有限要素法による歯冠補綴物の応力解析 (第1報)

大野 清美

Stress Analysis of Fixed Prosthetic Appliances by Finite Element Method (Part. 1)

Kiyomi Ohno

Abstract : It is very important to make sure of the mechanical behaviors of fixed prosthetic appliances in order to design them. Fixed prosthetic appliances on premolar are simulated to analyse by two dimensional models.

Those models are divided into 105 curved isoparametric quadrilateral elements, loaded with a statically concentrated vertical 1.0 kg load at the occlusal surface, and numerically analysed by the finite element method.

The results obtained are as follows :

1) The systematic analyses of fixed prosthetic appliances are easily and exactly performed by the finite element method in place of the former experimental method.

2) The fixed points in the finite element method are considered on the boundary line between periodontal membrane and alveolar bone.

3) The analytical values are affected by the material properties of periodontal membrane. And, Young's moduli of periodontal membrane have larger influence than poisson's ratios. The stresses of dentin in the model are small as Young's moduli are large.

4) The modeling of the neighbour teeth is able to analyze fixed prosthetic appliance in dental arch.

Key words : dental stress analysis-crowns

まえがき

歯冠補綴物の脱落や破損を防止し、補綴臨床上大きな指針を得るため、咬合力が作用する支台歯および歯冠補綴物の応力分布を解明することは非常に重要である。

歯冠補綴物の力学的問題の実験的研究手法としては、光弾性法¹⁾、ストレンゲージ法^{2~4)}、応力塗料法⁵⁾、モアレ法⁶⁾などが、従来から用いられてきた。しかしながら、

生体組織および歯冠補綴物の性状が複雑なことにより、相似模型の製作が困難なため、各測定法を用いて支台歯および歯冠補綴物の応力分布を求める上で、それぞれ多くの問題が残されている。そこで、近年応用力学の各分野で幅広く応用されている有限要素法^{7~14)}を適用し、支台歯および歯冠補綴物の応力の解析を行った。今回は、特に解析の基礎となる事項と咬合力を受ける歯冠補綴物の数値計算結果について検討を加えた。

基 礎 式

1. 有限要素法について

有限要素法とは、連続体をいくつかの要素に分けて考え、要素ごとに力のつり合いの式を作り、それをもとに

日本大学松戸歯学部補綴学第2講座(指導:村田義純教授)
Nihon University School of Dentistry at Matsudo,
Crown and Bridge Prosthodontics (Director: Prof. Yosi-
zumi Murata)
昭和61年2月17日受付

図1 歯牙モデル

全体としての方程式を組立てて連続体の変位と応力を求める方法のことをいう。本研究においては、歯冠補綴物を含めた歯牙モデルを図1の右に示す四辺形要素によって分割を行ったが、以下有限要素法の基礎式を要約して説明する。

歯牙モデルの i 番目の要素ポテンシャルエネルギー Π_i は、

$$\Pi_i = (1/2) \int_{A_i} \{\sigma_i\}^T \{\epsilon_i\} dA_i - \{u_i\}^T \{F_i\} \quad \cdots (1)$$

と表せる。

A_i : 歯牙モデルの i 番目の要素の体積

$\{\sigma_i\}$: i 番目の四辺形要素内の応力ベクトル

$\{\epsilon_i\}$: i 番目の四辺形要素内のひずみベクトル

$\{u_i\}$: i 番目の四辺形要素各節点の変位ベクトル

$\{F_i\}$: i 番目の四辺形要素各節点の外力ベクトル

上式の右辺第1項は、歯牙モデルの i 番目の要素のひずみエネルギー、第2項は、歯牙モデルの i 番目の要素に作用する咬合力のポテンシャルを示す。図1に示すように歯牙モデルを四辺形要素に分割し、 i 番目の要素の内部での変位ベクトル $\{d_i\}$ は i 番目の要素の節点における変位ベクトル $\{u_i\}$ と形状関数マトリックス $[N]$ を用いると、次式で表せる。

$$\{d_i\} = [N] \{u_i\} \quad \cdots (2)$$

要素内部のひずみベクトル $\{\epsilon_i\}$ は、微分演算子 $[L]$ 、ひずみマトリックス $[B]$ と節点変位ベクトル $\{u_i\}$ を用いると、

$$\begin{aligned} \{\epsilon_i\} &= [L] \{d_i\} = [L] [N] \{u_i\} \\ &= [B] \{u_i\} \quad \cdots (3) \end{aligned}$$

となる。さらに要素内の応力ベクトル $\{\sigma_i\}$ は、弾性定数マトリックス $[D]$ とひずみベクトル $\{\epsilon_i\}$ によって、

$$\{\sigma_i\} = [D] \{\epsilon_i\} \quad \cdots (4)$$

となり、式(3)を用いると、応力ベクトルは次式となる。

$$\{\sigma_i\} = [D] [B] \{u_i\} \quad \cdots (5)$$

式(1)の i 番目の要素の全ポテンシャルエネルギー Π_i は、式(3)と式(4)を用いると、

$$\begin{aligned} \Pi_i &= (1/2) \int_{A_i} \{u_i\}^T [B]^T [D]^T [B] \\ &\quad \{u_i\} dA_i - \{u_i\}^T \{F_i\} \quad \cdots (6) \end{aligned}$$

と表せる。

歯牙モデル全体のポテンシャルエネルギーは、各要素のポテンシャルエネルギーの和として表せるので、次式となる。

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum \Pi_i \\ &= (1/2) \sum \int_{A_i} \{u_i\}^T [B]^T [D]^T [B] \\ &\quad \{u_i\} dA_i - \sum \{u_i\}^T \{F_i\} \quad \cdots (7) \end{aligned}$$

外力を受ける時、歯牙モデルの実際の変形は歯牙モデルの全ポテンシャルエネルギーが最小となるかたちで求められるので、式(7)の最小値を求めると、

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = KU - F = 0 \quad \cdots (8)$$

$$K = \sum \int_{A_i} [B]^T [D]^T [B] dA_i \quad \cdots (9)$$

$$F = \sum \{F_i\} \quad \cdots (10)$$

$$U = \sum \{u_i\} \quad \cdots (11)$$

を得る。

式(9)は歯牙モデル全体の材質と形状が与えられた時に求められる剛性マトリックス、式(10)は外力ベクトル、式(11)は変位ベクトルを表し、式(8)の一次方程式を解けば歯牙の変位が求まり、それを式(3)と式(4)に代入すれば応力も求まる。

なお、前述の式中の上添字 T は、転置マトリックスを意味し、 $\{ \}$ はベクトル、 $[\]$ はマトリックスをそれぞれ表す。

つぎに実際の解析手順を述べると、

- (1) 歯牙モデルを、有限個の要素に分割する。
- (2) 各節点に作用する荷重を、評価する。
- (3) 各要素の形状と材質で、剛性を評価する。
- (4) 要素の剛性と荷重を、全体の剛性マトリックスと荷重ベクトルに組込む。

図2 2次元アイソパラメトリック2次要素

(5) 得られた連立一次方程式を用いて、節点での変位を求める。

(6) 節点変位より要素の応力を計算する。

2. 形状関数マトリックスについて (図2)

前述のごとく、有限要素法においては、いかなる形状関数 [N] を用いたかが、解析結果の精度上キーポイントとなる。一般的に要素の形状が正方形に近ければ形状関数の選定に特に制限はないが、図1に示す極端な長方形形状の要素の場合には、形状関数の選定が重要な問題となる。節点座標と節点変位を同じ形状関数に補間して作られたアイソパラメトリック要素は、前述の極端な長方形要素に適している。したがって、本解析の形状関数マトリックスとしては、2次のアイソパラメトリックの形状関数マトリックスを用いた。

式(2)で与えられた要素内変位ベクトル $\{d_i\}$ の X, Y 方向の変位 u, v は、形状関数マトリックスを用いると次式で表せる。

$$u = (N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 + N_3 \cdot u_3 + N_4 \cdot u_4 + N_5 \cdot u_5 + N_6 \cdot u_6 + N_7 \cdot u_7 + N_8 \cdot u_8)$$

$$v = (N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot v_2 + N_3 \cdot v_3 + N_4 \cdot v_4 + N_5 \cdot v_5 + N_6 \cdot v_6 + N_7 \cdot v_7 + N_8 \cdot v_8)$$

前述において N_1 から N_8 は、 ξ と η を図2に示す要素座標系とすると、

$$N_1(\xi, \eta) = -1/4 (1-\xi) (1-\eta) (1+\xi+\eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = 1/2 (1-\xi^2) (1-\eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = 1/4 (1+\xi) (1-\eta) (\xi-\eta-1)$$

$$N_4(\xi, \eta) = 1/2 (1+\xi) (1-\eta^2)$$

表1 材料定数

Materials	Young's Moduli (kg/mm ²)	Poisson's ratios
金属 (crown)	9.1×10^3	0.33
金属 (core)	9.5×10^3	0.33
レジン (core)	1.4×10^3	0.30
歯質 (dentin)	1.3×10^3	0.30
根充剤	1.0×10^3	0.39
歯根膜	0.7	0.49
セメント	9.0×10^2	0.35
骨	2.0×10^3	0.30

$$N_5(\xi, \eta) = 1/4 (1+\xi) (1+\eta) (\xi+\eta-1)$$

$$N_6(\xi, \eta) = 1/2 (1-\xi^2) (1+\eta)$$

$$N_7(\xi, \eta) = 1/4 (1-\xi) (1+\eta) (-\xi+\eta-1)$$

$$N_8(\xi, \eta) = 1/2 (1-\xi) (1-\eta^2)$$

で与えられ、 u_1, v_1 から u_8, v_8 を各節点で X, Y 方向の変位量 (図2中の白丸での値) である。

さらに、図2の黒丸の1~9は式(9)の要素の剛性マトリックスを計算する際に必要なガウス数値積分を行う点である。

解析と考察

1. 歯牙のモデル化

小白歯に根管充填を施し、さらに支台築造、歯冠補綴を行ったものを想定した二次元モデルを用い、平面応力問題として解析を行った (図1)。

歯牙の形状、寸法は藤田ら¹⁵⁾の報告を参考とし、支台歯形成および根管形成の側壁のテーパ角度は $1/20$ 、セメントの厚味は $100 \mu\text{m}$ 、解析に用いた諸材料のヤング率とポアソン比の値は表1に示す。そして近遠心方向を X 軸、歯軸方向を Y 軸とした。また、Y 軸・咬合面上の節点に、集中荷重として 1.0 kg の圧縮荷重を負荷した。

a. 拘束条件について

解析を行う上で、どの節点を拘束するかによって解析値に大きな差を生じてしまうが、従来の研究において拘束条件に対する検討はほとんどなされていない。

解析する対象物 (今回は歯牙) に対して、拘束点はできるだけ遠方に設定することが解析結果の精度を上げる点では好ましいが、電子計算機の記憶容量と計算時間の制約を受ける。そのため、今回6タイプの拘束条件を設定し、解析値の差異を検討した (図3)。各拘束条件を、B1, B2, B3, B4, B5, B6 とし、以下に述べる。

B1: 歯根と歯根膜との境界上の各節点を拘束した場合。

図3 拘束条件

B2: 歯根膜と歯槽骨との境界上の各節点を拘束した場合.

B3: 図の歯槽骨上の各節点を拘束した場合.

B4: B3の節点をX軸方向に移動した歯槽骨上の各節点を拘束した場合.

B5: B3の節点をY軸方向に移動した歯槽骨上の各節点を拘束した場合.

B6: B3の節点をX, Y軸方向に移動した歯槽骨上の各節点を拘束した場合.

モデル B1 の歯根表面で拘束したものと他の条件

(B2~B6) で拘束したものに大きな差が認められた (表 2, 3).

特に歯根部での応力値に, 著しい違いが生じた (図 4).

これはモデル B1 はヤング率 0.7 kg/mm^2 , ポアソン比 0.49 の流動体に近い歯根膜を介さずに, 直接拘束しているが, 他の条件は歯根膜を含んでいるため, その差が大きく出たのであろう. また, B4 と B6 のモデルの歯槽骨条件は, 隣在歯が存在する場合は, あり得ない拘束条件であるが, 今回はあえて延長して解析値の変化を確かめようとしたが, 歯槽骨の部分を含めても, B2 の条件と大きな違いは生じなかった. すなわち, 拘束条件としては, B2 モデルを用いれば良いという結果を得た.

b. 歯根膜の物性の影響について

歯根膜の物性 (ヤング率, ポアソン比) の違いによる解析値の変化について検討した. 前述のように, 歯根膜の物性の影響は, 歯根部の解析値に大きく現れる. そこで, 歯根膜のヤング率とポアソン比の両者の値を変えて解析を行い, 歯根部の解析結果を図 5 と図 6 に示す.

ヤング率の大きい歯根膜ほど, 歯質の応力値が小さくなり, ポアソン比の大きい歯根膜ほど, 歯質の応力値は大きくなるが, ヤング率ほどの影響はみられない. モデル B1 の歯根表面で拘束したものは, 歯根膜の剛性を無限に大きくしたものと同等であると考えられるため, 拘束点近傍の歯根部歯質の応力値が最も小さくなった. これらの結果は, 異なる材質の間でずれが発生せず完全固着を仮定しているため, 剛性 (ヤング率) の大きい物質ほど, 荷重をより多く負担し, 応力も大きくなる.

c. 歯牙モデルの変形と応力について

図 7 の左図は, 拘束条件を B2 (歯根膜のヤング率 0.7 kg/mm^2 , ポアソン比 0.49) とし, 荷重を負荷した時の歯牙モデルの応力分布を, 右図は変形をそれぞれ表している. 左図の Crown 部分では, 荷重点近傍に最も大きな応力が生じている. そして接触点付近に近づくにつれて減少し, マージン部分ではまた大きくなっている. これは剛性の大きい支台築造体の金属が剛性の小さい歯質に比べて, より大きな荷重を負担しているためと思われる, 特に歯頸部付近で顕著である.

左図の応力が大きい荷重直下点近傍を右図の変形図でみると, 鉛直下方向のみに負荷を与え, 対称変形を仮定しているため, ほとんど下方向だけに変形しているが, ポアソン比の影響で水平方向にも若干膨張変形し, 最大量を比較すると, 上下方向の約 $1/30$ 程度である.

表 2 B1~B6 モデルの応力値の変化 (X方向)

要素番号	X 方向の STRESS (kg/mm ²)					
	B 1	B 2	B 3	B 4	B 5	B 6
1	0.153	0.154	※	※	※	※
5	0.313×10^{-1}	0.128×10^{-1}	※	※	※	※
9	-0.293×10^{-1}	-0.296×10^{-1}	※	※	※	※
14	0.672×10^{-1}	※	※	※	※	※
17	-0.314	※	※	※	※	※
19	0.600×10^{-2}	0.534×10^{-2}	※	※	※	※
27	-0.201×10^{-1}	-0.207×10^{-1}	※	※	※	※
29	0.140×10^{-1}	0.142×10^{-1}	※	※	※	※
48	-0.330×10^{-1}	-0.205×10^{-1}	※	※	※	※
53	-0.119	-0.999×10^{-1}	※	※	※	※
55	-0.382×10^{-1}	-0.741×10^{-2}	-0.742×10^{-2}	-0.741×10^{-2}	-0.743×10^{-2}	-0.742×10^{-2}
62	-0.957×10^{-1}	-0.376×10^{-1}	-0.377×10^{-1}	-0.378×10^{-1}	-0.377×10^{-1}	-0.379×10^{-1}
64	-0.950×10^{-1}	-0.321×10^{-1}	※	-0.322×10^{-1}	-0.321×10^{-1}	-0.323×10^{-1}
66	-0.356×10^{-1}	-0.181×10^{-1}	※	-0.184×10^{-1}	-0.181×10^{-1}	-0.185×10^{-1}
70	-0.287×10^{-1}	-0.249×10^{-2}	※	※	※	※
73	-0.173×10^{-1}	-0.175×10^{-1}	※	※	※	※
79	-0.430×10^{-1}	-0.126	※	※	※	※
82	-0.485×10^{-1}	-0.211	-0.210	※	※	※
85	-0.222×10^{-1}	-0.537×10^{-1}	-0.535×10^{-1}	-0.533×10^{-1}	-0.535×10^{-1}	-0.533×10^{-1}
90	-0.228×10^{-3}	-0.861×10^{-1}	※	※	※	※

※：※印の左のモデルと同じ値を表す

表 3 B1~B6 モデルの応力値の変化 (Y方向)

要素番号	Y 方向の STRESS (kg/mm ²)					
	B 1	B 2	B 3	B 4	B 5	B 6
1	-0.154×10	※	※	※	※	※
5	-0.122	-0.118	※	※	※	※
9	-0.222×10^{-1}	-0.202×10^{-1}	※	※	※	※
14	-0.403×10^{-1}	-0.412×10^{-1}	※	※	※	※
17	-0.982	※	※	※	※	※
19	-0.567×10^{-1}	-0.530×10^{-1}	※	※	※	※
27	-0.116	-0.954×10^{-1}	※	※	※	※
29	-0.372×10^{-1}	-0.362×10^{-1}	※	※	※	※
48	-0.276	-0.274	※	-0.273	-0.274	※
53	-0.195	-0.221	※	※	※	※
55	-0.271	-0.178	-0.179	-0.178	-0.179	※
62	-0.104	-0.959×10^{-1}	※	-0.960×10^{-1}	-0.959×10^{-1}	-0.960×10^{-1}
64	-0.683	-0.865	※	※	※	※
66	-0.115	-0.147	※	※	※	※
70	-0.438	-0.151	※	※	※	※
73	-0.462	-0.915	-0.914	※	※	※
79	-0.257	-0.751	-0.750	※	※	※
82	-0.190	-0.729	-0.728	※	※	※
85	-0.533×10^{-1}	-0.201	※	※	※	※
90	-0.249×10^{-3}	-0.461×10^{-1}	-0.460×10^{-1}	※	-0.459×10^{-1}	※

※：※印の左のモデルと同じ値を表す

図4 モデル B1 と B2 の応力値

図5 解析値の変化

図 6 解析値の変化

図 7 歯牙モデルの応力と変形

図8 隣接歯のモデル化(下顎)

2. 隣在歯のモデル化

隣在歯との接触点を弾性支持点と考え、近遠心方向に剛性をもつ伸縮バネを用いてモデル化を行い、解析を行った(図8)。

a. 孤立した下顎第2小臼歯の剛性

安永¹⁶⁾によれば、生体の口腔内において孤立歯の下顎第2小臼歯は、近心隣接面に遠心方向の荷重 200 g が加えられると、47 μm の変位を示している。この状態を板厚を調製することにより、解析モデルに再現した。

b. 下顎第2小臼歯に対する隣接歯の剛性

同様に安永¹⁶⁾によれば、下顎第2小臼歯が欠損して、歯列の連続が断たれている例において、第1大臼歯の近心隣接面に、遠心方向の荷重 200 g を負荷した場合、第1大臼歯を含む後方歯(第1、第2、第3大臼歯)の変位量は、13 μm となっている。

したがって、後方臼歯部の、みかけのばね定数 k は、 $f=ku$ より

$$k=f/u=0.200/0.013=15.4 \text{ [kg/mm]}$$

図9 接触点支持なし(歯冠部)

で与えられる。

c. 側方力を受ける下顎第2小臼歯の解析

接触点を考慮に入れないで解析した結果が図9, 10で、接触点を考慮に入れた解析結果が図11, 12である。側方力に対して接触点を考慮しないと、外力を単独歯で負担することになるが、接触点を考慮に入れることにより、隣在歯も外力を負担することになり、より生体に近い解析になると考えられる。

結 論

有限要素法を用いて、歯冠補綴物の解析を行った結果、つぎの事柄が明らかになった。

1. 従来の実験的手法の代わりに有限要素法を用いることにより、歯冠補綴物の応力分布に関する数値的解析が、容易で精度良く行えることを明らかにした。

2. 有限要素法の解析において、歯根膜と歯槽骨との

図 10 接触点支持なし (歯根部)

境界上の各節点を拘束点とすれば歯冠補綴物の応力解析には十分の精度を与える。

3. 解析値の変化には、歯根膜のヤング率の影響が著明で、ヤング率が大きくなると、拘束点近傍の歯根部歯質の応力は小さくなった。

図 11 接触点支持モデル化 (歯冠部)

4. 解析対象歯牙に対する隣接歯の剛性をモデル化することにより、より生体に近い応力分布が得られるようになった。

なお、本研究の要旨は第73回日本補綴歯科学会、および日本大学生産工学部第18回学術講演会において発表した。

稿を終るにあたり、本研究に対し終始ご懇篤なるご指導ならびにご校閲を賜りました、日本大学松戸歯学部補綴学第2講座村田義純教授ならびに日本大学生産工学部機械工学科植村益次教授、邊 吾一助教授に深く謝意を表します。さらに、ご協力をいただいた補綴学第2講座医局員、大学院生各位ならびに生産工学部機械工学科植村・邊研究室大学院生、卒研究生各位に対し感謝の意を表します。

文 献

$\longleftrightarrow$ 0.1kg/mm^2 (引張り)
 $\longleftrightarrow$ 1.0kg/mm^2 応力
 $\times$ 0.1kg/mm^2
 $\times$ 1.0kg/mm^2 (圧縮)

図 12 接触点支持モデル化 (歯根部)

- 1) Farah, J.W., et al. : Reflection Protoelastic Analysis of a Dental Bridge, J. Dent. Res., 50 (5) : 1253~1259, 1971.
- 2) Craig, R.G., et al. : Measurement of Strains in Fixed Bridge with Electronic Strain Gauges, J. Dent. Res., 46 (3) : 615~619, 1967.
- 3) Tillitson, E.W., et al. : Experimental Stress Analysis of Dental Restorations. Part VIII. Surface Strains on Gold and Chromium Fixed Partial Dentures, J. Prosthet. Dent., 24 (2) : 174~180, 1970.
- 4) Tillitson, E.W., et al. : Experimental Stress Analysis of Fixed Partial Dentures by Use of Dynamic Method, J. Dent. Res., 50 (2) : 422~429, 1971.
- 5) Craig, R.G., et al. : Measurement of Stresses in Fixed-Bridge Restorations Using a Brittle Coating Technique, J. Dent. Res., 44 (4) : 756~762, 1965.
- 6) Caputo, A.A., et al. : Small Specimen Strain Measurement by Moire Fringes, J. Dent. Res., 53 (1) : 98~103, 1974.
- 7) Hinton, E. and Owen, D.R.J. : Finite Element Programming, Academic Press Inc., London, 1977.
- 8) 戸川隼人 : 有限要素法概論, 培風館, 東京, 1981.
- 9) 宮川 修 : 橋義歯の有限要素法による力学的研究 (第1報), 歯理工誌, 17 (40) : 269~277, 1976.
- 10) Turner, M.J., Clough, R.W., et al. : Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, J. The Aeronautical Sciences, 23 : 805~854, 1956.
- 11) Nicholls, J.I. : Crown Retention. Part 1. Stress Analysis of Symmetric Restorations, J. Prosthet. Dent., 31 (2) : 179~184, 1974.
- 12) Farah, J.W. and Craig, R.G. : Distribution of Stresses in Porcelain-Fused-Metal and Porcelain Jacket Crowns, J. Dent. Res., 54 (2) : 255~261, 1975.
- 13) Reinhardt, R.A., Krejci, R.F., et al. : Dentin Stresses in Post-reconstructed Teeth with Diminishing Bone Support, J. Dent Res., 62 (9) : 1002~1008, 1983.
- 14) 久保至誠, 佐伯謙吾, 他 : 窩洞形態の解析, 日歯保誌, 27 (4) : 848~857, 1984.
- 15) 藤田恒太郎, 桐野忠大 : 歯の解剖学 第21版, 金原出版, 東京, 1976.
- 16) 安永 博 : 隣接面接触関係から見た歯列の近遠心方向の生力学的挙動, 九州歯会誌, 28 (5) : 605~623, 1975.