補正すると, 座標系 O_U の位置行列 **R_U** の要素を最確値 **U'** として求め得る. これらの位置行列の要素を, その分散共分散行列 **M** および **M'** とともに, ③式と④式で定義する (独立間接法と条件付直接法の場合は, IV 章 2 節と 3 節を参照). 条件付間接法では測定誤差の補正に際して, 求める未知数 (最確値) の個数は 12 個である (s=12) から, e と f の変化する範囲は 1 から 12 までである.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U} &= (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \nu_1 \nu_2 \nu_3 X_0 Y_0 Z_0)^t \\ &= (u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 u_9 u_{10} u_{11} u_{12})^t \\ &= (u_e)^t \\ \mathbf{M} &= (m_{ef}) \quad e \text{ と } f=1, 2, 3, \dots, 11, 12 \\ \mathbf{U}' &= (\lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 \mu'_1 \mu'_2 \mu'_3 \nu'_1 \nu'_2 \nu'_3 X'_0 Y'_0 Z'_0)^t \\ &= (u'_1 u'_2 u'_3 u'_4 u'_5 u'_6 u'_7 u'_8 u'_9 u'_{10} u'_{11} u'_{12})^t \\ &= (u'_e)^t \\ \mathbf{M}' &= (m'_{ef}) \quad e \text{ と } f=1, 2, 3, \dots, 11, 12 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

3. 任意点の位置を求めるための式

基準座標系 O_A における咬合器下部の任意点の位置 Ω_A を求めるためには, 座標変換の考え方を応用する. すなわち, 座標系 O_L における任意点 Ω_L を, 座標系 O→座標系 O_U→座標系 O_A へと変換する.

咬合器が初期状態にあるとき, 咬合器下部の任意点の位置 Ω_D は, 測定機器の座標系 O における座標であり, 座標系 O_L における座標ではない. そこで, 座標系 O_L が初期状態にあるときの位置行列 **R_C** を使用して, 座標系 O_L における任意点の位置 Ω_L を求めると, ⑤式を得る. ⑥式に⑤式を代入して, 咬合器下部が立体的変位をしたときの任意点の位置 Ω を求め得る.

$$\left. \begin{aligned} \Omega_D &= \mathbf{R}_C \Omega_L \\ \therefore \Omega_L &= \mathbf{R}_C^{-1} \Omega_D \\ \Omega_D &= (x_D \ y_D \ z_D \ 1)^t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

咬合器上部の場合も, 下部の②式と同様に考えて, ⑥式を得る. 行列 **R_U** は, 咬合器が立体的変位をしたときの座標系 O_U の位置を示す. ⑥式によって, 座標系 O における任意点 Ω を, 座標系 O_U における位置 Ω_U へ変換することが可能になる.

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \mathbf{R}_U \Omega_U \\ \therefore \Omega_U &= \mathbf{R}_U^{-1} \Omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

一方, 咬合器が初期状態にあるとき, 任意点 Ω_U の座標系 O における位置 Ω_E は, ⑦式によって表し得る. 行列 **R_B** は, 初期状態での座標系 O_L の位置を示す.

$$\Omega_E = \mathbf{R}_B \Omega_U \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

初期状態での座標系 O_A の位置行列を **R_A** とすると, 座標系 O_A における任意点 Ω_A の位置は, ⑧式によって表される.

$$\left. \begin{aligned} \Omega_E &= \mathbf{R}_A \Omega_A \\ \therefore \Omega_A &= \mathbf{R}_A^{-1} \Omega_E \\ \Omega_A &= (x_A \ y_A \ z_A \ 1)^t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

剛体条件を満足するように観測データの測定誤差が補正されていれば、咬合器が初期状態にあるときでも、立体的変位をしたときでも、座標系 O_A と座標系 O_U の関係は常に一定で、③⑨式(③⑩式を③⑨式に代入)によって示し得る。つまり、座標系 O_U における任意点 Ω_U は、③⑨式によって、いつでも座標系 O_A における位置 Ω_A へ変換し得る。

$$\Omega_A = \mathbf{R}_A^{-1} \mathbf{R}_B \Omega_U \dots\dots\dots ③⑨$$

したがって、③⑨式、③⑨式、③⑨式、③⑨式より④⑩式を得る。④⑩式によって、基準座標系 O_A における咬合器下部の任意点の位置 Ω_A を観測結果として求め得る。行列 Ω_A は、座標系 O_A における任意点の X 座標、Y 座標、Z 座標よりなるから、観測結果 Ω_A を算出する関数 $\mathbf{F}$ も X、Y、Z の各座標値を算出する関数 $\mathbf{F}_x$ 、 $\mathbf{F}_y$ 、 $\mathbf{F}_z$ より構成されると考える。条件付間接法や独立間接法では、初期状態で座標系 O と座標系 O_L および座標系 O_U は重なっている。したがって、 $\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_C^{-1} = \mathbf{E}_4$ (4×4 の単位行列) が成り立つから、④⑩式は④⑪式のように表し得る。④⑩式は、条件付直接法で使用する。

$$\begin{aligned} \Omega_A &= (\mathbf{F}_x \ \mathbf{F}_y \ \mathbf{F}_z \ 1)^t \\ &= \mathbf{R}_A^{-1} \mathbf{R}_B \mathbf{R}_U^{-1} \mathbf{R}_L \mathbf{R}_C^{-1} \Omega_D \dots\dots\dots ④⑩ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_A &= (\mathbf{F}_x \ \mathbf{F}_y \ \mathbf{F}_z \ 1)^t \\ &= \mathbf{R}_A^{-1} \mathbf{R}_U^{-1} \mathbf{R}_L \Omega_D \dots\dots\dots ④⑪ \end{aligned}$$

位置行列の逆行列、たとえば、 $\mathbf{R}_U^{-1}$ は座標系 O_U における座標系 O の位置を示している。行列 $\mathbf{R}_U$ を④⑫式で定義すると、その逆行列 $\mathbf{R}_U^{-1}$ は④⑬式となる。

$$\mathbf{R}_U = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 & X'_0 \\ \mu'_1 & \mu'_2 & \mu'_3 & Y'_0 \\ \nu'_1 & \nu'_2 & \nu'_3 & Z'_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots ④⑫$$

$$\mathbf{R}_U^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & \mu'_1 & \nu'_1 & \theta'_1 \\ \lambda'_2 & \mu'_2 & \nu'_2 & \theta'_2 \\ \lambda'_3 & \mu'_3 & \nu'_3 & \theta'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left. \begin{aligned} \theta'_1 &= (-\lambda'_1 X'_0 - \mu'_1 Y'_0 - \nu'_1 Z'_0) \\ \theta'_2 &= (-\lambda'_2 X'_0 - \mu'_2 Y'_0 - \nu'_2 Z'_0) \\ \theta'_3 &= (-\lambda'_3 X'_0 - \mu'_3 Y'_0 - \nu'_3 Z'_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ④⑬$$

回転行列の逆行列は、その転置行列に等しい¹²⁾ことを考慮すれば、第1報IV章4節5項で示したのと同様の考え方で、④⑬式から④⑭式を簡単に導くことが可能である⁹⁾。他の位置行列の逆行列も、これと同じようにして求め得る。

4. 任意点の位置に関する標準誤差

どの測定誤差の補正法を利用した場合でも、④⑩式によ

って、基準座標系 O_A における咬合器下部の任意点の位置 Ω_A を求め得る。そこで、④⑩式を利用して、任意点 Ω_A の標準誤差 ω を求めることを検討する。ただし、条件付間接法や独立間接法では、常に $\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_C = \mathbf{E}_4$ が成り立つから、④⑩式の代わりに④⑪式を使用してもよい。

④⑩式における行列 $\mathbf{R}_A$ 、 $\mathbf{R}_B$ 、 $\mathbf{R}_C$ 、 Ω_D の各要素は、咬合器が初期状態にあるときに決定される定数である。通常、最小二乗法を応用した測定誤差の補正では、初期状態における数値は誤差のないものとして扱われるので、その決定には細心の注意を要する。咬合器が立体的変位をすると、位置行列 $\mathbf{R}_L$ と $\mathbf{R}_U$ の要素は変化する。これらの行列の各要素は、咬合器が立体的変位をしたときの観測データに含まれる測定誤差を、剛体条件が満足されるように、補正することによって決定される。したがって、任意点 Ω_A の座標の標準誤差 ω は、行列 $\mathbf{R}_L$ より及ぼされる誤差と行列 $\mathbf{R}_U$ より及ぼされる誤差の和として、以下のように算出し得る。

咬合器下部8標点の観測データを、条件付間接法で補正すると、位置行列 $\mathbf{R}_L$ の要素 λ_a 、 μ_a 、 ν_a ($a=1, 2, 3$) および (X_0 , Y_0 , Z_0) を最確値行列 $\mathbf{U}$ として、その分散共分散行列 $\mathbf{M}$ とともに求め得る。すると、行列 $\mathbf{R}_L$ から観測結果 Ω_A に及ぼされる誤差 $\omega_L = (\omega_{LX} \ \omega_{LY} \ \omega_{LZ})^t$ は、②⑦式、③③式、④⑩式を使用して、④⑭式のように表し得る。ここで、 ω_{LX} 、 ω_{LY} 、 ω_{LZ} は、観測結果 Ω_A の X、Y、Z 座標値に関する誤差である。そして、④⑭式をまとめて④⑮式のように表すと約束する。

$$\begin{pmatrix} \omega_{LX} \\ \omega_{LY} \\ \omega_{LZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sum_{e=1}^{12} \sum_{f=1}^{12} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial u_e} \times \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial u_f} \right) m_{ef}} \\ \sqrt{\sum_{e=1}^{12} \sum_{f=1}^{12} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial u_e} \times \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial u_f} \right) m_{ef}} \\ \sqrt{\sum_{e=1}^{12} \sum_{f=1}^{12} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial u_e} \times \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial u_f} \right) m_{ef}} \end{pmatrix} \dots\dots\dots ④⑭$$

$$\omega_L = \sqrt{\sum_{e=1}^{12} \sum_{f=1}^{12} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_e} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_f} \right) m_{ef}} \dots\dots\dots ④⑮$$

ただし、④⑭式と④⑮式における微分係数は、次の④⑯式と④⑰式によって求め得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_e} &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial u_e} \ \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial u_e} \ \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial u_e} \ 0 \right)^t \\ &= \mathbf{R}_A^{-1} \mathbf{R}_B \ \mathbf{R}_U^{-1} \ \frac{\partial \mathbf{R}_L}{\partial u_e} \ \mathbf{R}_C^{-1} \Omega_D \dots\dots\dots ④⑯ \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_L}{\partial u_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_e} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_e} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial u_e} & \frac{\partial X_0}{\partial u_e} \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial u_e} & \frac{\partial \mu_2}{\partial u_e} & \frac{\partial \mu_3}{\partial u_e} & \frac{\partial Y_0}{\partial u_e} \\ \frac{\partial \nu_1}{\partial u_e} & \frac{\partial \nu_2}{\partial u_e} & \frac{\partial \nu_3}{\partial u_e} & \frac{\partial Z_0}{\partial u_e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots ④⑰$$

咬合器上部 8 標点の観測データを補正して得た最確値行列 U' (位置行列 R_U の要素よりなる) と分散共分散行列 M' を④式のように定義すれば、咬合器下部の場合と全く同様にして、行列 R_U から観測結果 Ω_A に及ぼされる誤差 $\omega_U = (\omega_{UX} \ \omega_{UY} \ \omega_{UZ})^t$ を求め得る (④式)。ただし、④式の代わりに③式を使用する。③式の行列の微分 $(\partial R_U^{-1} / \partial u'_e)$ は、④式と同様に考える。

$$\omega_U = \sqrt{\sum_{e=1}^{12} \sum_{f=1}^{12} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u'_e} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u'_f} \right) m'_{ef}} \quad \text{.....④}$$

$$\frac{\partial R}{\partial u'_e} = R_A^{-1} R_B \frac{\partial R_U^{-1}}{\partial u'_e} R_L R_C^{-1} \Omega_D \quad \text{.....⑤}$$

したがって、観測結果 Ω_A の標準誤差 ω は、⑤式によって求め得る。⑤式を簡略化して、⑥式のように表すものと約束する。

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_{LX}^2 + \omega_{UX}^2} \\ \sqrt{\omega_{LY}^2 + \omega_{UY}^2} \\ \sqrt{\omega_{LZ}^2 + \omega_{UZ}^2} \end{pmatrix} \quad \text{.....⑥}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_U^2} \quad \text{.....⑦}$$

IV. 考 察

1. 測定誤差と観測結果について

下顎や咬合器を剛体と考え、その立体的変位を観測して得たデータには測定誤差が存在する。この測定誤差は観測標点間距離の変化、つまり剛体条件の崩れとして現れる³⁾。測定誤差には定差 (定誤差, 系統的誤差) と過失 (過失誤差) および偶差 (偶発誤差, 必然的偶発誤差) がある。このうち、前二者は原因がわかれば計算による補正や観測方法を変えたり、注意深く観測を行うことにより取り除き得るものとされる。そして、取り除き得ない誤差として偶差が残る。偶差は、種々雑多の予測できない小原因により、Gauss の誤差法則に従って確率的に発生する。たとえば、気温の微小変動、空気や実験台の微小振動、照明度の微小変化、観測者の観測に対する集中力の変化、測定機器を操作する手の感覚や視力の微小変化などが、ある場合には正の方向に、ある場合には負の方向に測定値を変動させる。そして、これらの変動が集積されて、使用する測定機器の精度限界のところで偶差となって現れる⁴⁾。通常、測定誤差というときはこの偶差を意味する。第 1 報から本論文までの観測データにおける測定誤差の処理論は、こうした偶差を対象にしている。

これまでの下顎や咬合器の運動の研究では、観測結果を求める場合、測定誤差を含んだ観測データがそのまま利用されてきた。しかし、観測結果を求める関数 Γ の

形式が同じであっても、変数に観測値 B を代入するのか、測定誤差が補正された最確値 U を代入するのかによって、観測結果は異なる。このことは、次の⑧式と⑨式を 3 点 3 次元測定の条件付直接法にあてはめて考えれば、理解が容易である。

$$\Omega'_A = \Gamma (b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_9) = \Gamma (B) \quad \text{.....⑧}$$

$$\Omega_A = \Gamma (u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_9) = \Gamma (U) \quad \text{.....⑨}$$

すなわち、観測値行列 B の構成要素 b_e ($e=1, 2, 3, \dots, 8, 9$) は測定誤差を含んだ観測標点の座標で、最確値行列 U の構成要素 u_e は条件付直接法で測定誤差が補正された観測標点の座標である。したがって、 $B \neq U$ であるから、関数 Γ の形式が同じであっても、その結果は一般的に $\Omega_A \neq \Omega'_A$ である。条件付間接法や独立間接法で測定誤差を補正した場合も、最確値行列 U と第 1 回目の逐次近似計算で求めた近似値行列 U_1 に対して同様のことがいえる。

測定誤差 (偶差) を定量的に扱うための表現方法として、標準誤差 (二乗平均誤差, 標準偏差), 確率誤差 (公算誤差), 平均誤差の 3 つがあり、それらの間には次のような互換性がある¹⁾。⑩式で、 ε は標準誤差, ε_1 は確率誤差, ε_2 は平均誤差である。

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0.6745\varepsilon \\ \varepsilon_2 &= 0.7979\varepsilon \end{aligned} \quad \text{.....⑩}$$

たとえば、観測結果 Ω_A の確率誤差 ω_1 は、観測結果の標準誤差 ω を利用して、⑩式より $\omega_1 = 0.6745 \omega$ と表し得る。

観測が複雑になればなるほど、さまざまな定差の発生が考えられるが、何を定差とし、それにどのような対応をするのかについては、坂東らの報告が一応の指針を与えている。特に、回帰式を利用した測定機器の定差 (カメラのレンズの収差) の補正は、合理的で優れた方法であると思われる⁵⁾。

2. 独立間接法で測定誤差を補正する場合

独立間接法で測定誤差を補正する場合⁶⁾ でも、基準座標系における咬合器下部の任意点の位置 Ω_A は、④式または⑤式を使用して求め得る。その際、注意すべきことは、座標系 O における座標系 O_L と座標系 O_U の位置行列 R_L および R_U の要素の決め方が、条件付間接法と独立間接法では異なることである。たとえば、条件付間接法による測定誤差の補正では、④式で使用している行列 R_L の要素である座標系 O_L の座標軸の方向余弦 λ_a, μ_a, ν_a ($a=1, 2, 3$) および原点 O_L の座標 (X_0, Y_0, Z_0) を、最確値として直接算出し得る。これに対して、独立

間接法による測定誤差の補正では、座標系 O_L の原点の座標は直接算出し得るが、座標軸の方向余弦 λ_a, μ_a, ν_a については、回転角度 $\mathcal{E}, \Phi, \Psi$ を第3報④式に代入して求めなければならない。

観測結果 Ω_A の標準誤差 ω を求める場合も、④式から⑥式を利用し得る (独立間接法では $s=6$ であるから、 e と f の変化する範囲は1から6までとする)。たとえば、独立間接法で咬合器下部8標点の測定誤差を補正した場合の最確値行列 U と分散共分散行列 M (6×6 の大きさ) を、③式に代わって、⑤式のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} U &= (\mathcal{E} \ \Phi \ \Psi \ X_0 \ Y_0 \ Z_0)^t \\ &= (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6)^t \\ &= (u_e)^t \quad e=1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ M &= (m_{ef}) \quad e \text{ と } f=1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑤$$

すると、⑤式、④式、⑥式、⑦式を使用して、行列 R_L から観測結果 Ω_A に及ぼされる誤差 ω_L を求め得る。ただし、行列 R_L を行列 U の要素で微分したときの形式が、条件付間接法と独立間接法では、異なることに注意しなければならない。たとえば、⑦式の $\partial R_L / \partial u_1$ の第1行目の要素を示すと、条件付間接法では⑥式のようになる。独立間接法では、第3報④式を考慮して、⑦式のようになる。他の要素についても、同じように考える。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_1} &= \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda_1} = 1 & \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_1} &= \frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial u_1} &= \frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_1} = 0 & \frac{\partial X_0}{\partial u_1} &= \frac{\partial X_0}{\partial \lambda_1} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑥$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_1} &= \frac{\partial(\cos \mathcal{E} \cos \Phi)}{\partial \mathcal{E}} = -\sin \mathcal{E} \cos \Psi \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_1} &= \frac{\partial(\cos \mathcal{E} \sin \Phi \sin \Psi - \sin \mathcal{E} \cos \Psi)}{\partial \mathcal{E}} \\ &= -\sin \mathcal{E} \sin \Phi \sin \Psi - \cos \mathcal{E} \cos \Psi \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial u_1} &= \frac{\partial(\cos \mathcal{E} \sin \Phi \cos \Psi + \sin \mathcal{E} \sin \Psi)}{\partial \mathcal{E}} \\ &= -\sin \mathcal{E} \sin \Phi \cos \Psi + \cos \mathcal{E} \sin \Psi \\ \frac{\partial X_0}{\partial u_1} &= \frac{\partial X_0}{\partial \mathcal{E}} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑦$$

咬合器上部8標点についても同様に考えれば、位置行列 R_U よりの誤差 ω_U を求めることが可能となり、⑥式を使用して、観測結果 Ω_A の標準誤差 ω を求め得る。

3. 条件付直接法で測定誤差を補正する場合

条件付直接法⁹⁾では、測定誤差が補正された観測標点 W_i ($i=1, 2, 3, \dots, 8$) の座標を最確値として求め得る。したがって、観測標点8個の場合、求め得る最確値は24個である。そして、最確値の分散共分散行列の大きさ

は 24×24 となる。しかし、観測結果 Ω_A とその標準誤差 ω を求めるのに必要なのは、3標点分の9座標値およびそれらに関する分散共分散行列 (9×9 の大きさ) である。

今、咬合器下部に固定された座標系 O_L を考える。標点 W_1 は右側顆頭点に、 W_2 は左側顆頭点に、 W_3 は切歯指導標に近い位置にあるとする。 W_1 に原点 O_L を置く。3標点 W_i によって決定された平面に垂直で、 W_1 を通る直線を z_L 軸とする。 W_2 と W_3 を結んで得る直線 (顆頭間軸) を y_L 軸とする。 y_L 軸と z_L 軸の決定する平面に垂直で、 W_1 を通る直線を x_L 軸とする。これにより、座標系 O_L を決定し、座標系 O における位置行列 R_L を得ることが可能になる。こうした座標系の決定方法は、基本的にはⅢ章2節の基準座標系 O_A の決定と同じで、専門書に詳しいので省略する¹³⁾。咬合器が初期状態にあるときの3標点に対して同様のことを行えば、位置行列 R_C を得る。咬合器上部の8観測標点についても、咬合器下部と同様に考えれば、位置行列 R_U と R_B を求め得る。また、基準座標系 O_A の設定は条件付間接法と同じであるから、位置行列 R_A も決まる。したがって、④式を使用して、観測結果 Ω_A を求め得る。条件付間接法や独立間接法による測定誤差の補正では、初期状態で座標系 O と座標系 O_L および座標系 O_U は一致している。そのため、 $R_B = R_C = E_4$ が成り立ち、④式から④式を得ることが可能になる。しかし、条件付直接法では、初期状態で咬合器上下部の観測標点の設定が、余程うまく行われない限り、座標系 O と座標系 O_L および座標系 O_U が重なることはない。つまり、一般的に $R_B = R_C = E_4$ が成り立たないので、④式は使用できない。

観測結果 Ω_A の標準誤差 ω も、④式から⑥式を利用して求め得る。その場合、 e と f の変化する範囲は1~9までである。たとえば、咬合器下部よりの誤差 ω_L を求める場合、③式に代わって、③式を使用する。③式で、 $(\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)$ ($i=1, 2, 3$) は、測定誤差が補正された咬合器下部8標点のうちの3標点 W_i の座標値であり、行列 M はそれらの分散共分散行列である。

$$\left. \begin{aligned} U &= (\bar{X}_1 \ \bar{Y}_1 \ \bar{Z}_1 \ \bar{X}_2 \ \bar{Y}_2 \ \bar{Z}_2 \ \bar{X}_3 \ \bar{Y}_3 \ \bar{Z}_3)^t \\ &= (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8 \ u_9)^t \\ &= (u_e)^t \\ M &= (m_{ef}) \quad e \text{ と } f=1, 2, 3, \dots, 8, 9 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑧$$

位置行列 R_L の要素は、最確値行列 U の要素 u_e の関数になっていることを考慮すれば、⑦式のような行列の微分も可能である。咬合器上部よりの誤差 ω_U についても同様に考え得る。

4. 測定誤差の補正法に関する問題点

最小二乗法を応用し、観測データにおける測定誤差を補正する場合、観測方程式の係数行列や拘束条件式における定数は、理論的に正しいと考えられる値、つまり、誤差を持たない値（真値）が使用される。しかし、下顎や咬合器の立体的変位を実験的に検討する場合、理論的に正しいと考えられるような数値は存在しない。たとえば、条件付間接法で測定誤差を補正する場合、拘束条件式（第1報⑧式）は理論的に導き得るが、観測方程式の係数行列は、初期状態における観測標点の位置を測定して決めざるをえない。条件付直接法では、観測方程式の係数行列は単位行列で、この要素は誤差を持たないと考え得るが、拘束条件式（第2報⑥式）における標点間距離は、やはり、初期状態における観測標点の位置によって決めなければならない。独立間接法における観測方程式の係数行列についても同様である。それゆえ、初期状態における咬合器上下部の観測標点や、基準点 S_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) および任意点 Ω_D の決定には注意を要する。著者らは、20 回計測によって得た値の平均値を使用した。こうした考え方は、初期状態での観測標点を基準とし、咬合器が変位したときの位置行列 R_L と R_U のみに誤差を認める立場であり、観測結果 Ω_A の標準誤差 ω は⑩式によって求め得る。この場合、どの補正法を使用しても、標準誤差 ω は同じ値となる。咬合器が立体的変位をしたときの観測標点に対する測定が終われば、それによって得たデータに含まれる測定誤差は決まってしまう。したがって、どのような測定誤差の補正法を使用しようと、観測結果 Ω_A とその標準誤差 ω が同じ値になるのは当然である。

しかし、初期状態における各点の座標も測定によって得たものであるから、これにも誤差を認めようとする、矛盾した現象が生ずる。観測結果 Ω_A を求めるための⑩式において、初期状態の観測で決定された行列は R_A, R_B, R_C と Ω_D の4つである。これらの行列の要素から観測結果 Ω_A に及ぼされる誤差を $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ とすると、観測結果 Ω_A の標準誤差 ω は⑩式によって求め得る。ところで、条件付間接法と独立間接法では、 $R_B = R_C = E_4$ が成り立ち、この単位行列そのものには誤差はないから、 $\omega_B = \omega_C = 0$ となる。すなわち、条件付間接法と独立間接法を使用したときの標準誤差 ω は、⑩式のように表し得る（条件付直接法では $R_B \neq R_C \neq E_4$ であるから、 $\omega_B \neq \omega_C \neq 0$ となり、⑨式を使用する）。すると、⑥式が成り立つ。

$$\omega = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_B^2 + \omega_A^2 + \omega_B^2 + \omega_C^2 + \omega_D^2} \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_B^2 + \omega_A^2 + \omega_B^2} \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{11} \text{式} の \omega < \textcircled{10} \text{式} の \omega < \textcircled{9} \text{式} の \omega \dots\dots\dots \textcircled{11}$$

実験誤差は、大きめに見積る方が安全であるから、⑩式から求めた標準誤差より、⑨式あるいは⑥式から求めたそれが大きくなることには問題はない。ただし、測定データに含まれる誤差の量は決まっているから、その測定データをどのような補正法で処理しても、標準誤差 ω は同じでなければならない。たとえば、初期状態の測定値に誤差を認めない場合、つまり、⑩式による標準誤差は、条件付間接法、独立間接法または条件付直接法のどれを使用しても同じ値となる。したがって、初期状態に測定誤差を認めた場合にも、3つの補正法で求めた標準誤差は、同じでなければならない。初期状態に誤差を認めた場合の標準誤差 ω を3つの補正法で実際に算出し、その内訳を調べてみると、 $\omega_L, \omega_U, \omega_A, \omega_D$ の4つは、どの補正法で算出しても同じ値であった。ただ、 ω_B と ω_C の分だけ、条件付直接法の標準誤差の方が大きかった。条件付直接法の ω_B と ω_C は、初期状態における咬合器上下各3標点よりの誤差である（上下各8標点すべての初期状態における誤差が考慮されているわけではない）。

こうした問題は、咬合器上下部各8標点の初期状態における測定誤差が、条件付間接法と独立間接法では観測方程式の係数行列を通して、条件付直接法では拘束条件式を通して、観測結果の標準誤差 ω へと伝播させ得るような計算方法が確立されることによって改善されるであろう。現在のところ、著者らは、⑩式を利用して標準誤差を求めている（条件付直接法でも位置行列 R_B と R_C よりの誤差 ω_B と ω_C を考慮しなければ、⑩式を使用し得る）。

なお、行列 R_A と Ω_D よりの誤差 ω_A と ω_D は、次のようにして求め得る。初期状態での精密測定によって得た基準点 S_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) と Ω_D の座標（20 回計測の平均値をとる）を最確値行列 U'' として、それらの分散共分散行列 M'' とともに、⑩式のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} U'' &= (x'_1 \ y'_1 \ z'_1 \ x'_2 \ y'_2 \ z'_2 \ \dots\dots \\ &\quad \dots x'_5 \ y'_5 \ z'_5 \ x'_D \ y'_D \ z'_D)^t \\ &= (u'_1 \ u'_2 \ u'_3 \ u'_4 \ u'_5 \ u'_6 \ \dots\dots \\ &\quad \dots u'_{13} \ u'_{14} \ u'_{15} \ u'_{16} \ u'_{17} \ u'_{18})^t \\ &= (u'_h)^t \\ M'' &= (m''_{hj}) \quad h \text{ と } j = 1, 2, 3, \dots\dots, 17, 18 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \textcircled{12}$$

行列 U'' の要素 u'_h の分散 c_h^2 は、初期状態での点 S_i と Ω_D の精密測定によって得たデータより求め得る（その求め方については、第1報IV章3節を参照）。行列 U'' の要素は18個あるので、行列 M'' は 18×18 の大きさ

表4 任意点の変位距離とその標準誤差

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 (\mathcal{K}_X \mathcal{K}_Y \mathcal{K}_Z 0)^t &= \{ (b_X - i_{0X}) \ (b_Y - i_{0Y}) \ (b_Z - i_{0Z}) \ 0 \}^t \\
 &= \mathbf{R}_A^{-1} (\mathbf{J}_U^{-1} \mathbf{J}_L - \mathbf{R}_U^{-1} \mathbf{R}_L) \Omega_0 \\
 \therefore \mathcal{K}_A &= \sqrt{\mathcal{K}_X^2 + \mathcal{K}_Y^2 + \mathcal{K}_Z^2} = \sqrt{(\mathcal{K}_X \mathcal{K}_Y \mathcal{K}_Z 0) (\mathcal{K}_X \mathcal{K}_Y \mathcal{K}_Z 0)^t} \\
 &= \sqrt{(\mathbf{R}_A^{-1} (\mathbf{J}_U^{-1} \mathbf{J}_L - \mathbf{R}_U^{-1} \mathbf{R}_L) \Omega_0)^t (\mathbf{R}_A^{-1} (\mathbf{J}_U^{-1} \mathbf{J}_L - \mathbf{R}_U^{-1} \mathbf{R}_L) \Omega_0)}
 \end{aligned} \right\} \quad (65)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \pi_L &= \sqrt{\sum_{e=1}^S \sum_{f=1}^S \left(\frac{\partial \mathcal{K}_A}{\partial u_e} \times \frac{\partial \mathcal{K}_A}{\partial u_f} \right) m_{ef}} \\
 \text{ただし } \frac{\partial \mathcal{K}_A}{\partial u_e} &= \frac{\partial \mathcal{K}_X}{\partial u_e} \times \frac{\partial \mathcal{K}_X}{\partial u_e} + \frac{\partial \mathcal{K}_Y}{\partial u_e} \times \frac{\partial \mathcal{K}_Y}{\partial u_e} + \frac{\partial \mathcal{K}_Z}{\partial u_e} \times \frac{\partial \mathcal{K}_Z}{\partial u_e} \\
 &= \frac{\left(\frac{\partial \mathcal{K}_X}{\partial u_e} \frac{\partial \mathcal{K}_X}{\partial u_e} + \frac{\partial \mathcal{K}_Y}{\partial u_e} \frac{\partial \mathcal{K}_Y}{\partial u_e} + \frac{\partial \mathcal{K}_Z}{\partial u_e} \frac{\partial \mathcal{K}_Z}{\partial u_e} \right)}{\sqrt{\mathcal{K}_X^2 + \mathcal{K}_Y^2 + \mathcal{K}_Z^2}} = \frac{\partial \mathcal{K}_e}{\partial \mathcal{K}_A} \\
 \frac{\partial \mathcal{K}_e}{\partial u_e} &= (\mathcal{K}_X \mathcal{K}_Y \mathcal{K}_Z 0) \left(\frac{\partial \mathcal{K}_X}{\partial u_e} \ \frac{\partial \mathcal{K}_Y}{\partial u_e} \ \frac{\partial \mathcal{K}_Z}{\partial u_e} \ 0 \right)^t \\
 &= (\mathbf{R}_A^{-1} (\mathbf{J}_U^{-1} \mathbf{J}_L - \mathbf{R}_U^{-1} \mathbf{R}_L) \Omega_0)^t (-\mathbf{R}_A^{-1} \mathbf{R}_U^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_L}{\partial u_e} \Omega_0)
 \end{aligned} \quad (66)$$

である。その対角要素は行列 $\mathbf{U}''$ の要素 u''_h の分散を表すから、 $m''_{hh} = \zeta_h^2$ ($h=j$) である。行列 $\mathbf{M}''$ の非対角要素は、 u''_h と u''_j の間の共分散を表すが、 u''_h と u''_j は独立した観測によって決められるから、 $m''_{hh}=0$ ($h \neq j$) である。したがって、行列 $\mathbf{M}''$ は対角行列となる。よって、行列 $\mathbf{R}_A$ と Ω_D よりの誤差 $\omega_A = (\omega_{AX} \ \omega_{AY} \ \omega_{AZ})^t$ と $\omega_D = (\omega_{DX} \ \omega_{DY} \ \omega_{DZ})^t$ は、咬合器下部の場合 (44式から47式) と同じように考え、63式によって求め得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_A &= \sqrt{\sum_{h=1}^{15} \sum_{j=1}^{15} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u''_h} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u''_j} \right) m''_{hj}} \\
 \frac{\partial \Gamma}{\partial u''_h} &= \frac{\partial \mathbf{R}_A^{-1}}{\partial u''_h} \mathbf{R}_B \mathbf{R}_U^{-1} \mathbf{R}_L \mathbf{R}_C^{-1} \Omega_D \\
 \omega_D &= \sqrt{\sum_{h=16}^{18} \sum_{j=16}^{18} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u''_h} \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u''_j} \right) m''_{hj}} \\
 \frac{\partial \Gamma}{\partial u''_h} &= \mathbf{R}_A^{-1} \mathbf{R}_B \mathbf{R}_U^{-1} \mathbf{R}_L \mathbf{R}_C^{-1} \frac{\partial \Omega_D}{\partial u''_h}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (63)$$

5. 基準座標系の決定方法について

基準座標系 O_A の決定方法としては、Ⅲ章2節で示した方法の他に、咬合器上部に固定された座標系 O_U の状態の変化に伴って、基準点 S_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) も変位し、その変位した S_i を使用する方法もある。2通りの座標系 O_A の決定方法で、条件付間接法による計算を実際に行ったところ、観測結果 Ω_A とその標準誤差 ω は、どちらの座標系の決定方法でも、同じであった。つまり、咬合器上部の観測標点における測定誤差が、剛体条件を

満足するように補正されていれば、どの基準座標系の決定方法を使用しても、任意点 Ω_A およびその標準誤差 ω は同じになる。ただ、それらを求めるための実際の計算は、Ⅲ章2節の方法が簡単である。

6. 任意点の変位距離とその標準誤差

咬合器下部がある顎位 (IO 顎位) からある顎位 (IO 顎位) へ変位したとき、咬合器下部の任意点の変位距離 $\mathcal{K}_A$ は、次のようにして求める。計算式が長くなるため、ここでは、40式の代わりに41式を使用する (条件付直接法では40式)。

IO 顎位 と IO 顎位 における任意点の位置を、64式で表す。すると、変位距離 $\mathcal{K}_A$ は65式で求め得る (表4)。行列 $\mathbf{J}_U$ と $\mathbf{J}_L$ は、咬合器が IO 顎位に達したときの座標系 O_U と座標系 O_L の位置を示す。

$$\left. \begin{aligned}
 IO &= (i_{0X} \ i_{0Y} \ i_{0Z} \ 1)^t = \mathbf{R}_A^{-1} \mathbf{R}_U^{-1} \mathbf{R}_L \Omega_D \\
 IO &= (b_X \ b_Y \ b_Z \ 1)^t = \mathbf{R}_A^{-1} \mathbf{J}_U^{-1} \mathbf{J}_L \Omega_D
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (64)$$

任意点の変位距離 $\mathcal{K}_A$ の標準誤差 π は、基本的には、任意点の位置 Ω_A の標準誤差 ω の求め方と同じである。たとえば、咬合器が IO 顎位にあるときの位置行列 $\mathbf{R}_L$ から、標準誤差 π に伝播される誤差を π_L とする。すると、誤差 π_L は62式、44式、65式を利用して、66式のように示し得る (表4)。他の行列からの誤差についても、同様にして求める。そして、それらの誤差を、66式あるいは65式または64式にしたがって加算すれば、任意点の

変位距離 X_A の標準誤差 π を求め得る。

文 献

V. 結 論

1. 剛体の立体的変位を観測して得たデータにおける測定誤差の算出方法を示した。
2. これらの測定誤差が、条件付間接法や条件付直接法および独立間接法を利用して求めた最確値（剛体の 3 次元的位置を決めるために利用し得る）や、最確値を利用して求めた観測結果にどのように伝播するのかを検討し、これを標準誤差として算出する方法を示した。
3. 最確値や観測結果の標準誤差は、最確値の分散共分散行列を利用すると、容易に算出し得る。
4. 条件付間接法、独立間接法、条件付直接法で観測データの測定誤差を補正した場合、立体的変位をする剛体上の任意点の位置や、その変位量を求めるための式を示し、それらの標準誤差を求めることを検討した。
5. 観測データの測定誤差を、最小二乗法で補正する際に利用する観測方程式の係数行列や拘束条件式の定数は、通常、誤差のない理論的な値が使用される。しかし、下顎運動や咬合器の運動を実験的に検討する場合、観測方程式や拘束条件式で使用し得るような理論的な値というものとは存在しない。したがって、剛体が初期状態にあるときの観測標点や、他の基準点の測定には細心の注意を要する。

稿を終わるに臨み、多くの有益な助言を戴いた鈴木尚通君（松商学園短期大学講師）に深謝します。

- 1) 本間 仁, 春日屋伸昌: 次元解析・最小二乗法と実験式, 61~222, コロナ社, 東京, 1981.
- 2) 一ノ瀬正己: 誤差論, 1~72, 培風館, 東京, 1971.
- 3) 石川甲子男, 他: 測量のための最小二乗法, 1~82, 115~118, 実教出版株式会社, 東京, 1982.
- 4) 真島正市, 磯部 孝: 計測法概論 上巻, 42~78, コロナ社, 東京, 1968.
- 5) 坂東永一, 栗山 實, 他: 写真撮影による下顎運動測定法, 補綴誌, 23: 677~690, 1979.
- 6) 舟久保太, 根本一男: 剛体条件の補正に関する研究 第 1 報 条件付間接法による補正, 補綴誌, 28: 673~684, 1984. 第 2 報 条件直接法による補正, 補綴誌, 28: 685~694, 1984. 第 3 報 独立間接法による補正, 補綴誌, 30: 326~337, 1986.
- 7) Draper, N.R., Smith, H. (中村慶一訳): 応用回帰分析, 8~87, 森北出版, 東京, 1974.
- 8) 篠崎壽夫, 松下祐輔編: 応用数値計算法(上), 5~9, 26~27, コロナ社, 東京, 1976.
- 9) 西島和彦: 力学系と自然法則, 7~17, 産業図書, 東京, 1979.
- 10) 佐々木重夫, 他: 微分積分学, 24~26, 107~112, 廣川書店, 東京, 1966.
- 11) 津留宏道, 他: コンプリートデンチャーテクニク, 55~56, 医歯薬出版, 東京, 1980.
- 12) 國井修二郎, 千田香苗: 力学 I, 22~34, 60~62, 丸善(株), 東京, 1967.
- 13) 矢野健太郎: 代数学と幾何学, 24~129, 173~207, 裳華房, 東京, 1975.