嗜好度間相関を検討するための シェッフエ型一対比較モデル¹

岩間 徳兼^{2,3} 豊田 秀樹 早稲田大学

Scheffé-type paired comparison models for examining correlations between
individual preferences for alternatives

Norikazu Iwama and Hideki Toyoda (Waseda University)

It is difficult to estimate and examine correlations between individual preferences for alternatives using the present Scheffé-type paired comparison models. In this paper, we propose two models that address individual preferences for alternatives. One is a simple model that makes it possible to estimate correlations between individual preferences. The other is an improved model that makes it possible to extract independent components from those correlations. Paired comparison data were collected in a survey about preferences for several new product names. Analysis of this data shows that the proposed models enabled the estimation not only of average preferences for alternatives, but also correlations between individual preferences and loading matrices for independent components. The effectiveness of the proposed methods was confirmed by the interpretations of those estimates.

Key words: paired comparison, preference correlations, structural equation modeling, independent components, third-order moments.

The Japanese Journal of Psychology

2011, Vol. 82, No. 5, pp. 442-449

複数の対象をある心理尺度上に位置づけるために利用される方法の一つに一対比較法がある。一対比較法は複数の対象の中から 2 個ずつを選んで比較対を作り、それらに対する評価をもとに各対象の心理尺度値を得る方法であり、態度、価値、嗜好度などの心理量を測定する目的で用いられる。本論文においては心理量として嗜好度を扱い、一対比較の代表的モデルの一つであるシェッフエモデル (Scheffé, 1952) に焦点を当てる。まずは、本論文で扱う問題を具体的にするため、多重評価状況下におけるシェッフエ型の一対比較モデルについて説明する。

シェッフエの一対比較モデルの原法ではひとりの評

価者は対象に関する提示順序を考慮した比較対のうち一つのみを評価することになっているが、ここではひとりの評価者が対象に関する提示順序を考慮した全ての比較対を評価する場面を考える。そのような多重評価の状況下におけるシェッフエ型の一対比較モデルは

$$x_{ijk} = f_{ik} - f_{jk} + \gamma_{ij} + \delta_k + e_{ijk} \quad (1)$$

$$= (\alpha_i + \beta_{ik}) - (\alpha_j + \beta_{jk}) + \gamma_{ij} + \delta_k + e_{ijk} \quad (2)$$

のように表現される (佐藤, 1985)。(1)式の x_{ijk} は評価者 k が対象 i と対象 j をこの順で一対比較した際に対象 i を対象 j よりどの程度好むかについての評価値を表す。評価値はモデル上では連続変数だが、実際には原点を 0 とした 5, 7, 9 件法などにより多値の形で得られる。そして、 f_{ik} と f_{jk} はそれぞれ対象 i と対象 j に対する評価者 k の嗜好度である。(2)式に示されるように f_{ik} は対象 i に対する平均的嗜好度 α_i と、嗜好度に関する、評価者 k に固有の平均的嗜好度からの偏差、つまり個人差 β_{ik} の和から成る。平均的嗜好度には $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ という制約が置かれる場合が多い。この平均的嗜好度の値によって、各対象に対する嗜好の程度を評価することができる。また、個人差には、 $\sum_{k=1}^n \beta_{ik} = 0$ という制約が置かれる。ただし、 n は対象

Corresponding concerning this article should be sent to: Norikazu Iwama, Graduate School of Humanities and Social Sciences, Waseda University, Toyama, Shinjuku-ku, Tokyo 162-8644, Japan (e-mail: n.iwama0119@aoni.waseda.jp)

¹ 本研究の一部は、日本学術振興会の科学研究費補助金 (特別研究員奨励費) を受けて行われた。

² 日本学術振興会特別研究員

³ 本研究にあたり調査にご協力下さった多くの方々に対して感謝いたします。

の数, r は評価者の数を表す。次に γ_{ij} は対象 i と対象 j の順序付き比較における対象の組み合わせ効果であり, これには $\sum_{j=1}^n \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^n \gamma_{ji} = 0$, $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$ という制約が置かれる。そして, δ_k は評価者ごとに定義される, 比較の際の順序効果である。最後に, e_{ijk} は対象 i と対象 j の順序付き比較での評価値に含まれる誤差を表している。

シェッフェの一対比較モデルは分散分析モデルと数理的に同等であり, 分散分析を行うことも可能な構造方程式モデリング (Structural Equation Modeling: 以下 SEM とする) の枠組みから多重評価状況下のシェッフェの一対比較データを解析する手法が提案されてきた (豊田・室橋・尾崎・芳賀, 2004; 豊田・尾崎・室橋・芳賀, 2004)。SEM を利用して分析する主な利点としては, 各対象の尺度値を表す平均的嗜好度の推定値やその標準誤差を容易に求められること, 対象に対する好みの散らばりについて考察できること, 個人差を因子得点として推定できることが挙げられる。なお, シェッフェ型の一対比較における個人差の検討の有効性については, 野澤・飯田・椿・芳賀・鎗田・吉澤 (1995) においても示唆されている。

ここで以降の説明のため, モデルを行列形式で再表現することを考える。ただし, 簡単なために組み合わせ効果を省略することとする。さらに, 評価時における判断の往復を許し, 順序効果の項も考慮しない状況を想定する。そのとき, 評価値に関して $x_{ijk} = -x_{jik}$ の関係が成り立つとすることにより, $i < j$ である x_{ijk} のみが得られていると考えることができる。すると n 個の対象に関する $m = n(n-1)/2$ 個の評価値を

$$x_k = A f_k + e_k \quad (3)$$

と表現できる。 A は $m \times n$ 計画行列, x_k, f_k, e_k はそれぞれ評価者 k についての, $m \times 1$ 評価値ベクトル, $n \times 1$ 嗜好度ベクトル, $m \times 1$ 誤差ベクトルである。

対象が四つの場合を例にとると $n=4, m=6$ となり, (3)式における $x_k = (x_{12k}, x_{13k}, x_{14k}, x_{23k}, x_{24k}, x_{34k})'$ は, 評価者 k の各比較対における評価値が要素として含まれる 6×1 ベクトルとなる。なお, x_{12k} の添え字 12 は対象 1 と対象 2 の比較であることを示している。また, $f_k = (f_{1k}, f_{2k}, f_{3k}, f_{4k})'$ は 4×1 ベクトルであり, 評価者 k の各対象への嗜好度が要素として含まれる。そして, $e_k = (e_{12k}, e_{13k}, e_{14k}, e_{23k}, e_{24k}, e_{34k})'$ は 6×1 ベクトルであり, 評価者 k の各比較対の評価における誤差が要素として含まれる。最後に, 6×4 行列 A は一対比較モデルを表現するための計画行列であり, 具体的には以下ようになる。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

以降では, 確率ベクトル x, f, e の実現値として評価者 k に関するベクトル x_k, f_k, e_k が得られていると捉え直し, (3)式から k を省略した確率ベクトルによる表現

$$x = A f + e \quad (5)$$

で議論を進める。このとき, $E[e] = 0$, および f と e は独立であると仮定すると平均構造と共分散構造は

$$\mu_x = A \alpha \quad (6)$$

$$\Sigma_x = A \Sigma_f A' + \Sigma_e \quad (7)$$

となる。ここで, $E[f] = \alpha$ は各対象の平均的嗜好度を表す $n \times 1$ 母数ベクトルであり, $\alpha' \mathbf{1}_n = 0$ を満たすと仮定される。対象が四つの場合には $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)'$ となる。そして, $\beta = f - \alpha$ によって嗜好度における個人差が表現される。また, Σ_e は e の $m \times m$ 共分散行列であり, 対角行列であるという仮定が置かれる。なお, シェッフェの原法では e_{ij} には添え字にかかわらず等分散が仮定されており, その場合 Σ_e の対角要素はすべて等しくなる。

シェッフェの一対比較モデルを SEM によって分析するこれまでの手法では, 嗜好度 f の間の相関については, 共分散行列 Σ_f が対角行列であると仮定が置かれていた (豊田・尾崎他, 2004)。つまり, 各対象の嗜好度は無相関であるとされていた。これは, 嗜好度間共分散行列 Σ_f と $\Sigma_f + d \mathbf{1} \mathbf{1}' + \mathbf{1} d'$ との識別が不可能であるという根本的な問題を一対比較モデルが内包することに由来した (Arbuckle & Nugent, 1973; Tsai, 2000, 2003), モデル識別を目的とする仮定であり, 実質科学的観点に基づいているわけではない。似た特徴を有する対象があれば, 同一個人のそれらに対する嗜好は似ており, 嗜好度の間に相関が生じるはずであるから, 現実的にみても共分散が 0 というのは非常に強い仮定であり, そこに存在する有効な情報を無視してしまう危険性が高い。

また, Σ_f の識別性を考慮すると, 嗜好度間共分散を推定するための方法として, 各対象に関する嗜好度の分散を 1 などの固定値に制約して残りの共分散要素を推定する方法や一つの対象に関して分散を 1 などの固定値に, その対象とそれ以外の対象との嗜好度間共分散を 0 に制約して残りの分散共分散要素を推定する方法が考えられる。しかし前者については, 多くの人が同じような好みを示す個人差の小さな対象と好みが大きく分かれ易い個人差の大きな対象があるのが普通であるから, 全対象についての嗜好度の分散が等しいという仮定はかなり強いといえる。また, 後者に関しては, 対角行列の仮定の場合ほどではないにしろ, 共分散に関する 0 の仮定と情報の一部の欠落という問題がある。

上記のように, これまで提案されてきたシェッフェの一対比較データの分析方法では対象に対する各個人の嗜好度間の相関関係について適切に検討できる方法

はほとんどなく、従来の分析方法では嗜好度間相関の情報は積極的に利用されてこなかった。当然のことながらその情報は非常に有益であり、適切に知ることができれば対象に対する好みの関係性やその背後にある要因について深く検討することが可能となる。そこで、本論文では多重評価状況下でのシェッフェの対比較において対象の嗜好度間相関を適切に検討することを目的とした、SEM の枠組みによる有効な方法を二つ提案する。

一つ目は、嗜好度に関する自然な仮定を導入することにより共分散構造分析で嗜好度間相関行列の推定を可能とする方法であり、その方法では上で述べた恣意的な固定値の問題は解決され、情報の欠落も生じることはない。

二つ目は、嗜好度間の関係に基づいてそれらの背後に想定される独立成分の抽出をも可能とする、3 次積率を用いた SEM による分析方法である。これは一つ目の方法を発展させた方法であり、固定値を用いる必要や情報の欠落が生じないばかりか、3 次積率の利用によって成分抽出における回転の不定性を解決しているという特長を有している。

これらの手法では、SEM の観点から分析する利点も十分に生かされており、対象に対する嗜好度間の相関関係について適切かつ詳しく検討することが可能となる。

モデル

嗜好度間相関推定モデル

モデル表現と母数推定 まず、対象の嗜好度間共分散行列を推定するにあたり

$$f = Af_{-1} \quad (8)$$

という嗜好度に関するイプサティブスコアの制約を設ける。ここで、 f_{-1} は f から任意の一つの要素を除いた $(n-1) \times 1$ ベクトルであり、本論文では最後の要素を除いたベクトルとして定める。また、 A はイプサティブスコアの制約を表現するための $n \times (n-1)$ 行列である。

もともと嗜好度は構成概念であるから、個人内での選好度の平均が 0 という基準を定めることには問題がない。また、相対的な比較判断に関する観測変数が、同じく相対的な嗜好度から生じているというのも自然な考えである。さらに、(8)式を実現値レベルで考えると $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, $\sum_{i=1}^n \beta_{ik} = \sum_{k=1}^n \beta_{ik} = 0$ を表現していることに相当する。この仮定はシェッフェの原法を拡張した、浦の変法 (浦, 1956) や中屋の変法 (中屋, 1970) において採用されており、イプサティブスコアの制約は無理のないものと思われる。具体的に、四つの対象の場合には $f_{-1} = (f_1, f_2, f_3)'$ であり

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

となる。その結果 $f = (f_1, f_2, f_3, -f_1 - f_2 - f_3)'$ と表され、四つの対象に関する嗜好度の和が 0 となることが確認できる。(8)式を(5)式に代入すると

$$x = AA'f_{-1} + e = Gf_{-1} + e \quad (10)$$

と再表現される。ここで、 $G = AA'$ であり、対象が四つの場合、以下のように表される。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

(10)式をみると、これは新たな計画行列 G を因子負荷行列とする確認的因子分析モデルであることがわかる。このモデルにおける共分散構造を考えると

$$\Sigma_x = AA'\Sigma_{f_{-1}}A' + \Sigma_e = G\Sigma_{f_{-1}}G' + \Sigma_e \quad (12)$$

となる。ただし、 $\Sigma_{f_{-1}}$ は f_{-1} に関する $(n-1) \times (n-1)$ 共分散行列である。このモデルに関しては、まず因子分析モデルであるから Σ_e は識別される。次に $A = A_{-1}A'$ と表すことができる点に注意する。ここで、 A_{-1} は A から最後の 1 列を除いた $m \times (n-1)$ の列フルランクな行列である。 $\text{rank}(A'A) = \text{rank}(A) = n-1$ であるので $A'A$ は非特異であり、 $\text{rank}(G) = \text{rank}(A_{-1}A'A) = n-1$ となるから G は列フルランクであり、 $\Sigma_{f_{-1}}$ は識別される。続いて平均構造を考えると

$$\mu_x = AA'\alpha_{-1} = G\alpha_{-1} \quad (13)$$

となり、 α_{-1} については制約を入れることなく識別されることがわかる。

ここで(6)式と(13)式、(7)式と(12)式とを比較すると $\alpha = A\alpha_{-1}$ および $\Sigma_f = A\Sigma_{f_{-1}}A'$ が導かれる。したがって、まずは(10)式のモデルに基づいて $n-1$ 個の対象に関する $\hat{\alpha}_{-1}$, $\hat{\Sigma}_{f_{-1}}$ を得て、そのあとで $A\hat{\alpha}_{-1}$, $A\hat{\Sigma}_{f_{-1}}A'$ と変換することで、 n 個の対象についての平均的嗜好度、嗜好度間共分散行列の推定値 $\hat{\alpha}$, $\hat{\Sigma}_f$ を得ることが可能となる。1 段階目の母数推定には、組み合わせ効果や順序効果を伴うならば EQS (Bentler & Wu, 2002) や Mplus (Muthén & Muthén, 2010)、そうでなければそれ以外にも Amos (Arbuckle, 2009) や R (Ihaka & Gentleman, 1996) などの SEM を実行できるソフトウェアを利用すればよい。また、その後の計算には R などの行列演算が可能なソフトウェアの利用が考えられる。

n 番目の対象に関する標準誤差の算出 上述のソフトウェアの出力から得られる、推定量の共分散行列の推定値を利用すると、 n 番目の対象の推定値に関する標準誤差を得ることもできる。平均的嗜好度の標準誤差の計算については、 $\hat{\alpha} = A\hat{\alpha}_{-1}$ より、 n 番目の対象の

平均的嗜好度の推定値が $\mathbf{A}$ の n 行目の行ベクトル $-\mathbf{1}'_{n-1}$ を用いて $\hat{\alpha}_n = -\mathbf{1}'_{n-1}\hat{\alpha}_{-1}$ と表せることに注目する。このとき、 $\Sigma_{\hat{\alpha}_{-1}}$ を $\hat{\alpha}_{-1}$ の共分散行列とすると $\hat{\alpha}_n$ の分散は

$$\sigma_{\hat{\alpha}_n}^2 = (-\mathbf{1}'_{n-1})\Sigma_{\hat{\alpha}_{-1}}(-\mathbf{1}_{n-1}) = \mathbf{1}'_{n-1}\Sigma_{\hat{\alpha}_{-1}}\mathbf{1}_{n-1} \quad (14)$$

のように表される。したがって、 $\Sigma_{\hat{\alpha}_{-1}}$ を出力から得られる推定値で置き換えて(14)式で計算し、その正の平方根をとれば n 番目の対象に関する平均的嗜好度の標準誤差を算出できる。

次に嗜好度間共分散行列における n 番目の対象に関連する要素の標準誤差の計算方法について述べる。まず、嗜好度間共分散行列の n 行目を $(\hat{\Sigma}_f)_n$ と表すと、 $(\hat{\Sigma}_f)_n = -\mathbf{1}'_{n-1}(\hat{\Sigma}_{f-1})\mathbf{A}'$ が成立し

$$\text{vec}\{(\hat{\Sigma}_f)_n\} = \{\mathbf{A} \otimes (-\mathbf{1}'_{n-1})\} \text{vec}(\hat{\Sigma}_{f-1}) \quad (15)$$

となる。ここで、 $\text{vec}(\quad)$ は行列の列を1番左から順に下につないでベクトル化する作用素を表し、 $\otimes$ はクロネッカー積の演算子を意味している。そして、この関係を用いると

$$\Sigma_{\text{vec}(\hat{\Sigma}_f)_n} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{1}'_{n-1})\Sigma_{\text{vec}(\hat{\Sigma}_{f-1})}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{1}'_{n-1})' \quad (16)$$

のようにして嗜好度間共分散行列の n 行ベクトル $(\hat{\Sigma}_f)_n$ に関する共分散行列を得られる。ただし、 $\Sigma_{\text{vec}(\hat{\Sigma}_{f-1})}$ は $\text{vec}(\hat{\Sigma}_{f-1})$ の共分散行列である。したがって、 $\Sigma_{\text{vec}(\hat{\Sigma}_{f-1})}$ の推定値を出力から得て(16)式を計算し、その対角要素の正の平方根をとると標準誤差が算出できる。

独立成分を導入した一対比較モデルと母数推定

モデル表現と母数推定 先述の嗜好度間相関推定モデルを用いると対象の嗜好度間共分散行列を得られる。そして、共分散行列が得られたら、それを特徴づける要因を探ることでデータの背後に存在する構造についてさらに知ることが可能となる。ここでは、先のモデルに独立成分分析を組み込んで、対象の嗜好度間の関係の背後にある要因について検討する方法を提案する。

嗜好度間相関推定モデルの f_{-1} に関してさらに

$$f_{-1} = \alpha_{-1} + \mathbf{B}_{-1}\mathbf{g} \quad (17)$$

の構造を考える。独立成分の数を l 個とすると $\mathbf{B}_{-1}$ は $(n-1) \times l$ 独立成分負荷行列であり、 l 個の独立成分から $n-1$ 個の対象の嗜好度への影響を表す。また、 $\mathbf{g}$ は $l \times 1$ 独立成分ベクトルである。 $\mathbf{g}$ に関しては、 $E[\mathbf{g}] = \mathbf{0}$ および、 $\mathbf{g}$ の要素間の独立性によりその共分散行列が $\Sigma_{\mathbf{g}} = \mathbf{I}_l$ となることを仮定する。構造方程式モデリングの観点からは、嗜好度間相関推定モデルが測定方程式であり、(17)式が構造方程式である。独立成分と f_{-1} との関係は $\mathbf{B}_{-1}$ で表現されるが、独立成分と f との関係にこそ興味がある。そこで

$$f = \mathbf{A}f_{-1} = \mathbf{A}\alpha_{-1} + \mathbf{A}\mathbf{B}_{-1}\mathbf{g} \quad (18)$$

の関係に注目すると、 $\hat{\mathbf{B}}_{-1}$ について $\mathbf{A}$ を前から乗じることによって独立成分と f との関係を表す $n \times l$ 独立成分

負荷行列 $\mathbf{B}$ の推定値 $\hat{\mathbf{B}}$ を得られることがわかる。

豊田 (2007) は、3 次の積率を利用した構造方程式モデリングの枠組みから独立成分分析を行う方法を示しており、ここではその方法を利用する。(18)式を(5)式に代入すると、独立成分を導入した一対比較モデルは

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}\alpha_{-1} + \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{B}_{-1}\mathbf{g} + \mathbf{e} \quad (19)$$

と表現できる。ここで、 $\mathbf{g}$ 、 $\mathbf{e}$ 間は独立であることを仮定する。すると原点周りの1次の積率構造(平均構造)と平均周りの2次の積率構造(共分散構造)は

$$\mu_{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{A}\alpha_{-1} \quad (20)$$

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\mathbf{H}' + \Sigma_{\mathbf{e}} \quad (21)$$

となる。ただし、 $\mathbf{H} = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{B}_{-1}$ であり、 $\Sigma_{\mathbf{e}}$ は先に定めたものと同様である。また、平均周りの3次の積率構造は $m^3 \times 1$ ベクトル形式で

$$E[(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}}) \otimes (\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}}) \otimes (\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}})] \quad (22)$$

$$= E[(\mathbf{H}\mathbf{g} + \mathbf{e}) \otimes (\mathbf{H}\mathbf{g} + \mathbf{e}) \otimes (\mathbf{H}\mathbf{g} + \mathbf{e})] \quad (23)$$

$$= (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \otimes \mathbf{H})E[\mathbf{g} \otimes \mathbf{g} \otimes \mathbf{g}] + E[\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}] \quad (24)$$

と表される。 $E[\mathbf{g} \otimes \mathbf{g} \otimes \mathbf{g}]$ と $E[\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}]$ はそれぞれ独立成分の3次母積率ベクトルと誤差の3次母積率ベクトルであり、独立性の仮定から同一変数に関する3次積率、すなわち $\sigma_{g_i}^3 (i=1, \dots, l)$ と $\sigma_{e_{ij}}^3 (i=1, \dots, (m-1), j=(i+1), \dots, m)$ 以外の要素は0となる。

そして、複製行列のムーアペンローズ形逆行列 D_p^+ と3重複製行列 (Meijer, 2005) のムーアペンローズ形逆行列 T_p^+ を用いると、2次および3次の積率構造から重複要素を除いた積率構造ベクトルを $\sigma_2 = D_p^+ \text{vec}(\Sigma_{\mathbf{x}})$ 、 $\sigma_3 = T_p^+ E[(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}}) \otimes (\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}}) \otimes (\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}})]$ のように得ることができる。なお、 σ_2 、 σ_3 はそれぞれ、 $m(m+1)/2 \times 1$ 、 $m(m+1)(m+2)/6 \times 1$ のベクトルである。

$\sigma_1 = \mu_{\mathbf{x}}$ とし、 $\sigma = (\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)'$ によって1次から3次までの重複のない積率構造ベクトルを作り、 σ に対応する標本積率ベクトルを $s = (s'_1, s'_2, s'_3)'$ と表すと

$$f_{\text{ADF3}} = (s - \sigma)' W^{-1} (s - \sigma) \quad (25)$$

のように目的関数を構成することができる。 W は s の漸近共分散行列の一致推定量を標本サイズ倍したものであり、 f_{ADF3} を最小化することによってモデル母数の ADF3 推定値 (Mooijaart, 1985) を得る。

本モデルでは、 $\hat{\alpha}_{-1}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}_{-1}$ を用いて、 $\hat{\alpha} = \mathbf{A}\hat{\alpha}_{-1}$ 、 $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{B}}_{-1}$ 、 $\hat{\Sigma}_f = \mathbf{A}\hat{\mathbf{B}}_{-1}\hat{\mathbf{B}}_{-1}'\mathbf{A}'$ とすることで、 f に関する平均的嗜好度、独立成分負荷行列、嗜好度間共分散行列の推定値を求められる。また、 $\hat{D}_f^{-1/2}\hat{\Sigma}_f\hat{D}_f^{-1/2}$ によって嗜好度間相関行列の推定値を得たり、 $\hat{D}_f^{-1/2}\hat{\mathbf{B}}$ を計算して標準化された独立成分負荷行列を得ることもできる。ここで、 $D_f = \text{Diag}(\Sigma_f)$ であり、 $\text{Diag}(\quad)$ は括弧内の正方行列の非対角要素を0とした対角行列を生成する作用素を意味する。

n 番目の対象に関する標準誤差の算出 α_n の標準誤差は嗜好度間相関推定モデルの場合と同様に算出でき

る。ここでは $\hat{\mathbf{B}}$ の n 行目である $(\hat{\mathbf{B}})_{n\cdot}$ の標準誤差を求める方法を述べる。 $(\hat{\mathbf{B}})_{n\cdot} = -\mathbf{1}'_{n-1}\hat{\mathbf{B}}_{-1}$ の等式に関して vec 作用素を適用すると

$$\text{vec}\{(\hat{\mathbf{B}})_{n\cdot}\} = \{\mathbf{I}_l \otimes (-\mathbf{1}'_{n-1})\} \text{vec}(\hat{\mathbf{B}}_{-1}) \quad (26)$$

となる。これを用いると $\text{vec}\{(\hat{\mathbf{B}})_{n\cdot}\}$ の共分散行列は

$$\Sigma_{\text{vec}\{(\hat{\mathbf{B}})_{n\cdot}\}} = (\mathbf{I}_l \otimes \mathbf{1}'_{n-1}) \Sigma_{\text{vec}(\hat{\mathbf{B}}_{-1})} (\mathbf{I}_l \otimes \mathbf{1}'_{n-1})' \quad (27)$$

と表される。出力結果から得られる、 $\text{vec}(\hat{\mathbf{B}}_{-1})$ についての共分散行列 $\Sigma_{\text{vec}(\hat{\mathbf{B}}_{-1})}$ の推定値を (27) 式に代入して計算し、その対角要素の正の平方根を求めれば n 番目の対象に関する独立成分負荷量の標準誤差を得られる。

調 査

提案モデルの適用例として質問紙調査データの分析結果を示す。調査では緑茶飲料、シャンプーの二つの商品を取り上げた。そしてそれぞれについて新製品の売り出し場面を想定して複数のネーミングを考え、その好みを一対比較により評価することを調査参加者に求めた。

方 法

質問紙 二つの商品それぞれについて、六つのネーミング候補を用意し、各ネーミングのコンセプトおよび由来を調査参加者に説明したのち、判断の往復を許した 15 個の比較対に回答を求めた。比較対は左右にネーミングを配置する形で提示し、回答形式は“左のネーミングが非常に好き (3)” から “どちらでもない (0)” を経由して “右のネーミングが非常に好き (-3)” とする 7 件法とした。15 個の比較対において、左右のどちらかに偏って多く出現するネーミングがないように注意するとともに、比較対自体の提示順にも配慮した。

調査参加者 調査参加者は緑茶飲料、シャンプーに関して 166 名、158 名であり、同数の有効回答を得た。

分析 質問紙の回収後、比較対の提示順序と位置が適切になるように値の変換や列の置換を施してデータ行列を準備した。そして、今回の分析では各商品につき、六つのネーミングのうち四つのみを扱うこととして、それらに関する六つの比較対のデータを取り出して分析対象とした。本適用例では $\mathbf{R}$ を用いて、 $\mathbf{f}_{-1}$ の要素間の無相関を仮定して表現される嗜好度間無相関モデルと独立成分を導入した一対比較モデルによって分析を行った⁴。基となる一対比較モデルにおいて組み合わせ効果と順序効果の項は扱わなかった。独立成分の数が 0 個から 5 個までの場合で分析し、独立成分 0 個のモデルの推定の初期値には Mplus による嗜好度

Table 1
緑茶飲料データに関する適合度の要約

成分数	df	χ^2 値	RMSEA	AIC	BIC
無相関	62	267.257	.141	143.257	-49.686
0	52	85.861	.062	-18.139	-179.962
1	64	284.237	.144	156.237	-42.930
2	60	174.973	.107	54.973	-131.746
3	56	116.087	.080	4.087	-170.184
4	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—

間相関推定モデルの推定値を、独立成分 1 個以上のモデルの推定の初期値には独立成分 0 個のモデルの推定値を利用した。

結果と解釈

緑茶飲料のネーミング ネーミング候補は (a) 減茶栽培 (めっちゃヤバイ)、(b) 茶, destination、(c) 粗茶ですが…、(d) 飲め! の四つであり、対象に対する嗜好度の確率変数が順に f_1, f_2, f_3, f_4 で表される。緑茶飲料のネーミングデータの分析における適合度を Table 1 にまとめた。Table 1 から AIC や BIC を確認すると緑茶飲料データに関しては独立成分 0 個のモデルのあてはまりが一番良いことがわかる。また RMSEA は .062 であり、当該モデルの適合が比較的良好であることを示している。なお、独立成分 4 個、5 個のモデルは不適解であった。

$\mathbf{f}_{-1}$ に関する平均的嗜好度と嗜好度間共分散行列の推定値を Table 2 に示した。一番左の列の $\Sigma_{f_{-1}(i,j)}$ ($i=j, \dots, 3, j=1, \dots, 3$) は $\Sigma_{f_{-1}}$ の (i,j) 要素を表している。 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{-1}$ を用いると $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (-.020, -.392, .554, -.142)'$ と計算され、各推定値の標準誤差は .037, .039, .040, .041 であった。また、嗜好度間共分散行列 Σ_f と嗜好度間相関行列 $\mathbf{R}_f$ の推定値は以下のように算出された。 $\hat{\Sigma}_f$ の 4 行目に関する標準誤差は .038, .035, .036, .040 であった。

$$\hat{\Sigma}_f = \begin{bmatrix} .523 & -.258 & -.231 & -.034 \\ -.258 & .475 & -.037 & -.180 \\ -.231 & -.037 & .500 & -.232 \\ -.034 & -.180 & -.232 & .446 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_f = \begin{bmatrix} 1.000 & -.518 & -.451 & -.070 \\ -.518 & 1.000 & -.076 & -.391 \\ -.451 & -.076 & 1.000 & -.492 \\ -.070 & -.391 & -.492 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (29)$$

推定値の解釈をすると、平均的嗜好度は“粗茶ですが…”が最も高く、大きく離れて“減茶栽培 (めっちゃヤバイ)”, “飲め!”, そして最後に“茶, destina-

⁴ 分析に使用されたスクリプトに関するお問い合わせは第一著者 e-mail アドレスまで。

Table 2
緑茶飲料データに関する α_{-1} と Σ_{f-1} の推定値

母数	推定値	標準誤差	z 値
α_1	-.020	.037	-0.530
α_2	-.392	.039	-10.105
α_3	.554	.040	14.018
$\Sigma_{f-1}(1, 1)$	.523	.044	12.016
$\Sigma_{f-1}(2, 1)$	-.258	.035	-7.379
$\Sigma_{f-1}(3, 1)$	-.231	.036	-6.394
$\Sigma_{f-1}(2, 2)$	.475	.047	10.080
$\Sigma_{f-1}(3, 2)$	-.037	.032	-1.146
$\Sigma_{f-1}(3, 3)$	.500	.046	10.933

tion”の順であった。ただし、標準誤差を利用して、推定値 $\pm 1.96 \times$ 標準誤差によって95%信頼区間を計算すると、 α_1 の信頼区間が $(-.093, .053)$ 、 α_4 の信頼区間が $(-.223, -.060)$ となるから“減茶栽培（めっちゃヤバイ）”と“飲め！”の平均的嗜好度の間には統計的な差があるとはいえないことになる。また、個人差の分散については信頼区間の点から四つの対象の間に差があるとはいえない。

嗜好度間相関行列に関しては“減茶栽培（めっちゃヤバイ）”と“飲め！”，“茶，destination”と“粗茶ですが…”の間には相関が認められなかったが、それ以外の部分に中程度の相関があった。最も相関が強いのは“減茶栽培（めっちゃヤバイ）”と“茶，destination”の間で、推定値は-.518であった。“減茶栽培（めっちゃヤバイ）”は“粗茶ですが…”との間にも-.451の負の相関があり，“減茶栽培（めっちゃヤバイ）”を好む人は“茶，destination”や“粗茶ですが…”をあまり好まない傾向があることがわかる。

シャンプーのネーミング 四つのネーミング候補は(a)雅（みやび）、(b)クレオパトラ、(c)ルミネール、(d)美髪推進委員会、である。シャンプーのネーミングデータの分析における適合度をTable 3に示した。Table 3を検討すると、AIC、BICの点から独立成分が3個のモデルが最適なモデルとして選択され、RMSEAの値から許容できるレベルであることが認められる。適合度の点から最適モデルとはされなかったが、独立成分が4個のモデルも推定された。独立成分を考慮しなければ、このモデルは3因子の因子分析モデルであり、1次因子の数よりも多い4個の独立成分を抽出できることが示された。独立成分5個のモデルについては、緑茶飲料データに続き不適解であった。さらに、緑茶飲料データの分析と同様、成分数1個の場合の適合度が最も悪いこともわかる。独立成分と嗜好度の関係においては誤差が仮定されていないので、独立成分一つだけの情報では嗜好度間の共分散や3次積率を近似するのが難しく、今回の二つのデータに関してはそれがあてはまりの悪さに繋がったと推測

Table 3
シャンプーデータに関する適合度の要約

成分数	df	χ^2 値	RMSEA	AIC	BIC
無相関	62	223.551	.128	99.551	-90.330
0	52	124.082	.093	20.082	-139.173
1	64	308.990	.156	180.990	-15.016
2	60	201.748	.122	81.748	-102.008
3	56	130.143	.091	18.143	-153.362
4	52	124.082	.093	20.082	-139.173
5	—	—	—	—	—

Table 4
シャンプーデータに関する α_{-1} と B_{-1} の推定値

母数	推定値	標準誤差	z 値
α_1	.528	.033	15.916
α_2	-.050	.029	-1.758
α_3	.195	.035	5.561
$B_{-1}(1, 1)$	-.316	.051	-6.205
$B_{-1}(2, 1)$	-.167	.036	-4.642
$B_{-1}(3, 1)$	-.213	.054	-3.924
$B_{-1}(1, 2)$	-.117	.063	-1.855
$B_{-1}(2, 2)$	.464	.036	13.042
$B_{-1}(3, 2)$	-.242	.057	-4.280
$B_{-1}(1, 3)$	.478	.044	10.820
$B_{-1}(2, 3)$	-.126	.049	-2.546
$B_{-1}(3, 3)$	-.521	.037	-13.984

される。

独立成分三つのモデルについて、四つの対象のうち最後の一つを除いた三つに関する平均的嗜好度と独立成分負荷量の推定値をTable 4として掲載した。Table 4の最も左の列の $B_{-1(i,j)}$ ($i=1, \dots, 3, j=1, \dots, 3$)は B_{-1} の (i,j) 要素を表している。なお、独立成分と誤差に関する2次と3次の積率の推定値も適切な値で推定されたが、紙面の都合上割愛した。推定値を利用して四つの対象に関する平均的嗜好度は $\hat{\alpha} = (.528, -.050, .195, -.672)'$ 、標準誤差は.033, .029, .035, .038と算出された。また、嗜好度の個人差の分散推定値は順に、.335, .255, .396, .548であった。そして、四つの対象に関する独立成分負荷行列 $\hat{B}$ と標準化された独立成分負荷行列 $\hat{B}_{st}$ は以下のように求められ、 $\hat{B}$ の4行目の推定値の標準誤差はそれぞれ、.035, .043, .055となった。

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} -.316 & -.117 & .478 \\ -.167 & .464 & -.126 \\ -.213 & -.242 & -.521 \\ .696 & -.104 & .169 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\hat{B}_{st} = \begin{bmatrix} -.540 & -.200 & .817 \\ -.329 & .911 & -.247 \\ -.348 & -.395 & -.850 \\ .962 & -.144 & .234 \end{bmatrix} \quad (31)$$

平均的嗜好度については、“雅（みやび）”が四つの対象の中で突出して高く、“ルミネール”，少し離れて“クレオパトラ”と続き，“美髪推進委員会”は“クレオパトラ”と比べてもかなり低かった。四つの対象に関する 95% 信頼区間は重複しておらず，平均的嗜好度の点から明確な順位付けが可能であった。嗜好度の個人差のばらつきの点からみると，“クレオパトラ”が最も小さく，調査参加者間で嗜好の違いが出にくいネーミングであったことがわかった。反対に“美髪推進委員会”は分散が大きいため，個人によって嗜好の程度が異なり易いネーミングであったといえる。

独立成分負荷行列に関しては，値の比較が可能な $\hat{B}_{st}$ の解釈を行う。第 1 成分は“美髪推進委員会”のみに非常に強い正の影響を与えており，その他のネーミングには中程度の負の影響を与えていることが認められる。この成分は，漢字が羅列されたネーミングに対する印象の良さを表す“漢字羅列”成分と解釈できる。英語表記の多いシャンプーの製品名の中で漢字が並んだネーミングに対して好感をもつ人は“美髪推進委員会”に対する嗜好が強くなると推測される。次に，第 2 成分は“クレオパトラ”に強い正の影響を与えている。“クレオパトラ”という響きからはエジプト女王のきらびやかなイメージが明確に浮かぶ。この独立成分は高貴な人物のイメージを抱かせるネーミングに対する印象の良さを表す“高貴な人物”成分であると考えられる。“クレオパトラ”以外のネーミングは，高貴な人物というイメージとの結びつきがあまり強くなく，この成分からの影響の強さもあまり大きくない。最後に，第 3 成分は“雅（みやび）”に対して強い正の影響を与え，“ルミネール”には強い負の影響を与えている。また，この成分は“美髪推進委員会”にも正の影響を与えていることから，日本的な美しい髪のイメージを抱かせるネーミングに対する印象の良さを表す“日本の美髪”成分であると推測できる。“雅（みやび）”は平安時代の上品な女性の美しく長い黒髪のイメージを，“美髪推進委員会”は髪に対するよい効果を与えることによる美しい髪のイメージやテレビコマーシャルとして放送されていそうなイメージを喚起させ，それがそれぞれのネーミングに対する嗜好に繋がっているものと考えられる。一方，“ルミネール”は西洋的なイメージを表面上与えるとともに，意味的にも美しい髪のイメージとも結びつきにくいネーミングであり，日本的な美しい髪に好印象を抱く人からは好まれにくいのだと思われる。

考 察

本論文では，多重評価状況におけるシェッフェ型一対比較モデルにおいて，対象に対する嗜好度間の相関を検討する方法を提案した。一つ目の嗜好度間相関推定モデルは，最後の一つの対象の嗜好度を除いた $n-1$ 個の因子を仮定し，従来の方法で用いられたものと異なった計画行列をもつ因子分析モデルととらえることができた。モデルとしては単純であり，分析にはこれまで共分散構造分析用に開発された多くのソフトウェアを利用できる。提案モデルの説明の中でも触れたように，本論文で導入された嗜好度に関するイプサティブスコアの仮定は，伝統的な一対比較手法において用いられたものと同等であり，嗜好度間相関推定モデルはそれらの手法を SEM の枠組みから表現したモデルと考えられる。しかしながら，本手法の主眼がこれまでの方法では難しかった各対象に対する個人の嗜好度間の相関を推定し検討することにある点で異なっている。また，各種推定値に関する標準誤差や適合度指標など，分析から得られる情報は本手法の方がかなり豊富である。組み合わせ効果，順序効果の導入や誤差分散の等分散性の仮定の導入，またそれらの仮定に関する適切性の評価などもできる点は伝統的な手法と比較して本手法が秀でている点である。

独立成分を導入した一対比較モデルは，嗜好度間相関推定モデルの因子にさらに構造を組み込んだモデルとして表現された。適用例からは，このモデルを用いて各対象への嗜好の背後に存在する要素を見つけだせる可能性が示された。SEM の枠組みを利用することで，適合度指標を参照して独立成分の数を決定することが可能となり，さらにはすべての対象に関して平均的嗜好度と独立成分負荷量の推定値および，標準誤差をも得ることができた。これにより，従来の手法での視点に加えて，対象に対する嗜好が何個のどのような性質をもった成分から成り立っているのかという，新たな視点からの考察も可能となる。なお，3 次積率の利用は歪みの情報の利用を意味しており，シェッフェやサーストンの伝統的な一対比較法において仮定されていた嗜好度に関する正規性の仮定を和らげることを意味している。Scheffé (1952) にも述べられていたように正規性の仮定については満たされないことも多く，現実場面に即した分析方法と考えることもできるかもしれない。

最後に，今後の課題および留意事項として三つの点を挙げる。まず，独立成分を導入した一対比較モデルは変数の歪みの大きさを推定に利用しているため，変数の歪みの大きさにより母数の推定精度が異なってくる可能性がある。解釈において重要となる独立成分負荷行列，平均的嗜好度やそれらの標準誤差に特に注目してその点について検討することが今後必要になると

考えられる。次に、独立成分を導入した一対比較モデルはそれほど複雑なものではないが、3次の積率を利用するので、ある程度の標本サイズの大きさが必要となる。今回の分析例では対象が四つで評価者が160名程度であったが、対象が多くなるとより多くの評価者が必要となることが推測される。そして最後に、今回の二つの手法では対象のうち最後の一つを除いてモデル表現を行ったが、除く対象は任意で構わない。モデルが単純であり、一般的には推定値に大きな影響を与えることは考えにくいものの適合度があまり良くないなどの理由により、除く対象によって推定に影響が出る可能性もあることは気に留めておかななくてはならない。

引用文献

- Arbuckle, J. L. (2009). *Amos 18 user's guide*. Craw Fordville, FL: Amos Development Corporation.
- Arbuckle, J. L., & Nugent, J. H. (1973). A general procedure for parameter estimation for the law of comparative judgment. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **26**, 240-260.
- Bentler, P. M., & Wu, E. J. C. (2002). *EQS6 for Windows user's guide*. Encino, CA: Multivariate Software, Inc.
- Ihaka, R., & Gentleman, R. (1996). A language for data analysis and graphics. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **5**, 299-314.
- Meijer, E. (2005). Matrix algebra for higher order moments. *Linear Algebra and its Applications*, **410**, 112-134.
- Mooijjaart, A. (1985). Factor analysis for non-normal variables. *Psychometrika*, **50**, 323-342.
- Muthén, L. K., & Muthén, B. O. (2010). *Mplus user's guide*. 6th ed. Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.
- 中屋 澄子 (1970). Scheffé の一対比較法の一変法 第11回日本科学技術連盟官能検査大会報文集, 1-12. (Nakaya, S.)
- 野澤 昌弘・飯田 一郎・椿 広計・芳賀 敏郎・鎗田 政男・吉澤 正 (1995). 一対比較データにおける個人差の解析法について 品質, **25**, 81-89. (Nozawa, M., Iida, I., Tsubaki, H., Haga, T., Yaritha, M., & Yoshizawa, T. (1995). A method for evaluating individual variation in paired comparison data. *Quality*, **25**, 81-89.)
- 佐藤 信 (1985). 統計的官能検査法 日科技連出版社 (Sato, S.)
- Scheffé, H. (1952). An analysis of variance for paired comparisons. *Journal of American Statistical Association*, **47**, 381-400.
- 豊田 秀樹 (2007). 共分散構造分析 (理論編) ——構造方程式モデリング—— 朝倉書店 (Toyoda, H.)
- 豊田 秀樹・室橋 弘人・尾崎 幸謙・芳賀 麻誉美 (2004). 実験デザインに基づく一対比較データの解析——構造方程式モデリングによる表現—— 心理学研究, **75**, 33-40. (Toyoda, H., Murohashi, H., Ozaki, K., & Haga, M. (2004). Analysis of paired comparison data based on experimental design: Expression using structural equation modeling. *Japanese Journal of Psychology*, **75**, 33-40.)
- 豊田 秀樹・尾崎 幸謙・室橋 弘人・芳賀 麻誉美 (2004). 構造方程式モデリングによる一対比較法の分析——シェッフエの方法とその改良—— 心理学研究, **75**, 299-307. (Toyoda, H., Ozaki, K., Murohashi, H., & Haga, M. (2004). Paired comparison analysis by using structural equation modeling: Scheffé's method and its improvements. *Japanese Journal of Psychology*, **75**, 299-307.)
- Tsai, R. C. (2000). Remarks on the identifiability of thurstonian ranking models: CaseV, caseIII, or neither? *Psychometrika*, **65**, 233-240.
- Tsai, R. C. (2003). Remarks on the identifiability of thurstonian paired comparison models under multiple judgment. *Psychometrika*, **68**, 361-372.
- 浦 昭二 (1956). 一対比較実験の解析 日本科学技術連盟官能検査研究会資料, 1-8. (Ura, S.)

—— 2010. 11. 26 受稿, 2011. 7. 2 受理 ——