規準化固有ベクトルによる素得点データの分析¹

鉄道労働科学研究所

柏 木 繁 男

1. 序

心理データの因子分析といえば、相関や共分散マトリックスなどがその分析対象となるのが常識のようになっているが、ここでは、そのような標準化あるいは適当に重みづけられた観測値にこだわらない、素得点データや素得点積和マトリックスの分析を対象とする。なお、ここでいう素得点データとは、素の観測値や0-1型の分類データなどであり、素得点積和マトリックスとは、それらの内積和マトリックスをさすものとする。

比較的等質化された観測値とか分類データに因子分析や多次元的手法を適用すると、解釈に困難な結果に終ることが少なくない。そのような理由もあろうか、心理学ではノンメトリックな接近法もよく論じられてきた。とくに、さいぎんは、Shepard (1962) に代表される最小次元順序量モデルが注目をあびるようになった。しかし、ここでは、最小次元原則とは別に、素得点データや積和マトリックスにもとづく規準化固有ベクトルによる分析法の有効なことをしめすつもりである。また、規準化固有ベクトルそのものの直交回転法による結果の解釈可能性も論ずる。

規準化固有ベクトルを直交回転するという考えは、Harris & Kaiser (1964) によって行われた。しかし、彼らは、因子分析における斜交解を直接の目標とした。Wiley (1967) は、さらに、相関マトリックスではなく、アイテム得点によって百分率換算に関係した、反応率をもとにした、全対角要素が1の積和マトリックスから規準化固有ベクトルをもとめ、それに対して直交回転をほどこした。しかし、ここでは、正規化換算などを考慮しない素得点にもとづくデータや内積和マトリックスから、規準化固有ベクトルによる直交回転解をもとめる。

さいぎんに、2つの応用分析例をあげ、われわれの提案が実用的な意味でも有効となることをしめす。

¹ “行動計量学” シンポジウム (1970) において論じたものに手を加えた。参加各位との討論に負う所が大であった。また、鉄労研の麻生銀吾氏に負う所も大であった。感謝の意を表す。

2. 素得点データ・マトリックス

2-a. 素得点の定義

素得点を、ここでは、つぎの3つの性質をもつものに限定して考える。まず、第1に、常識的な意味で数値として扱って不思議のないもの、第2に、分類にもとづく、反応を0-1型データとして扱う可能性をもつもの、そして、第3には、判断の対称性が一応保証されることを前提とした、個人の勝点または失点の単純あるいは相対合計和によるものである。第1の範疇に入るものとしては、学習量や反応時などがあげられようし、第2の範疇に入るものとしては、心理及び学力テストなどのyes-no型に代表される、反応の有無をごく素朴に扱う場合にあらわれる。この種のデータは、ふつう、0と1に分類されるが、実用的にはその重要性はたかい。しかも、コンピュータ処理が常識化している現今では、多くの分野で、以前には想像もつかないほどによくつかわれるようになった。さいぎんに第3の範疇に入るものは、Guttmanに代表される尺度分析に用いられる得点とその構造において深い関連をもつ。しかし、尺度分析では、得点の大きさそのものよりは得点のちらばり、すなわち、得点分散と変動を重視している。しかし、ここで扱うデータでは、1対比較による単純または相対的合計和による得点の大きさも重要視されており、この点が尺度分析の場合とことなる。

いうまでもなく、心理学で扱うデータは上記以外にも種類は多様である。正規量換算、情報量換算、段階評定法、その他、マグニチュード推定得点法など。これらの方法はいずれもそれぞれの特徴をもち、その有効性も、妥当な適用対象を前提とすることによってよく認められている。実用的にも、段階得点方式などは、その有効性が定着しはじめているとみなしてもよからう。これらの有効性にもかかわらず、ここで上記3種のデータに限定したのは、従来の共分散、相関、それに、比数換算などによる分析ではなく、われわれの素得点にもとづくデータの分析の実用的重要性に注目しているからにはかならない。以下、ここでは、素得点データ・マトリックスに

TABLE 1
Application of summation method to data matrix

Sample	Item							
	1	2	j			N	Tot. w_i	
	1	x_{11}	x_{12}		x_{1j}		x_{1N}	$T_1. \ T_1./\sqrt{T_{..}}$
	2	x_{21}	x_{22}		x_{2j}		x_{2N}	$T_2. \ T_2./\sqrt{T_{..}}$
	...	...	...	...	...	...	...	...
	i	x_{i1}	x_{i2}		x_{ij}		x_{iN}	$T_i. \ T_i./\sqrt{T_{..}}$
	...	...	...	...	...	...	...	...
	n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nj}		x_{nN}	$T_n. \ T_n./\sqrt{T_{..}}$
	Tot. $T_{.1} \ T_{.2} \ \dots \ T_{.j} \ \dots \ T_{.N}$							$T_{..}$
	$w_j \ \frac{T_{.1}}{\sqrt{T_{..}}} \ \frac{T_{.2}}{\sqrt{T_{..}}} \ \dots \ \frac{T_{.j}}{\sqrt{T_{..}}} \ \dots \ \frac{T_{.N}}{\sqrt{T_{..}}}$							

よるものと、素得点積和マトリックスによるものの2通りについて考察をすすめる。

2-b. 素得点データ・マトリックスの分解

素得点データ・マトリックスの分解の意味について、集計法、すなわち、セント・ロイド法の原理によって考察をすすめる。

n をサンプル、 N をアイテムとする要素 x_{ij} からなる $n \times N$ の素得点データ・マトリックスを X であらわすことにしよう。そのとき、集計法による第1成分が、各アイテムに対する平均に関係した量となることを、つぎのようにしてしめすことができる。すなわち、Table 1 にしたがって、アイテム j について集計すると、

$$w_j = T_{.j} / (T_{..})^{1/2} = \frac{T_{.j}}{n} \left/ \frac{(T_{..})^{1/2}}{n} \right. \\ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} / \left[\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 \right)^{1/2} \right] \quad (1)^2$$

となることからわかって。なお、ここでは、第1成分の各要素の2乗和、すなわち、分散和が1となる nw_j に関心があるが、それも次節2-cの(5st)を入れるとき平均に関係する量であることにかわりはない。すなわち、

$$nw_j = T_{.j} / \left[\sum_{j=1}^N T_{.j}^2 \right]^{1/2} = w_j \left[T_{..} / \sum_{j=1}^N T_{.j}^2 \right]^{1/2} \\ = u_j \left[n / \sum_{j=1}^N T_{.j}^2 \right]^{1/2} = nu_j,$$

ただし、 u_j 及び nu_j は、次節2-cの(6st)にあらわれる素得点積和マトリックスによるものである。

第2成分以後の意味はつぎのとおりである。Table 1 から、復元データ・マトリックスの要素 $\hat{x}_{ij}$ が

$$\hat{x}_{ij} = T_{.i} \cdot T_{.j} / T_{..} \quad (2)$$

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \hat{x}_{ij}$ とするのがふつうであろうが、ここでは、 $\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \hat{x}_{ij}$ としていることに留意されたい。この措置は、もっぱら、説明の便宜のために行われたもので他意はない。

となることから、残差データ・マトリックスの要素 $1x_{ij}$ は

$$1x_{ij} = x_{ij} - \hat{x}_{ij} \quad (3)$$

となる。 x_{ij} が正規分布からのランダム抽出にもとづく観測値と考えられるなら

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \hat{x}_{ij})^2 / \hat{x}_{ij} \quad (4)$$

は、近似的に、自由度 $(n-1) \times (N-1)$ のカイ2乗分布をすると考えられる(cf, e.g., 河田・国沢, 1965) から、残差データ・マトリックスの要素2乗和が、アイテムに対する分散に関係した量となる。同様に、 $2x_{ij}$ や $3x_{ij}$ などに対しても論ずることができよう。

2-c. 素得点積和マトリックスの分解

前節の w_j は素得点データ・マトリックスにもとづく結果であるが、素得点積和マトリックス $X'X$ に集計法を適用すると、サンプル得点に対する強い意味での等質条件

$$T_{.1} = T_{.2} = \dots = T_{.i} = \dots = T_{.n} \quad (5st)$$

のもとで、第1成分が w_j に比例した量となる。すなわち、Table 2 にしたがって、

$$u_j = (x_{1j} x_{2j} \dots x_{nj}) \left(\frac{T_{.1}}{T_{.2}} \dots \frac{T_{.n}}{T_{.j}} \right) \left/ \left[\sum_{i=1}^n T_{.i}^2 \right]^{1/2} \right. \quad (6)$$

となるが、(5st) を入れると、

$$u_j = w_j [T_{..}/n]^{1/2} = T_{.j}/n^{1/2} \quad (6st)$$

となる。なお、規準化 nu_j については、すでに、 nw_j と一緒に論じた。

(5st) をサンプルに対する強等質条件とすることは、すべてのサンプル得点がひとしいことに他ならないが、この条件はいかにもきつい。しかし、サンプルが十分大きく、かつ、この得点が正規分布するときは、弱い意味での等質条件

$$E(T_{.i}) = T_{..}/n \quad (5wk)$$

のもとで

$$E(u_j) = u_j \quad (6wk)$$

となり、弱等質条件(5wk)をみたす u_j と w_j が平均的な意味で同等となる。すなわち、少なくとも(5wk)がみたされるならば、集計法を素得点データ・マトリックス X に適用しても、また、素得点積和マトリックス $X'X$ に適用しても、結果は基本的に同等に扱えることが示唆されたといえよう。なお、(5wk) 及び (6wk) の E は期待値をしめす。

強及び弱条件をみたさないとき、素得点データや素得点積和マトリックスの成分の関係はどうなるであろうか。また、上記の2条件以外に、同等性をみとめる他の条件は存在しないであろうか。後者については、さらに、こんごの研究にまづほかはない。しかし、前者については、つぎのように答えることができよう。すなわ

TABLE 2
Sum of products and the summation method

Item	Item				Tot.
	1	2		N	
1	$(x_{11}x_{21}\cdots x_{n1})\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$	$(x_{11}x_{21}\cdots x_{n1})\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$		$(x_{11}x_{21}\cdots x_{n1})\begin{pmatrix} x_{1N} \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{nN} \end{pmatrix}$	$(x_{11}x_{21}\cdots x_{n1})\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$
2	$(x_{12}x_{22}\cdots x_{n2})\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$	$(x_{12}x_{22}\cdots x_{n2})\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$		$(x_{12}x_{22}\cdots x_{n2})\begin{pmatrix} x_{1N} \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{nN} \end{pmatrix}$	$(x_{12}x_{22}\cdots x_{n2})\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	$(x_{1N}x_{2N}\cdots x_{nN})\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$	$(x_{1N}x_{2N}\cdots x_{nN})\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$		$(x_{1N}x_{2N}\cdots x_{nN})\begin{pmatrix} x_{1N} \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{nN} \end{pmatrix}$	$(x_{1N}x_{2N}\cdots x_{nN})\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$
Tot.	$(T_1, T_2, \cdots, T_n)\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$	$(T_1, T_2, \cdots, T_n)\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$		$(T_1, T_2, \cdots, T_n)\begin{pmatrix} x_{1N} \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{nN} \end{pmatrix}$	$(T_1, T_2, \cdots, T_n)\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$

ち、そのような場合の素得点積とマトリックスによる結果は、アイテム間の関連度の深さをより明確にすることにより、仮定される潜在的測定構造の検討に有利となりうると。素得点データ・マトリックスの場合と同様、素得点積とマトリックスの第2以後の各成分が、成分要素の符号の正負を無視すれば、共分散マトリックスによる各成分に相当するものと考えられる。共分散マトリックスでは、ランクが1に減少し、アイテムの平均に関する情報がおちる (cf, e.g., Anderson, 1958). Guttman の尺度分析の場合も、アイテム得点に関係した量によって反応を換算しなおすため、第1成分は1及びそれに比例したものとなり、直交回転を前提としないときは、この成分は trivial な解となることはよく知られている。また、上記の反応率換算のため、サンプル得点に関する強等質条件は、サンプルに対する反応数を同一に制限しているにかかわらず、みたされない。弱等質条件についてはさらに検討の余地がのこされている。Shiba (1965) は、アイテムとサンプル得点の両方に関係した量をつかって反応を換算しなおした形の、より一般化した尺度分析法を提示した。Shiba は、サンプル得点で反応を修正し、そして、アイテム得点に関係した量で反応率をもとめている。しかし、もし、彼の提案と逆の手続、すなわち、アイテム、そして、サンプルの順で反応率をもとめるならば、サンプル得点に対する強等質条件が認められることになる。この手続は、われわれがここで説明してきた原理にもつながる可能性をもっている。しかし、ともかく Shiba の方法もふくめて、尺度分析によってもとまる第1成分が1及びそれに比例した解となることにかわりはない。これに対して、上記のサンプル得点に関する強弱

2条件のうち的一方でもみたされるならば、素得点データ及び積とマトリックスの分解においては、平均に関する第1成分の情報が有効となる。この特徴は、共分散や反応率換算データには必ずしも期待できないものである。

0-1 型データにもとづく素得点関係の分析結果は、Lord (1952) に代表されるテストの得点分布の理論と密接な関連をもつことが示唆される。すなわち、第1成分の平均に関する量と、第2成分に代表される分散の関係量にもとづくアイテムの情報から、目標となる得点分布に対する示唆がえられる。それによって、能力の識別や順序づけが効率よく行われることになる (Kashiwagi, 1969; 田中・柏木, 1970)。また、ほとんど類似の考え方にもとづいて、ティーチング・マシンなどによる教育効果をチェックしようとする試みもあらわれている (藤田, 1969)。

3. 規準化固有ベクトルの直交回転

アイテム相互の相対的な位置関係、すなわち、距離や順序についての情報が必要とされるとき、各成分の要素にあたるアイテムによる分散和の絶対的な大きさは必ずしも重要とはならない。そのようなとき、分散和1に規準化された固有ベクトルが有用となることが少なくない。

測定空間が1次元に確定されるときは、規準化固有ベクトルに対して直交回転が必要とされないのは当然であるが、ここでは、2次元以上には直交回転が前提となる。また、話を容易にするために、前節で用いた集計法ではなく、最小2乗法を用いて説明する。なお、近似的にはあるが、集計法でも下記の関係が記述できることはい

TABLE
Sum of products of the raw scores† and correlation

	Item														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	18686	16321	15532	15192	15121	14868	14378	14676	14897	15161	15298	15395	15753	16016	16086
2	.951	14381	13638	13337	13284	13042	12629	12875	13089	13316	13434	13506	13830	14072	14124
3	.945	.956	13037	12707	12644	12428	12030	12268	12469	12682	12799	12866	13176	13395	13458
4	.933	.946	.953	12489	12398	12168	11779	12015	12219	12418	12541	12603	12910	13123	13185
5	.915	.936	.932	.949	12411	12134	11740	11985	12176	12389	12500	12565	12879	13088	13144
6	.925	.928	.937	.936	.941	11979	11537	11784	11968	12172	12285	12349	12650	12856	12908
7	.909	.928	.931	.933	.931	.934	11235	11392	11587	11783	11890	11954	12245	12448	12503
8	.903	.911	.918	.919	.927	.936	.917	11710	11828	12032	12138	12208	12510	12704	12761
9	.897	.919	.923	.935	.931	.935	.933	.930	12087	12219	12348	12414	12701	12904	12968
10	.907	.926	.928	.928	.939	.938	.935	.935	.933	12493	12547	12626	12931	13140	13191
11	.899	.914	.921	.930	.929	.932	.927	.923	.942	.934	12743	12749	13045	13253	13314
12	.912	.918	.923	.927	.929	.933	.930	.930	.945	.948	.948	12869	13126	13329	13398
13	.898	.912	.918	.926	.935	.931	.928	.932	.928	.943	.932	.945	13507	13667	13725
14	.897	.920	.916	.922	.928	.925	.925	.918	.919	.936	.922	.939	.940	13966	13943
15	.904	.919	.927	.935	.935	.929	.934	.927	.933	.938	.932	.946	.945	.935	14072
16	.911	.913	.912	.915	.907	.896	.904	.894	.900	.900	.908	.908	.904	.900	.927
17	.906	.925	.917	.914	.906	.899	.905	.898	.897	.901	.908	.913	.906	.912	.919
18	.916	.927	.927	.928	.923	.914	.921	.908	.920	.919	.918	.927	.930	.918	.939
19	.915	.924	.919	.913	.917	.911	.914	.904	.901	.906	.920	.921	.918	.914	.932
20	.906	.919	.921	.916	.905	.910	.912	.902	.917	.913	.931	.928	.918	.918	.926
21	.913	.928	.926	.919	.927	.916	.918	.915	.921	.924	.928	.937	.929	.926	.944
22	.916	.931	.927	.921	.919	.919	.925	.905	.916	.916	.917	.929	.924	.919	.928
23	.905	.924	.926	.927	.928	.922	.919	.921	.919	.925	.927	.940	.935	.931	.934
24	.901	.916	.912	.912	.920	.915	.921	.906	.921	.919	.921	.933	.923	.931	.934
25	.896	.923	.918	.924	.924	.913	.920	.908	.906	.917	.914	.925	.925	.917	.927
26	.898	.916	.912	.921	.920	.909	.921	.905	.917	.919	.922	.935	.938	.932	.936
27	.908	.920	.919	.917	.921	.916	.922	.915	.920	.928	.934	.941	.928	.923	.934
28	.895	.908	.907	.909	.911	.917	.914	.903	.902	.916	.927	.933	.917	.916	.930
29	.898	.912	.916	.918	.929	.916	.915	.913	.919	.919	.928	.940	.925	.919	.933
30	.902	.921	.917	.917	.916	.921	.922	.918	.922	.931	.937	.944	.932	.921	.940

† Averaged by the number of the items.

うまでもない (cf, e.g., Horst, 1965).

Eckart & Young の分解によれば, 素得点データ・マトリックスの転置 X' は, 最小 2 乗の意味で近似的に

$$X' \approx U_r A_r V_r' = U_r (V_r A_r)' \quad (10)$$

となる. ただし, A_r は正の固有根の平方根を主対角要素とする対角マトリックスで, 大きさの順にならんでいるものとし, $U_r' U_r = I_r$ 及び $V_r' V_r = I_r$ であり, r はランクをしめす. なお, U_r はアイテムにかかる規準化固有ベクトル, V_r はサンプルにかかるそれである. (10) に直交回転マトリックス T を作用させると,

$$X' \approx U_r T T^{-1} A_r V_r' = U_r T (V_r A_r T)' \quad (11)$$

となる.

他方, 因子得点の概念の類推から, 素得点データ・マトリックスの転置に対して,

$$X' \approx Y_r B_r' \quad (11')$$

が成立するものと推定されよう. Y_r がアイテムのための因子得点に相当し, B_r がサンプルにかかる因子負荷量に相当することになる. 因子得点の独立性に対する仮定の類推から, $Y_r' Y_r = I_r$ となるとすれば, (11) と (11') の比較によって,

3-a
matrices for the Uchida-Kraepelin test

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
19874	18082	18788	18900	18692	18779	17967	18058	17925	17577	17666	17732	17110	17592	17993
17439	15895	16495	16590	16411	16488	15782	15862	15741	15450	15514	15567	15022	15448	15806
16603	15121	15708	15791	15630	15698	15020	15107	14983	14706	14769	14822	14302	14715	15044
16253	14793	15377	15451	15295	15363	14695	14792	14670	14405	14471	14510	14007	14408	14729
16191	14736	15322	15408	15233	15323	14646	14746	14633	14360	14424	14468	13965	14377	14682
15889	14467	15041	15129	14972	15043	14390	14481	14371	14095	14159	14210	13727	14108	14431
15400	14021	14575	14654	14498	14567	13943	14018	13923	13656	13724	13766	13288	13660	13975
15706	14301	14864	14950	14794	14873	14210	14317	14199	13932	13997	14048	13558	13945	14264
15968	14531	15116	15182	15047	15113	14450	14540	14442	14147	14230	14276	13769	14174	14495
16232	14778	15367	15444	15293	15370	14691	14791	14680	14399	14471	14525	14017	14411	14749
16408	14937	15518	15614	15467	15526	14837	14940	14827	14537	14616	14676	14167	14564	14902
16487	15015	15608	15694	15541	15617	14928	15031	14917	14625	14708	14759	14247	14653	14986
16885	15372	15995	16075	15910	15990	15287	15393	15271	14982	15071	15103	14577	14993	15337
17164	15641	16247	16340	16176	16253	15538	15647	15538	15224	15317	15351	14819	15238	15581
17272	15711	16338	16427	16249	16339	15609	15709	15601	15294	15380	15423	14893	15312	15665
21515	19488	20210	20299	20090	20170	19275	19380	19249	18878	18970	19019	18372	18905	19332
.949	17842	18401	18495	18288	18371	17559	17671	17526	17206	17261	17345	16735	17215	17601
.950	.950	19179	19197	19001	19066	18226	18343	18210	17853	17957	18001	17374	17874	18289
.935	.944	.946	19403	19111	19202	18344	18464	18335	17961	18054	18120	17479	17970	18378
.934	.934	.947	.946	19006	18993	18164	18273	18128	17777	17884	17930	17305	17792	18209
.940	.945	.944	.956	.949	19148	18246	18366	18221	17864	17957	18020	17387	17881	18280
.922	.928	.932	.938	.943	.952	17542	17533	17423	17081	17161	17216	16611	17082	17473
.920	.937	.940	.946	.946	.960	.934	17738	17525	17186	17276	17337	16713	17212	17591
.921	.923	.936	.946	.935	.949	.942	.942	17494	17062	17166	17214	16599	17070	17458
.920	.933	.930	.930	.931	.942	.935	.939	.936	16831	16825	16882	16290	16766	17121
.922	.917	.942	.934	.945	.946	.934	.943	.950	.940	16991	16954	16388	16831	17221
.916	.935	.935	.942	.940	.953	.936	.949	.947	.945	.939	17096	16433	16908	17275
.917	.923	.926	.926	.930	.939	.923	.926	.928	.932	.940	.944	15951	16314	16695
.925	.928	.934	.927	.932	.945	.927	.946	.932	.946	.936	.953	.941	16861	17146
.928	.929	.943	.931	.943	.944	.932	.943	.936	.933	.945	.946	.952	.941	17623

$$(U_r T)'(U_r T) = T' U_r' U_r T = I_r \quad (12)$$

となるが、 $Y_r = U_r T$ 及び $B = V_r A_r T$ となる。これで、規準化固有ベクトルの直交回転結果が、因子得点に相当する概念として理解しうることがわらう。

アイテムに関して正規化したデータ・マトリックスに対してであるが、規準化固有ベクトルを直交回転するための論理的基盤は、Harris & Kaiser によってなされていることはすでに紹介した。しかし、難渋な理論でこゝでくわしくのべる余裕はない。ただ、その回転法が因子分析における斜交解に関連づけうることも、

Porebski (1968) によって、さいきん、さらに巧みな説明がなされていることを指摘するにとどめる。

4. 応用分析例

規準化固有ベクトルによる素得点データの分析例は少なくない。とくに、0-1 型素得点データにもとづく試みは、その有効さのゆえに数多く行われている (cf, e.g., 柏木・三井, 1968; 松城・原口, 1969; 運輸調査局, 1970; 田中・柏木, 1970; 中村, 1970)。ここでは、第1の範疇に入る素得点と第2のそれについての応用分析例に

TABLE 3-b
Initial and rotated normalized eigenvectors for the Uchida-Kraepelin test

Test	Initial eigenvectors						Rotated eigenvectors					
	Sum of products			Correlation			Sum of products			Correlation		
1	.200	-.158	.503	.180	-.155	-.477	.442	-.274	.220	.490	-.203	.042
2	.175	-.109	.350	.182	-.141	-.371	.328	-.167	.172	.405	-.147	.072
3	.167	-.148	.297	.182	-.192	-.321	.270	-.155	.202	.362	-.161	.130
4	.163	-.189	.193	.183	-.244	-.208	.175	-.108	.239	.267	-.136	.192
5	.163	-.207	.059	.182	-.224	-.026	.067	-.030	.260	.116	-.059	.259
6	.160	-.257	.060	.182	-.287	-.008	.049	-.055	.300	.099	-.096	.311
7	.155	-.177	.031	.182	-.191	.011	.054	-.001	.226	.086	-.021	.248
8	.158	-.232	-.026	.181	-.245	.122	-.008	.011	.282	-.008	-.013	.328
9	.161	-.214	-.035	.182	-.234	.139	-.008	.027	.268	-.029	.003	.326
10	.163	-.240	-.052	.182	-.237	.155	-.028	.028	.292	-.034	.008	.335
11	.165	-.139	-.102	.182	-.115	.182	-.031	.106	.211	-.052	.104	.257
12	.166	-.154	-.145	.184	-.096	.228	-.069	.128	.227	-.089	.137	.261
13	.170	-.177	-.142	.183	-.125	.229	-.072	.118	.247	-.092	.117	.282
14	.173	-.157	-.105	.182	-.103	.161	-.035	.105	.231	-.035	.103	.240
15	.174	-.084	-.077	.184	-.043	.125	.011	.120	.169	-.002	.130	.185
16	.214	.402	.302	.181	.230	-.231	.483	.116	-.229	.300	.168	-.145
17	.195	.384	.214	.182	.256	-.218	.399	.153	-.221	.290	.192	-.158
18	.203	.203	.112	.184	.163	-.121	.266	.143	-.062	.208	.169	-.054
19	.204	.224	.040	.183	.235	-.127	.218	.200	-.075	.215	.216	-.109
20	.202	.200	-.054	.183	.222	-.029	.136	.248	-.050	.134	.249	-.064
21	.203	.136	-.086	.184	.206	-.006	.093	.241	.003	.115	.248	-.042
22	.194	.090	.034	.183	.112	-.091	.164	.138	.031	.181	.146	-.007
23	.195	.064	-.130	.184	.126	.060	.031	.233	.061	.057	.220	.040
24	.193	.087	-.172	.183	.161	.096	.006	.270	.042	.028	.259	.027
25	.190	.080	-.117	.183	.149	.028	.044	.228	.044	.084	.222	.010
26	.191	.056	-.220	.183	.162	.147	-.043	.285	.069	-.014	.282	.045
27	.191	.066	-.191	.184	.153	.117	-.017	.271	.060	.011	.263	.040
28	.185	.062	-.219	.182	.162	.157	-.035	.277	.060	-.020	.283	.046
29	.190	.072	-.183	.183	.135	.130	-.009	.268	.053	-.001	.256	.058
30	.194	.068	-.179	.184	.126	.143	-.005	.266	.059	-.012	.255	.070

ついて、かんたんな説明を試みる。

4-a. 内田クレペリン・テストにおける、加算作業の潜在構造的因子について

加算作業曲線がどのような因子によって組成されているかについて論じたい。ふるくは、クレペリンや内田によって、直観的な立場から、この因子についての考えがのべられた。加算作業因子の説明のために、最初に因子分析法を適用したのが辻岡（1952）である。その後も、伊藤（1960）や辻岡（1968）によって、若干ののこされた問題が検討された。これらの因子分析の結果では、第1成分が圧倒的に大きく、全分散の90%以上を説明し

てしまい、加算作業の潜在構造因子は1つであろうということにもなりかねない。

上記の因子分析的接近法とは対照的な方法として、柏木（1962）はつぎのような立場をとった。すなわち、加算作業曲線の大部分は、制御のプロセスとして数学的な表現が可能であろうとした。具体的には、線型2階常微分方程式の解としての潜在的構造因子を仮定した。すなわち、初期興奮の減退と休憩効果をふくんだ習熟によって作業曲線が組成されるものとした。この仮定による理論曲線や期待曲線が、内田による平均作業曲線より見通しのよいことはすでにあきらかにされている。たとえば、

経験的にも、特定の平均作業量をもつサンプルによる平均作業曲線が、内田の百分率換算による平均作業曲線よりも、理論及び期待曲線へのあてはまりのよいことがたしかめられている（日本・精神技術研究所の未公表のデータによる）。

ここでは、上記の柏木の加算作業曲線の潜在的構造因子に対する考えを、規準化固有ベクトルの直交回転解から推定することを目的とする。

4-a-ア. 分析の目的

柏木（1962）の加算作業に対する潜在的構造因子のための仮定を、規準化固有ベクトルの直交回転解によって検討する。すでにのべたように、加算作業曲線は、初期興奮の減退と休憩効果をふくんだ習熟の合成によって組成されると考えているから、少なくともそれらに該当する2つの成分がみとめられるはずである。その確認が目的である。

4-a-イ. サンプルとデータ

サンプルは、日本・精神技術研究所提供の、東京都区立のある中学校生徒240名からなる。このほか、関東学院大学生250名のデータも分析したが、結果はほとんどかわっていない。したがって、大学生の分は説明を省略した。

データ・マトリックス X は、1分ごとの、標準化操作をほどこさない、素の加算作業量を要素としたものである。したがって、 $X'X$ は素得点積和マトリックスであ

る。ただし、Table 3-aの主対角要素もふくめた上三角には、 $(1/30)X'X$ を要素とした、 30×30 のマトリックスがしめしてある。

4-a-ウ. 分析とその結果

素の加算作業量にもとづくデータ・マトリックスは、サンプル得点に関する弱等質条件(5wk)をみたすと考えられよう。したがって、積和マトリックス $X'X$ を分解すれば、第1成分が平均作業量に關係して意味づけられよう。

集計法でも最小2乗法でも、とくに低次元の解析では、同じような結果のもとまることはよくしられている。ここでは、テスト・ベクトルの反転の任意性とわずらわしさをさけ、解の一意性を重んずる立場から、固有方程式

$$|(1/30)X'X - \lambda I| = 0 \quad (13)$$

を解いた。最大固有根3に対応する規準化固有ベクトルを、Table 3-bに示した。

固有根の分布の状況と無関係に、すでにのべた2成分を確認することが目的なので、最初の2つの最大固有根に対応する規準化固有ベクトルを直交回転した。しかし結果は予想どおりにならなかった。そこで、さらに、3成分にもとづく直交回転を施行した。これがTable 3-bで、図示したのがFig. 1の実線である。直交回転はKashiwagi (1965)の基準である。

第1及び第2成分が、仮定された2つの成分、すなわ

FIG. 1. Rotated normalized eigenvectors for the Uchida-Kraepelin test.

TABLE 4
The first components of the normalized eigenvectors for the fatigue scale†

Item	Day work			Night work			
	8 : 30	13 : 00	17 : 00	17 : 00	21 : 00	2 : 00	8 : 30
1 Feel heavy in the head	.06	.02	.19	.23	.25	.24	.28
2 Get tired of the whole body	.03	.02	.24	.27	.25	.27	.32
3 Get tired of the legs	.38	.42	.40	.34	.30	.25	.32
4 Give a yawn	.18	.18	.13	.33	.28	.35	.26
5 Feel the brain muddled	.17	.08	.19	.25	.26	.26	.29
6 Become drowsy	.13	.18	.12	.25	.33	.48	.24
7 Feel strained in the eyes	.19	.27	.28	.17	.34	.14	.37
8 Become rigid or clumsy in motion	.00	.19	.18	.27	.17	.11	.11
9 Feel unsteady in standing	.12	.18	.09	.20	.20	.19	.12
10 Want to lie down	.00	.23	.19	.33	.29	.35	.29
v_1	.28	.44	.48	.73	.74	.81	.74
11 Feel difficult in thinking	.03	.00	.12	.00	.12	.06	.06
12 Become weary of talking	.09	.04	.11	.27	.17	.08	.16
13 Become nervous	.02	.20	.16	.00	.02	.08	.09
14 Unable to concentrate attention	.02	.02	.10	.00	.00	.00	.10
15 Unable to have interest in things	.01	.12	.09	.00	.06	.03	.01
16 Become apt to forget things	.01	.09	.10	.08	.12	.03	.00
17 Lack of self-confidence	.00	.04	.05	.00	.00	.00	.00
18 Anxious about things	.10	.20	.14	.00	.00	.00	.00
19 Unable to straighten up in a posture	.09	.06	.14	.00	.00	.02	.00
20 Lack patience	.02	.07	.20	.00	.00	.00	.07
v_2	.03	.12	.16	.08	.10	.02	.05
21 Have a headache	.00	.08	.13	.00	.08	.17	.13
22 Feel stiff in the shoulder	.69	.42	.38	.33	.36	.35	.36
23 Suffer a pain in the back	.10	.28	.26	.25	.24	.18	.20
24 Feel oppressed in breathing	.00	.01	.00	.00	.00	.00	.06
25 Feel thirsty	.24	.32	.26	.10	.10	.00	.17
26 Have a husy voice	.03	.08	.08	.00	.06	.00	.04
27 Have a dizziness	.10	.16	.06	.08	.06	.00	.00
28 Have a spasm on the eyelids	.31	.21	.17	.00	.00	.00	.00
29 Have a tremor in the limbs	.22	.11	.16	.00	.00	.00	.00
30 Feel ill	.00	.02	.08	.00	.00	.00	.00
v_3	.70	.44	.36	.19	.16	.18	.21
v_2/v_1	.10	.27	.34	.11	.13	.02	.07
Revised (v_2/v_1)	.29	.79	1.00	.32	.38	.06	.21
v_3/v_1	3.96	1.00	.76	.26	.21	.22	.28
Revised (v_3/v_1)	1.00	.25	.19	.07	.05	.05	.07
v_2/v_3	.04	.27	.45	.41	.60	.10	.25
Revised (v_2/v_3)	.06	.45	.75	.68	1.00	.17	.42

† The translation of Japanese into English was made by the Industrial Fatigue Res. Committee, Japan (1969)

ち、初期興奮の減衰と休憩効果をふくんだ習熟であると
 考えられる。これに対して、第3成分は、柏木のモデル
 では仮定としてとりあげなかった、内田のいう中期盛り
 上り効果と解釈されるものかもしれない。あるいは、
 辻岡（1968）のように、正常曲線の反転と考えること
 ともできよう。ただし、ここで用いている直交回転の基
 準は、“positive manifold”の保証を与えているから、
 成分の反転はみとめられない。したがって、上記の中期
 盛り上り効果と解釈の方が合理的であろう⁸。なお、
 この直交回転については、すでにあげた研究を参照のこ
 事。また、所与の次元数と分散配分の原理が、統計量K
 次モーメントの水準化に関連をもつ（1970）。これにつ
 いては、機会をあらためて発表の予定である。話がそれ
 たが、中期盛り上りをモデルに追加するための研究をさら
 に積む必要はあるが、柏木の微分モデルが、かなりよ
 い近似の意味で、作業曲線の記述に成功しているといえ
 よう。

ここで述べたデータ・マトリックスとは別に、アイテ
 ムに関して規準化したデータ・マトリックス（主対角要
 素1の相関マトリックス）に対し、われわれの方法を適
 用した。相関マトリックスは、Table 3-aの主対角要素
 外の下三角に示した。また、その規準化固有ベクト
 ルと直交回転解はTable 3-bに、Fig. 1には点線でし
 めした。これによると、たとえば、第1成分で、後半1
 -2分の重みの水準は、前半のそれに比して総体的に低
 くなるなど、観測値をアイテムに対して規準化したこと
 による歪みと思われる影響が、かなりはっきりでている
 ことがわかる。

4-b. 疲労自覚症状と時間経過

さいきん、産業疲労研究会により、旧版の疲労自覚症
 状調査票が因子分析的に改訂された（1970）。それによ
 ると、自覚疲労は、“ねむけとだるさ”、“注意機能の低
 下”、そして、“身体的局部的違和感”の3種類となる。
 この因子構造は、作業内容別や時間経過などに対して不
 変となることが、経験的にたしかめられた。

自覚疲労の因子構造が不変であるというのは、この3
 種類の次元で疲労感による個人差のみわけがつくであろ
 う、ということを示唆している。しかし、アイテムごと
 の因子負荷量の大きさは条件によってかなりことなるこ
 とから、ことなる条件における個人間得点比較には、そ
 れ相応の配慮が必要となる。

疲労感の時間的経過を問題とすると、疲労自覚強度
 が時間経過に対して、なるべく単純な関係となれば結果
 の評価がしやすい。また、時間経過に対する疲労の尺度

としての妥当性及び解釈性がたかいものとなることが予
 想されよう。この目的にそうため、素得点積和マトリッ
 クスから規準化固有ベクトルをもとめ、それを上記の自
 覚領域ごとに、時間経過別に評価した。なお、次元数は
 1で直交回転を仮定していない。

4-b-a. 分析の目的

時間経過に対して自覚疲労が領域ごとにどのように変
 化するかをしらべ、結果の評価に有効となりうる測度の
 開発可能性について検討する。また、この疲労自覚症状
 調査票にもとづく結果に関連が予想される他の疲労判定
 法についても、かんたんな考察を試みる。

4-b-i. サンプルとデータ

国鉄田端駅の構内作業掛 150 名の変則3交替〔日勤
 (8:30—17:00)及び深夜勤(17:00—8:30)]につい
 て、全部でつぎの7回の測定結果にもとづいた。すなわ
 ち、日勤では、作業前(8:30)、作業中(13:00)、そ
 して、作業後(17:00)、深夜勤では、作業前(17:00)、
 作業中(1)(21:00)、作業中(2)(2:00—5:00:休
 憩後または仮眠後)、そして、作業後(8:30)。なお、
 この調査は、1967年に、鉄道労働科学研究所の労働生理
 研究室が行ったものである。

4-b-u. 分析と結果

条件ごとの規準化固有ベクトルと、自覚領域ごとの分
 散和をTable 4に示した。いうまでもなく、各条件

FIG. 2. Relationships among the variances in the fatigue scale†

† Provided by J.N.R., (1969)

⁸ この他、休憩前の習熟は第2成分に、休憩後のそれは第3成分にあらわれているとみなすこともできる。ただし、この場合は、休憩効果はあらわれないことになる。

別の分散和はすべて1となる。

時間経過別や条件差によって自覚症状のちがいをみるために、Table 4 にもとづき、領域ごとの分散の配分状況を Fig. 2 にしめした。これによると、この作業では、第1及び第3領域が時間経過に対して重要な役割をはたしているかにみえる、実際そうなるかどうかは、さらに研究を積む必要がのこされているが、ただ分散和の大きさそのものだけで評価することには疑問がのこる。というのは、個人によって、とくに夜は、自覚疲労の訴えの多寡に大きなちがいが予想されるからである。そのような理由もあって、ここでは、つぎの3つの測度を検討

することにする。

第1領域の規準化固有ベクトルの分散和を v_1 、第2及び第3領域の分散和をそれぞれ v_2 及び v_3 とする。これらの分散和から $v_1:v_2$ (または、 $v_2:v_1$)、 $v_1:v_3$ (または、 $v_3:v_1$)、そして、 $v_2:v_3$ (または、 $v_3:v_2$) を考える。Table 4 では、 v_2/v_1 、 v_3/v_1 、そして、 v_2/v_3 と、それぞれの最大値が1となるように換算した改訂分散比をのせた。なお、 v_2/v_1 と v_3/v_1 では機能低下のはげしい程大きな値となる。これに対して、 v_3/v_1 では、小さな値ほど機能低下がはげしいものと想像される。Table 4 にもとづいて、Fig. 3-a に3つの結果を提示した、これに

FIG. 3-a.

Variance ratios in the fatigue scale†

† Provided by J.N.R., (1969)

FIG. 3-b.

Sum ratios in the fatigue scale†

† Provided by J.N.R., (1969)

よると、 v_3/v_1 と v_2/v_3 が経験に矛盾せず、有効であるように推定される。

以上は、素得点積和マトリックスにもとづく結果であるが、第2節でのべたサンプル得点に対する強あるいは弱等質条件 (5st) あるいは (5wk) がみたされるものならば、自覚疲労の訴え数による領域相互の相対比も有効となるはずである。もちろん、積和マトリックスの場合はアイテム相互間の交互効果があるので、素得点データ・マトリックスの場合とかなりことになった結果ともなりうることは予想される。ともかく、第1領域の訴え総数 S_1 、第2及び第3のそれらを S_2 及び S_3 とすると、 S_2/S_1 、 S_3/S_1 そして、 S_2/S_3 は Fig. 3-b にしめたようになる。データは、雑誌“労働の科学”(1970, 6月) p. 35 のにもとづいており、Table 4 に用いたデータと同一である。また、 S_2/S_1 と S_2/S_3 による結果は、 v_3/v_1 と v_2/v_3 によるそれとは大きく矛盾しないように推定されよう。

作業内容のちがいで、有効となる分散比がこととなることは当然予想される。この面についての研究はこんごの成果にまたねばならない。上記の例では、 v_3/v_1 (または、 S_3/S_1) と v_2/v_3 (または、 S_2/S_3) が有効分散比となり、 v_2/v_1 (または、 S_2/S_1) は、従来の経験に対して必ずしも解釈可能ではない。このような結果から、上記の作業が肉体労働を基本としたものであることが推定されること、さらに、精神作業内容を基本とする場合は、 v_2/v_1 (または、 S_2/S_1) と v_2/v_3 (または、 S_2/S_3) が有効な分散比となり、上記の作業で有効であった v_3/v_1 (または、 S_3/S_1) の重要性はやや小さくなる可能性は十分考えられる。経験的にも、空港管制官では、このことを示唆する結果も指摘される (cf. 柏木, 1970)。

さいごに、自覚疲労と他の疲労調査法による結果との関連にふれておこう。実は、自覚疲労との関連については明確な形で論じられたものは少ない。自覚疲労の因子分析による改訂をはじめるときも、関係者の中で、それらの関連をはっきり指摘した人はなかった。しかし、さいきんの研究 (cf. 斎藤, 1970) によると、フリッカー、脈搏、血圧、単純反応時、体温、トラッキングとスピア能力などとの関連が示唆されるにいたった。とくに、フリッカーとの関係は予想以上に類似していること、しかも、その計測値そのものの意味づけのためには自覚疲労による解釈が欠かせないものであることがたしかめられつつある。このようなことは、直観的にも納得のいくものであり、経験的には、断片的な形で推論されてきたものである。しかし、それらの推論が計量化され、しかも、疲労研究の知識を豊富にしうる可能性を示唆している点が重要であろう。また、ここでとりあげた有効分散比の考え方をさらに徹底し、現在の調査票を1対比較形式に改訂する。しかも、肉体作業と精神作業と

の評価の分離が可能ないようにアイテムの選定が可能となる。ともかく、このような測度や方法の援用によって、自覚疲労法の、疲労研究にしめる重要性は、こんごますます大きなものとなることは想像にかたくない。しかも、このような接近法をとることにより、より高度の理論化の可能性も予想されるにちがいないのである。

引用文献

- Anderson, T. W. 1958 *Introduction to multivariate statistical analysis*. New York: Wiley.
- 藤田広一 1969 集団学習反応測定装置に関する理論的考察 電子学会論文誌, 52-c, 820—826.
- Harris, C. W., & H. F. Kaiser 1964 Oblique factor analytic solutions by orthogonal transformations. *Psychometrika*, 29, 347—362.
- Horst, P. 1965 *Factor analysis of data matrices*. Holt. R. Winston.
- 伊藤格夫 1960 内田クレペリン作業曲線の因子分析的 研究 心研, 31, 103—113.
- 柏木繁男 1962 内田クレペリン検査の作業曲線について 心研, 33, 98—100.
- Kashiwagi, S. 1965 Geometric vector orthogonal rotation method in multiple factor analysis. *Psychometrika*, 30, 515—530.
- 柏木繁男・三井大相 1968 人的要因による責任運転事故のパターン分析 鉄労研資料, No. 68—45.
- Kashiwagi, S. 1969 The Weibull distribution and a practical analysis of mental test scores. *Jap. psychol. Res.*, 11, 54—65.
- Kashiwagi, S. 1970 The leveling moment functions and the orthogonal factor rotation. Paper read at the symposium of psychometric meeting. Japan, 1970.
- 柏木繁男 1970 自覚疲労のための測度と時間経過 (未公表データ).
- 河田竜夫・国沢清典 1965 現代統計学(上) 広川書店.
- Lord, F. M. 1952 A theory of test scores. *Psychometric monog.*, No. 7.
- 松城素男・原口健之 1969 傷害事故防止の研究(1)一構内作業掛の傷害事故例の分析—鉄労研資料 No. 69—18.
- 中村健二郎 1970 運転取扱い事故のパターン分析について 鉄労研資料 (印刷中).
- Porebski, O. R. 1968 A semi-orthogonal dependent factor rotation. *Psychometrika*, 33, 451—468.
- 斎藤良夫 1970 48時間断眠にさいする種々の生体機能の変動 第43回日本産業医学会報告, 徳島大会.
- 産業疲労研究会 1970 産業疲労の「自覚症状しらべ」(1970)についての報告 労働の科学(6月), 12—62, 労働科学研究所.
- Shepard, R. N. 1962 The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown

- distance, I & II. *Psychometrika*, **27**, 125—146, & 219—246.
- Shiba, S. 1965 The generalized method for principal components of scale analysis. *Jap. psychol. Res.*, **7**, 163—170.
- 田中芳美・柏木繁男 1970 TPI の短縮版の作成原理について (未公表資料: 一部行動計量学シンポジウム (1970) で説明).
- 辻岡美延 1952 内田精神作業法の因子分析的解明: 大阪少年鑑別所刊 鑑別, 4.
- 辻岡美延 1968 適性検査としての内田・クレペリン検査の妥当性と判定の電子計算化 関西大学社会学論集, 2—1.
- 運輸調査局 1970 踏切事故の発生予測 調査資料. No. 837.
- Wiley, D.E. 1967 Latent partition analysis. *Psychometrika*, **32**, 183—193.

—1970. 10. 22. 受稿—

NORMALIZED EIGENVECTORS AND THE ANALYSIS OF PSYCHOLOGICAL DATA

SHIGEO KASHIWAGI

Japan National Railroads

ABSTRACT

In analyzing psychological data, it seems customary to use correlational or covariance matrices. However, we herein discuss the analyses of raw score type data matrices and of the inner product moment matrices based on them.

First of all, we define raw score type data which we are going to use, and discuss the algebraic decomposition of raw score type data matrices and of inner product moment ones. We show that each element of the first component for both matrices is related to the mean value of each item under a certain condition, and that it may play an important role in describing psychological phenomena.

Secondly, when the dimensions for data

are over two, we show that the orthogonal transformation of normalized eigenvectors gives good interpretation, and that the rotated solution may be equivalent to a kind of factor scores.

Two numerical examples are presented. The one is concerned with the application of our method to the analysis of latent structure of the work-curve for the Uchida-Kraepelin test. The model for the work-curve has been proposed by Kashiwagi (1962). The other one is concerned with the evaluation of the scores of the Fatigue Scale which was proposed by the Fatigue Research Committee, Japan. And we found that the scale is very useful in the sense of its interpretability of fatigue phenomena.