因子数推定のための線形回帰基準について

鉄道労働科学研究所

柏 木 繁 男 石 塚 智 一

A LINEAR REGRESSION CRITERION FOR ESTIMATE OF THE NUMBER OF FACTORS

SHIGEO KASHIWAGI AND TOMOICHI ISHIZUKA

Railway Labour Science Research Institute, J. N. R.

A new criterion which is based on the principle of linear regression analysis is proposed concerning the estimation of the number of factors in multiple factor analysis. Following a short historical review on the number of factors, the emphasis is placed on the necessity of a new type of criterion, and a linear regression criterion is proposed based on the regression of the reproduced off-diagonal elements with an assigned number of factors on the corresponding elements in the original correlation matrix. In the last section some related important topics which are necessary for further sophistication of our proposal are discussed.

相関行列にもとづく因子数の推定については、共通性推定の問題とともにふるくから論じられた。多くの研究者たちは、あるいは理論上から、あるいはまた応用上からこれらの問題を扱った。とりわけ Guttman (cf. e. g., 1940, 1954, 1956) のより総合的観点からの理論的研究はよく知られている。

因子数のための理論的下位基準として Guttman は次の3つを与えた。第1は、相関行列の対角要素に1をえらんだときの1より小さくない固有根に対応する因子数 S_1 、第2は、対角要素に SMC (squared multiple correlation) をえらんだときの正の固有根に対応する因子数 S_2 、また第3は、行あるいは列の絶対最大相関値をえらんだときの正の固有根に対応する因子数 S_3 で、可能な最大下限の因子数 S は

$$S \geq S_2 \geq S_3 \geq S_1 \quad (1)$$

となるものとした。ただし、 S_2 と S_3 をきめる共通性の推定値によっても所与の相関行列は半正値となること、SMC はその性質から絶対最大相関値より小とならないことを前提としている。また、主対角要素1の相関行列 R の逆行列 R^{-1} の存在が仮定され、しかもそのことが、SMC に1をとることをゆるさない。すなわち、1より小の正の値のみが SMC にゆるされる (Guttman, 1956, p. 278) のである。

上記の3つの下位基準のうちでよく論じられるのが S_1 と S_2 で、それぞれ、弱および強下位基準とよばれることがある。Kaiser & Caffrey (1965) はアルファ因子分析法において前者に対する計量心理学的な理論づけを行ったし、後者については、すでに紹介した Guttman の研究

や Harris (1962) の正準相関因子分析法からの計量心理学的な理論づけを行ったものがある。また、前者の一種の改訂基準として柏木 (1967) および Kashiwagi (1971) は、因子分析の基本モデル $R = AA' + U^2$ を前提とした最小2乗原理による HUMRES (Highest Unity Minres) 基準を提案した。なお、この HUMRES という略称はここではじめて用いている。この基準は主対角外要素の最小2乗原理、すなわち、Harman の Minres 原理 (1967) をもとに、推定共通性の最大値を1とするように尺度化して逐次的に因子数を推定していくものである。この基準のための原形は1956年の Psychometrika の Guttman の論文にみとめうるもので、 $l(m < l \leq n)$ 次元因子負荷行列 A の分解と $l-m$ ケの計算された項目

$$A = \begin{bmatrix} B & O \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2)$$

の分散、すなわち、共通性と特殊性との和1の仮定を手がかりとしている。ただし、 B, C, O , および D は $\{n-(l-m)\} \times m$, $(l-m) \times m$, $\{n-(l-m)\} \times (l-m)$, および $(l-m) \times (l-m)$ で、 $DD' = U^2$ が仮定されているものとする。また、 m はもとめられる因子数である。実験的には、Kaiser の S_1 よりも主観解との合致がよくもっとも有効な1ケの基準と考えられる (cf. Table 1)。しかしながら、仮想的なデータの場合はともかく、現実のデータでは、この HUMRES 基準も変数の数にまったく依存しないものとなっているとはいいがたく、 S_1 はどではないにしても、この基準からも変数の数の増減の影響を完全にのぞくことはできない。

上記の代数学的性質を前提とした研究に対して

Jöreskog (1962) は、主対角要素に SMC をとったときの特殊性に関する Guttman (1956) の代数学的性質を勘案しつつ、さらに近似的ではあるが、因子数を統計学的に推定することの可能性を検討した。すなわち、主対角要素 1 の相関行列 R の非特異性を前提として SMC で共通性を推定し、全因子数のもとで正準相関因子分析をする。そして、推定特殊性で尺度化した特殊性の推定値としての残差正準固有根 0 の検定を、最大固有根の大きさの順序にもとづき各因子ごとに行った。ただし、検定の基準と残差正準固有根の総和が 1 をこえないという Guttman の代数学的な要請は近似的にのみ満足する。

SMC を共通性の推定値とするという Guttman に代表される上記の研究では、推定共通性による相関行列の半正値性と主対角要素 1 の相関行列の非特異性が自明のものとして仮定されており、変数の数が代数学的無限大となると、共通性と因子数との推定は完全なものとなることが示唆されている。したがって、より限定された現実の変数での推定は近似的にのみ意味をもつことになる。実際、Jöreskog のすでに紹介した研究にもあきらかなように、変数の増加にともない、共通性と因子数との推定精度はよりたかまっていことが予想されている。

上記のような理論的考察はともかく、応用的観点からすれば次のようなことが問題として残されている。

Kaiser et al (1965) によって理論づけられた Guttman の下位基準 S_1 は、その代数学的性質から変数の数に大きく依存することがあきらかである (cf, e. g., Browne, 1968)。したがって、変数の増加にともない S_1 による因子数も当然増加してゆく。また、 S_2 , S_8 , HUMRES 基準も変数の増加に無関係ではないことが (1) から導かれる。このようなことから、変数標本の増減に対しても因子数を不変に保ちたいというような要請、たとえば、因子不変性などはみたくなくなり、因子分析の 1 つの重要な要請に応えがたくなる。

統計学的な立場にたつ Jöreskog (1962) の基準の場合は、極端に変数の少ない場合をのぞけば、変数の増加はむしろ因子数の推定精度をたかめるのに役立つ。ただし十分な標本数が仮定されており、それが因子数の推定精度をたかめるのに大きな関わりをもつ。しかし、探索的に因子分析を用いる場合は、より少ない標本数での不変な因子構造も無視できない場合も多く、そのような場合の分析目的をこの基準は必ずしもみたまない。また、この種の分析対象となる相関行列は必ずしも R^{-1} の存在を保証しないなど、この基準の実行可能性には疑問がのこされていないわけではない。したがってまた、 R^{-1} の存在が必ずしも保証されないという意味から Guttman の下位基準 S_2 にも SMC のための難点が考えられ、因子数推定のための基準として満足すべきもの

となる経験的保証は必ずしも与えられていない。

標題の線形回帰による因子数推定のための基準は、いままで展望してきた諸基準とは必ずしも関連のない観点からのものといえることができよう。すなわち、所与の因子数にもとづく復元相関行列の主対角外要素の標本相関行列の主対角外要素への線形回帰を考え、その線形回帰線への集中の程度によって因子数を推定していこうというものである。この線形回帰線への集中の程度をはかるのに通常相関の概念が利用される。ただし、相関は変数の測定方向や符号の反転に対して必ずしも不変ではないので、標本相関行列の正符号への反転を前提に以後の論議をすすめねばならない。

上記の提案は、さいきんよく論じられるノン・メトリック、とくに Kruskal (1964) の一般回帰の考えと、回帰形式をとるという意味からするとまったく無関係であるとはいえない。ここで立入った議論をする余裕はないが、ノン・メトリックにおける基準関数 Stress が相関に、基準となる順序や所与の次元での距離がそれぞれ相関になっているものの、思想的に両者間にぜんぜん類似性がないと断言することはできないであろう。

標本相関係数の分布と復元相関係数のそれとの線形回帰をとるという考えがまったく新しいものかどうかには論議の余地もあろう。事実、直接ここには関係はないと思われるが、ノン・メトリックな方法で Stress などの代替として相関に関係した測度を用いている研究がないわけではない。しかし、伝統的な因子分析の研究で、変数の符号反転を前提とした相関値を手がかりに因子数を積極的に推定しようとした研究は、筆者等の知るかぎりではまだあらわれていないように思う。

われわれの提案への考えと、その有効性をしめすための実験例が与えられよう。そしてまた、若干の関連した基準や提案のもつ特徴などについての考察が与えられよう。

基 本 原 理¹

相関行列における主対角、すなわち、共通性が完全に推定されているものとしよう。その時の相関行列 R_h

$$R_h = R_0 + H \quad (3)$$

とあらわすものとする。ただし、 R_0 は主対角要素のすべてが 0 の相関行列、 H は完全に推定されている共通性を要素とする主対角行列とする。

(3) の変数の数を n 、因子数を m で半正値が仮定されているものとしよう。いうまでもなく $n \geq m$ である。いま m をこえない因子数 l での復元相関行列を ${}_lR_h$ 、その要素を ${}_l r_{h,ij}$ とあらわすものとする。また (3) の R_h の要素を $r_{h,ij}$ とあらわせば、要素 ${}_l r_{h,ij}$ にもとづく分

¹ 第 2 および第 3 節に対する論文審査のための批判や示唆は、それらの部分の改訂にとって有益であった。

布の、要素 $r_{h \cdot i j}$ にもとづく分布に対する線形回帰を、その線形回帰係数 β によって推定することを考える。いうまでもなくこの考えでは、原相関行列要素 $r_{h \cdot i j}$ が復元相関行列要素 $r_{h \cdot i j}$ をどの程度うまく回帰するかを比較することに心が払われることになる。この考えに対して、あるいは、次のような批判がでるかもしれない。すなわち、相互比較する原および復元相関係数の要素の平均がひとしい値をしめさない場合には、上記のような考えをとることはむしろさけるべきであると。しかし、それについて後程よりくわしい説明をするつもりであるが、これからのべるわれわれの考えには、この種の批判は必ずしも適用されないであろう。しかも、ふつうに用いられる因子分析の計算法、たとえば、最小2乗法やとくにセントロイド法を用いる場合は、問題とはならないと思われる。また、直接ここでは論じないが、相関係数の相対的大きさや順序に関する情報を大事にするというような考えがまったくなかったわけではない。たとえば、相関分析に関する Guttman (1966) のそれもこれに属しているといえよう。

通常の線形回帰モデルの記号にもとづき、 $r_{h \cdot i j}$ を要素とした分布の平均からの偏差を基準変数の要素とし、そのときの変数ベクトルを iY であらわす。また、 $r_{h \cdot i j}$ を要素とした分布の平均からの偏差を予測変数ベクトル X とおくと、上記の考えは

$$iY = X\beta + E \quad (4)$$

となる。ただし、 E は誤差ベクトルをあらわす。いうまでもなく (4) は、 iY の X に対する線形回帰をあらわす。なお、線形回帰の他の表現としては、(4) の X にあたるものを基準変数に、 iY にあたるものを予測変数に書きかえ、復元相関係数から原相関係数を回帰する形式をとることが、よりのぞましいという意見もだされよう。いわば、原相関係数から復元相関係数をどう回帰するかという筆者等の記述に対して、復元相関係数が原相関係数をどのように回帰するか、とする方がより常套的であるというのである。しかし、すぐ後に説明する (5) および (6) にもとづく提案の趣旨からすると、いずれの回帰記述をとっても本質的な差異はないことが了解されよう。ただし、その場合の回帰係数は β ではなく $1/\beta$ となることはいうまでもないけれども。

ところで、相関係数の分布が必ずしも正規性を保持しないことは周知であろう。したがって、原および復元相関係数による (4) での β などの測度を統計的に推定することは、必ずしも意味があるとはいえないかもしれない。したがって、(4) において iY や X の分布には正規性は必ずしも仮定されないとすべきであろう。ただし、次節でも問題とするように、 β やそれに関連する測度の統計的扱いにまったく心が払われていないわけではない、ということを指摘しておきたい。

β の推定法のうちでもっともふつうに用いられるのが最小2乗法によるそれであろう。ここでもし、 X の標準偏差を σ_X 、 iY のそれを σ_{iY} であらわすとき、 β の最小2乗推定 $\hat{\beta}$ は

$$\hat{\beta} = r_{X iY} (\sigma_{iY} / \sigma_X) \quad (5)$$

(5) であきらかなように、変数ベクトル X と iY によって相関係数 $r_{X iY}$ の値が推定されているときは、最小2乗推定値 $\hat{\beta}$ は σ_{iY} / σ_X の値に依存することになる。もし $\sigma_X \approx \sigma_{iY}$ が成立するときは $\hat{\beta} \approx r_{X iY}$ が成立し、さらに $r_{X iY} \approx 1$ が加わるときは

$$\left. \begin{array}{l} r_{X iY} \approx 1 \text{ and } \sigma_X \approx \sigma_{iY} \text{ のとき} \\ \hat{\beta} \approx r_{X iY} \approx 1 \end{array} \right\} \quad (6)$$

がみちびかれる。すなわち、 X と iY の標準偏差がほとんどひとしく、しかも、 X と iY との相関がほとんど1となるならば、当然 $\hat{\beta}$ も $r_{X iY}$ もほとんど1となることをしめしている。この (6) が因子数 l と m に関して成立するのは、 l と m が非常に近い、あるいは合致する場合であることは容易に想像されよう。これに対して、因子数 l が m からより小さい方にはなれるときには、 $\sigma_X \approx \sigma_{iY}$ がよい近似で成立する保証はなく、しかも、すでにのべた (4) における予測変数と基準変数との関係の逆転記述形式をとるときは、その時の回帰係数が $1/\hat{\beta}$ となって $\hat{\beta}$ とはならない。しかし、 $r_{X iY}$ はこのような逆転に対して不変で、因子数 l の増加に対して単調であると推定される。以後、 $\hat{\beta}$ でなしに $r_{X iY}$ がとられるのは、このような理由による。これで、基本原理の一応の説明がなされたことになる。

さて、先に説明を残しておいた原および復元相関係数の平均に関する問題への解答は、上記の (6) に関する説明ともまったく無関係ではないことをしめしておこう。この説明もかねて平均の問題からはじめよう。

数理的形式的な説明は省略するが、全第1因子負荷量を同符号とする符号反転を前提のセントロイド解においては、原および復元相関行列の平均が一致することは周知としよう (cf. e. g., Kendall, 1957)。いまかりにセントロイド法により、因子数 l のもとで (3) で定義した相関係数行列 R_h の因子分析をしたとしよう。そのときの残差相関行列 $Res(iR_h) = R_h - iR_h$ の要素を $Res(i r_{h \cdot i j})$ とするとき、そのときの $Res(i r_{h \cdot i j})$ の総和、すなわち、符号をふくめた残差要素の総和は0となるという周知の性質から上記のことが了解されよう。また、最小2乗解においても、因子数 l における因子負荷量の絶対値がひとしい場合や、とくに因子数 l が m にひとしいかよい近似となる場合などには、原および復元相関行列の平均がよい近似で一致することが多いということができよう。なお、因子負荷量の絶対和最大化原理にもとづく符号反転が厳密に実行可能な場合のセントロイド解が最小2乗解とほぼ一致することは周知であり、特別の場合をのぞ

けば、最小2乗法による原および復元相関行列の平均が、よい近似で一致することがほとんどであると考えてもよいように思われる²。また、因子数 l の増加にともない、復元相関係数の標準偏差 σ_{iY} は原相関係数のそれ σ_X に急速に近似していくことが了解されよう。これであきらかなように、 R_h の要素 $r_{h \cdot ij}$ の平均と iR_h の要素 $r_{h \cdot ij}$ のそれがセントロイド解では完全に一致し、最小2乗解では、ほとんどの場合よい近似で一致するから、(6) の前提条件が因子分析において成立するものとして矛盾はないものと思われる。実際の計算でもこの平均に関する性質が、因子数 l が m によい近似を与えていると思われるとき、よくみとされることは実例によってたしかめられよう。たとえば、Harman (1967) のテキストの p. 153 の Table 8.11 のパワー法によってもとめられた第2残差行列の要素の総和をとると 0.006 となり、かなりあいまいな精度ではあるがまた完全ではないが、近似的には 0 となっていることがたしかめられよう。これで原および復元相関行列の要素の平均と σ_X および σ_{iY} に関する一応の解答が与えられたことになる。ただし、すぐ後にのべるように、ここではすべての行列の要素ではなく、上または下三角行列の要素のみを対象としている。そのため、セントロイド解においてすらも原および復元相関行列要素の平均がつねに一致するとはかぎらず、少しずれることも考えられる。もしこのずれをなくすことに関心があるならば Harman (1967) による Minres 法などの適用が可能となろう。このことについては、第4節の最後の部分でかんたんにふれるつもりであるが、しかし、ほとんどの例では本質的に大きなずれとはならないことは直観的にもあきらかであろう。

ところで (3) における R_h は対称行列であるから、予測変数 X と基準変数 iY の要素として上あるいは下三角行列の要素のみを考えればよい。ただし、主対角行列 H をふくめるかどうかで (4) の $\hat{\beta}$ や $r_{X|Y}$ の値は変化をうける可能性が考えられるから、われわれの (4) においても共通性推定の問題が厳密には解決されないことになる。この意味では、前節に紹介した他のいかなる方法ともことならないということができよう。しかしここでは、適当に数多い主対角外要素が対象となったときの相関係数 $r_{X|Y}$ が、より合理的に推定された H をふくむ (3) への近似相関行列 $\hat{R}_h$ による相関係数とどのような関連をもつかに関心が払われよう。

シンプレックスに代表される Guttman (1966) のファースト・モデルや、すでにのべた順序量を基準変数とする Kruskal (1964) に代表されるノン・メトリックな立場からすると、(4) の $r_{X|Y}$ そのものを手がかりとして因子数を推定することへの疑問もでよう。すなわち、彼等の見解が正しいものとするならば、観測データの量

² 付録を参照のこと。

にもとづく Pearson の相関係数ではなく、むしろ、順序量を主体としたたとえば Spearman によるような別種の相関係数こそがよりのぞましいということになるかもしれない。したがって、(4) とは直接関係はしないが、この種の疑問に答えておくことも参考となるかもしれない。

(3) の R_h の相対応する行および列に関して若干の符号反転の可能性を与えてみよう。すなわち、 n_Y の変数のうちの若干を相対応する行と列に関して同数だけ符号反転した (3) を $(-)^{R_h}$ として R_h と区別すると、 R_h による $r_{X|Y}$ と $(-)^{R_h}$ によるそれとは必ずしも同値とはならないことが多い。このように、(6) における $r_{X|Y}$ は符号反転に対して必ずしも不変な測度とはならないから、Kruskal らの基準関数 Stress などとは同等に扱えないことも考えておかねばならない。両極性を前提とした変数や因子に関する符号反転の不変性を保証するのが心理学的に合理的となる場合には、 $r_{X|Y}$ の評価においても、この種の不変性の保証のための符号反転の可能性を論ずることが必要とされるのである。

実験的考察

前節の (4) によって因子数の推定をするが、その推定は $\hat{\beta}$ そのものではなく $r_{X|Y}$ によって行う。この相関係数をとる理由には次のことがあげられよう。第1に、因子数 m に近似のよい l では (6) がよい近似で成立するという予想があることで、このことはすでにのべたとおりである。第2には、変数の数が極端に少ない場合は別として、相関係数は変数の増減に対しても、漸近的にはあるが、標準化されたより普遍的で信頼のおける性質をもつ測度とみなしうることを、いわば、まったく完全ではないにしても、固有根、残差分散、それに Stress などくらべても変数の増減にそれほど鋭敏でないことが一応期待できそうであること。第3には、因子数の増加に対してほとんどつねに $r_{X|Y}$ が単調に、しかも、因子数 m の近傍で鋭敏な変化が期待されるなどである。これらの期待をたしかめる方法としては、1 つにはシミュレーションによるもの、2 つには過去に行われた代表的な実験成果あるいは判断との合致を手がかりとするものがあげられよう。

$r_{X|Y}$ の数理的形式的性質、とくに、上記の第2にあげたそれをよりよくしらべるには、前者のシミュレーション的手法を用いるのがより合理的で、この面の研究は不可欠である。十分とはいえないかもしれないが、変数の数の影響からまったく自由ではない Stress (Kruskal, 1964) と $(1 - r_{X|Y}^2)^{1/2}$ との関係をしらべた、たとえば、Sherman (1972) の研究などもあらわれてはいる。これによると、 $r_{X|Y}$ もまた変数の数から完全に独立な測度であると断定はできないようである。しかし、Stress よ

りは変数の数からの影響はより小となっているようにも推定される。もっとも彼のとり扱ったのは相関行列にもとづくものとは限りえないから、今後のより計画的で周到なこの種の実験的研究を必要としている、ということになるのか。そうはいっても、因子分析が探索的に利用されることの多い応用的立場からすると、経験的情報や判断にもとづく後者の方法の有効性もまた見逃しえないものをふくんでいる。しかも、第1節で展望したように、経験的判断以上に因子数推定のためのよい基準がない現状からしても、むしろこの種の方法にもとづいた r_{X_iY} の性質の検討こそがのぞましいともいえるかもしれない。

ここでの実験的考察は後者にもとづくものが中心となるが、前者によるものにまったく関心が払われなかったというわけではない。事実、2例にすぎないが、仮説データによる実験もとりあげられている。しかし、前者の手法によるうまみは系統的にシミュレートすることにあるから、この種の考察は今後にのこされたことになる。

実験に用いる相関行列は次の14種類である。変数の大きさの順にならべると、

1. Harman's 5 socioeconomic variables (1967)
2. Fruchter's 5 variables (1954)
3. Harman's 6 hypothetical variables (1967)
4. Chapman's 7 variables (1948)
5. Harman's 8 physical variables (1967)
6. Harman's 8 emotional variables (1967)
7. Harman's 8 political variables (1967)
8. Thomson's 8 variables (1951)
9. Davis' 9 variables (1944)
10. McCloy's 11 variables (1940)
11. Bechtoldt's 17 variables I (1961)
12. " II (1961)
13. Harman's 24 variables (1967)
14. Shiba's 38 variables (1972)

となる。なお、第2と第3が仮想相関行列によるものでいずれも因子数 m が2にセットされている。また、因子数推定前に次節でのべる変数の符号反転を前提としたのが第7および14の行列である。この第14の行列は芝祐順（東京大学教育学部）の提供によるものであることをこたわっておく。若干の行列では、以下にのべる6種類すべての相関係数が計算されているわけではないことを事前に指摘しておく。

符号反転のための必要条件とその操作については次節で説明するが、この符号反転を前提に次の3種類の上または下3角行列要素を予測変数とした。すなわち、(3)の近似3角行列要素として、

- a. 主対角1の主対角をふくめた3角行列要素、
- b. 主対角1の主対角外3角行列要素、

それに

c. 主対角 SMC の主対角をふくめた3角行列要素をえらんだ。なお、SMC がつねに適切にもとまるとはかぎらないことはすでにのべたとおりである。当然、そのような場合は計算されない。

上記3種の予測変数に対して、因子数 l での復元相関行列要素による基準変数に対する相関係数には、すでに指摘したように、Pearson のそれと Spearman のそれがとられた。前者を $r_{X_iY(P)}$ 後者を $r_{X_iY(S)}$ で区別する。上記3種の行列による相関係数は、 ${}_1r_{X_iY(P)}$, ${}_1r_{Y_iX(S)}$, ${}_1(r_{X_iY(P)})$, ${}_1(r_{X_iY(S)})$, ${}_1\rho_{X_iY(P)}$, それに ${}_1\rho_{X_iY(S)}$ の計6種類となる。なお、1および ρ は主対角が1および SMC をとることを、 ${}_1()$ は主対角外要素をとることを意味することにする。

因子数 l の増加に対して上記6種類の相関係数がどのように変化するかを、これも上記の14種類のすべての行列に対して適用することを原則としその傾向を考察した。そして、その可能な結果のほとんどを Table 1 にしめた。さらにまた、6種類の相関係数の因子数 l の変化に対する特性や傾向をより明確化し直観化するために、第3の Harman's 6 hypothetical variables, 第9の Davis' 9 variables, それに第13の Harman's 24 variables を Fig. 1-a, Fig. 1-b, および Fig. 1-c にそれぞれしめた。なお、第2および第3では因子数2が事前に仮定されていることはすでにのべたとおりであるが、第9および第13では1および4因子が一応妥当と判断されている。また、第1節においてのべた関連する因子数の基準による推定因子数 S_1, S_2 , それに HUMRES によるそれらを、主観基準による結果とともに Table 1 の各行列ごとの最後の行に参考として掲げた。

上記の実験を通じてあきらかになったことのうち重要と思われることを、まずはじめに要約的に書き出してみると次のようになるであろう。

I. 主対角に1を入れたときの ${}_1r_{X_iY(P)}$ および ${}_1r_{X_iY(S)}$ にあっては、因子数 l の増加に対する動きや変化は一般に緩慢となりやすい。したがって、事前に仮定されたり経験的に妥当と判断された因子数 m に対する推定基準としては必ずしも好ましいものではない。

II. 主対角の推定としての SMC が算出可能で、しかも、近似推定値が極度に小さくずれない程度に適切と判断できるならば、 ${}_1\rho_{X_iY(P)}$ および ${}_1\rho_{X_iY(S)}$ とともに因子数 l の増加による変化はより鋭敏となる。しかも、因子数 m 近傍での変化がほとんど完全に停止する。

III. 上記IIに対する近似としてすめられるのは、主対角1による因子数 l のもとでの主対角外要素からの相関係数 ${}_1(r_{X_iY(P)})$ および ${}_1(r_{X_iY(S)})$ である。第2節の(4)の線形回帰の言葉でいえば、基準変数としての ${}_1R_h$ や予測変数としての R_h をそれぞれ、 ${}_1R_i$ および R_i に

よる主対角外要素で代替近似していることになる。なお、 $R_t = R_0 + I$ での I は要素 1 の主対角行列である。

以上の要約をすでに与えた 3 つの図、すなわち、Fig. 1-a, Fig. 1-b, それに Fig. 1-c を使って説明しておこう。

最初の Fig. 1-a には、実験に用いた 14 種類の行列のうちの第 3 番目の行列で、Harman's 6 hypothetical variables (1967) である。この行列は仮想的に作られたもので、その因子数 m は 2 である。この m を的確に推定

FIG. 1-a. Harman's 6 hypothetical variables.

FIG. 1-b. Davis' 9 variables.

していると考えられる相関係数は $\rho r_{X_iY(P)}$ とそれにつづく $\rho r_{X_iY(S)}$ で、仮説因子数 2 において、この 2 種類の相関値の増加は因子数 1 の増加に対して完全にとまっている。なお、それらの相関係数の上限はそれぞれ .978 および .956 で完全に 1 とはならないが、これは、SMC による共通性の推定が完全でないことにも由来しているものと推定される。事実、この推定値はやや低目であることがたしかめられている。(Harman; 1967, p. 89). 残りの 4 種類の相関係数のうちで因子数推定の基準として有効であると考えられるのは、この Fig. 1-a からすると $1) r_{X_iY(P)}$ であるといえよう。しかし、この $1) r_{X_iY(P)}$ の因子数 1 の増加に対する単調な変化がほとんど完全にとまるのが第 4 因子においてであって、仮説因子 2 を必ずしもよい近似で推定していない。しかし、相関値で見ると第 3 因子ですでに .956 となり、これ以上の因子数に意味があるかどうか疑問をいだかせることも示唆している。したがってもし、 $1) r_{X_iY(P)}$ 算出のための主対角外要素の数がさらに増加するときは、この相関値の変化による因子数推定の確度はより一層たしかになるものと推定される。

Fig. 1-b の行列は第 9 の Davis' 9 variables (1944) で、主観的に 1 因子が妥当と判断されている。もしこの主観的因子数 1 が受け入れられるものならば、これを支持する相関係数のうちでもっとも有望とみなしうるのは $\rho r_{X_iY(P)}$ であることがしめされよう、しかもその相関値は第 1 因子ですでに .989 で、SMC の共通性推定値としての確度がほとんど完全であることが示唆されている。これにつづいて、 $\rho r_{X_iY(S)}$, $1) r_{X_iY(S)}$, そして $1) r_{X_iY(P)}$ の順とすることができよう。これに対して、

FIG. 1-c. Harman's 24 variables.

主対角1による、 $r_{X_l Y}(P)$ および $r_{X_l Y}(S)$ のいずれからも推定因子数が1となることの手がかりはえられていない。なお、 $r_{X_l Y}(P)$ の因子数 l の増加に対する変化は必ずしも単調ではない。しかし、そのような相関値の因子数の増加に対する変化の乱れも、いずれの相関値も.939 以下とならないという結果からしてもそれほど気にとめる必要のない程の小ささであることが了解されよう。

Fig. 1-c の行列は第13の Harman's 24 variables (1967) で、4因子が一応妥当とみなされているものである。結果からの傾向はいままでの実例とほぼ同じであるが、1つだけ注目すべきことは、 $r_{X_l Y}(S)$ が $r_{X_l Y}(P)$ 、 $r_{X_l Y}(S)$ 、 $r_{X_l Y}(P)$ 、それに $r_{X_l Y}(S)$ などとほとんど同じ傾向をしめしているという点であろう。いいかえれば、 $r_{X_l Y}(P)$ の因子数 l の増加に対する変化のみが特殊で、他の5種類の相関係数とはあきらかに異っている。ところで、いままでの実例では、 $r_{X_l Y}(P)$ と $r_{X_l Y}(S)$ とはほとんどつねに同じような傾向をたどった。それなのになぜこの例ではこの傾向が維持されなかったのであろうか。理由の1つに次のことがあげられよう。変数の増加にともなう主対角要素の数の全要素の数に対する比重が低下しているのに加え、 $r_{X_l Y}(S)$ は相関値そのものよりも順序によって決定されているからである。この場合のように、変数の十分な数、たとえば経験的にみておそらく15変数以上与えられているときは、 $r_{X_l Y}(P)$ を除いた他の5種類の相関係数が因子数 l の増加に対してほぼ一様に、ほとんど単調に変化するようになるものと推定される。

以上で6種類の相関係数の性質に関する一応の了解はえられたであろうし、すでに要約したI、IIおよびIIIの意味とその正当性も承認されたであろう。

$r_{X_l Y}$ に関するシミュレーション的検討が今後の問題として未解決に近い状態で残されているとはいえ、上記の経験的相関行列にもとづく実験によって、共通性や変数の数の影響は、他のたとえば固有根や Stress などにくらべてより小さいのではないかという期待に応えてくれるのが、ここでいう相関係数であろうという考えから、以後、 $r_{X_l Y}(P)$ を因子数推定の測度としてとりあげよう。なお、 $r_{X_l Y}(P)$ と同じような性質をもつ $r_{X_l Y}(P)$ をとりあげることも当然考えられるし、理論的にもその方がよりのぞましいという意見もでよう。しかし、SMC が求まる保証のない相関行列でも因子分析の対象としても一向にさしつかえないこと、また、変数や標本、たとえば、変数50以下標本100以上といったような場合でも、同種かほとんど同種の変数が複数で因子分析されることもまったくないわけではない、などの理由によって、主としてつねに解答が手にできるという応用的観点から、以後の分析には $r_{X_l Y}(P)$ よりむしろ

$r_{X_l Y}(P)$ の利用をえらんだことをことわっておきたい。なお、同種かそれに近い変数というのは結果的にのみあきらかとなることが少なくないのは、因子分析の実際にあつて常識的なことであることもつけくわえておきたい。

$r_{X_l Y}(P)$ でも、因子数 m のための上記のような図による判断は、因子数の客観的かつ自動的判断の立場からして必ずしも好ましいということではできない。そのため、より客観的な手がかりをもとめることが必要となるが、まず直観的に考えられることは無相関検定による因子数の推定であろう。このことの是非はすぐのちにのべるが、有意でない相関係数 $r_{X_l Y}(P)$ に対応する因子数 l をもって m としようというものである。しかし、この方法による結果は経験的な判断とは無関係であるという意味で実用的とはいえない。もっとも(4)において予測変数ベクトル X や基準変数ベクトル Y の分布の正規性にこだわらなかったのであるから、ここでの検定思想の導入は不合理ともいえよう。

このほか、 $r_{X_l Y}(P)$ の因子数 l の増加に伴う相関値の変化に次のような単調性、すなわち、因子数 $l-1$, l , それに $l+1$ に関して

$$r_{X_l Y}(P) - r_{X_{l-1} Y}(P) \geq r_{X_{l+1} Y}(P) - r_{X_l Y}(P) \quad (7)$$

が成立するものとして、(7)の差がある許容基準、たとえば、 1.0×10^{-2} 、内におさまるときの因子数 l が m になるというような考えも参考となろう。しかし、現実の $r_{X_l Y}(P)$ で(7)がつねに保証されるとはかぎらないので、ここでは次の経験基準をとることをすすめておきたい。すなわち、最初の所与の母相関0.900をしめす因子数 l を推定因子数 m とする。Table 1の $r_{X_l Y}(P)$ のゴシック数字に対応する因子数がそれで、経験的な推定因子数との合致は相当によいことが示唆されよう。

相関係数の算出と変数の符号反転

前節では、因子数 l の増加に対する相関係数 $r_{X_l Y}(P)$ が、経験基準として因子数 m のためのよい推定となりうることを示唆した。しかしここで問題なのは、相関係数に変数の測定する方向に対して必ずしも不変とはならないということである。たとえば、Table 1の第7の相関行列 Harman's 8 political variables を使ってこの間の事情を説明しておこう。原相関行列 R_0 を下3角行列でしめすと Table 2-a のようになる。この R_0 を符号反転せずに $r_{X_l Y}(P)$ をそのまま計算すると、第1から第8因子までの相関値は

.971 .997 .999 .999 .999 1.000 1.000 1.000 と変化し、Table 1の

.825 .985 .996 .997 .998 .999 1.000 1.000 とかなり異った値となる。

Table 1の結果は、Table 2-aの R_0 の変数4, 7, お

		Number of factors										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1. Harman's 5 socioeconomic variables(1967)	$1^r X_1 Y(P)$	.229	.990	.998	1.000	1.000						
	$1^r X_1 Y(S)$	.061	.925	.975	.943	.982						
	$ (1^r Y_1 X(P))$	.394	.998	.999	1.000	1.000						
	$ (1^r X_1 Y(S))$	.370	.988	.988	1.000	1.000						
	$\rho^r X_1 Y(P)$	.148	.999	.999	.999	.999						
	$\rho^r X_1 Y(S)$	-.061	.979	.986	.986	.986						
	$S_1=2, S_2=3,$			Subjective=2								
2. Fruchter's 5 variables(1954)	$1^r X_1 Y(P)$	.221	.920	.967	.987	1.000						
	$1^r X_1 Y(S)$	.268	.868	.968	.971	.986						
	$ (1^r X_1 Y(P))$	.468	.994	.985	.990	1.000						
	$ (1^r X_1 Y(S))$	.467	1.000	.988	1.000	1.000						
	$\rho^r X_1 Y(P)$	.410	.951	.951	.951	.951						
	$\rho^r X_1 Y(S)$	.461	.857	.857	.857	.857						
	$S_1=2, S_2=2,$			Humres=2,	Assumed=2							
3. Harman's 6 hypothetical variables(1967)	$1^r X_1 Y(P)$	.408	.769	.914	.977	.993	1.000					
	$1^r X_1 Y(S)$	.538	.865	.903	.926	.953	.974					
	$ (1^r X_1 Y(P))$	.898	.897	.956	.998	.993	1.000					
	$ (1^r X_1 Y(S))$	.925	.750	.957	.993	.996	.979					
	$\rho^r X_1 Y(P)$	.947	.978	.978	.978	.978	.978					
	$\rho^r X_1 Y(S)$	.908	.956	.956	.956	.956	.956					
	$S_1=1, S_2=2,$			Humres=2,	Assumed=2							
4. Chapman's 7 variables(1948)	$1^r X_1 Y(P)$	.125	.700	.813	.887	.935	.982	1.000				
	$1^r X_1 Y(S)$	.328	.915	.924	.950	.930	.917	.974				
	$ (1^r X_1 Y(P))$	.488	.926	.910	.913	.928	.941	1.000				
	$ (1^r X_1 Y(S))$	.474	.949	.888	.919	.879	.853	.995				
	$\rho^r X_1 Y(P)$	.544	.821	.819	.819	.819	.819	.819				
	$\rho^r X_1 Y(S)$	.474	.817	.814	.814	.814	.814	.814				
	$S_1=2, S_2=3,$			Humres=3,	Subjective=3							
5. Harman's 8 physical variables(1967)	$1^r X_1 Y(P)$	.260	.917	.957	.983	.992	.996	.999	1.000			
	$1^r X_1 Y(S)$	.336	.905	.941	.967	.969	.978	.981	.989			
	$ (1^r X_1 Y(P))$	.439	.985	.987	.996	.996	.998	.999	1.000			
	$ (1^r X_1 Y(S))$	.401	.979	.988	.991	.984	.997	.998	1.000			
	$\rho^r X_1 Y(P)$	.503	.993	.993	.993	.993	.993	.993	.993			
	$\rho^r X_1 Y(S)$	.481	.983	.985	.984	.984	.984	.984	.984			
	$S_1=2, S_2=4,$			Humres=2,	Subjective=2							
6. Harman's 8 emotional variables(1967)	$1^r X_1 Y(P)$	.506	.777	.899	.963	.983	.999	1.000	1.000			
	$1^r X_1 Y(S)$	.573										

7.	Harman's 8 political variables(1967)	$\lambda_1(r_{X_1Y}(P))$	.825	.985	.996	.997	.998	.999	1.000	1.000			
		$S_1=2,$	$S_2=4,$	Humres=2,	Subjective=2								
8.	Thomson's 8 variables(1944)	$1^r X_1Y(P)$	.287	.613	.784	.862	.919	.953	.981	1.000			
		$1^r X_1Y(S)$	.562	.803	.919	.941	.953	.966	.976	.997			
		$\lambda_1(r_{X_1Y}(P))$	.893	.879	.945	.937	.920	.941	.951	1.000			
		$\lambda_1(r_{X_1Y}(S))$	.898	.914	.948	.940	.924	.946	.965	1.000			
		$\rho^r X_1Y(P)$	.900	.924	.923	.923	.923	.923	.923	.923			
		$\rho^r X_1Y(S)$	.894	.906	.911	.911	.911	.911	.911	.911			
		$S_1=1,$	$S_2=3,$	Humres=2,	Subjective=2								
9.	Davis' 9 variables(1944)	$1^r X_1Y(P)$	.529	.744	.839	.907	.949	.969	.985	.995	1.000		
		$1^r X_1Y(S)$	.646	.829	.875	.944	.985	.987	.988	.995	.985		
		$\lambda_1(r_{X_1Y}(P))$	.987	.939	.980	.968	.991	.986	.989	.996	1.000		
		$\lambda_1(r_{X_1Y}(S))$	.978	.977	.975	.959	.992	.988	.995	.998	.996		
		$\rho^r X_1Y(P)$	.989	.990	.990	.990	.990	.990	.990	.990	.990		
		$\rho^r X_1Y(S)$	.977	.975	.970	.970	.970	.970	.970	.970	.970		
		$S_1=1,$	$S_2=4,$	Humres=1,	Subjective=1								
10.	McCloy's 11 variables(1940)	$1^r X_1Y(P)$	.493	.851	.952	.964	.981	.989	.993	.997	.997	.998	.998
		$1^r X_1Y(S)$	.486	.851	.931	.961	.978	.979	.987	.988	.990	.990	.990
		$\lambda_1(r_{X_1Y}(P))$	.738	.922	.961	.971	.989	.993	.995	.996	.997	.998	.998
		$\lambda_1(r_{X_1Y}(S))$	.688	.922	.967	.961	.985	.985	.992	.993	.995	.995	.995
		$S_1=2,$	Humres=2,	Subjective=3									
11.	Bechtoldt's 17 variables I (1961)	$1^r X_1Y(P)$	.408	.700	.794	.873	.922	.946	.960	.968	.976	.982	.987
		$1^r X_1Y(S)$	.602	.839	.946	.978	.988	.985	.988	.989	.992	.993	.993
		$\lambda_1(r_{X_1Y}(P))$	.662	.872	.924	.947	.973	.982	.984	.987	.987	.990	.990
		$\lambda_1(r_{X_1Y}(S))$	.736	.895	.915	.938	.977	.987	.982	.988	.989	.993	.993
		$\rho^r X_1Y(P)$	.610	.876	.940	.970	.984	.989	.989	.989	.989	.989	.989
		$\rho^r X_1Y(S)$	.641	.872	.935	.962	.985	.992	.992	.992	.992	.992	.992
		$S_1=5,$	$S_2=7,$	Humres=5									
12.	Bechtoldt's 17 variables II (1961)	$1^r X_1Y(P)$	.358	.684	.789	.856	.904	.943	.958	.969	.976	.981	.986
		$1^r X_1Y(S)$	.573	.838	.903	.934	.964	.982	.984	.984	.983	.984	.990
		$\lambda_1(r_{X_1Y}(P))$	.609	.852	.913	.937	.962	.980	.984	.985	.986	.987	.990
		$\lambda_1(r_{X_1Y}(S))$	.704	.894	.925	.926	.958	.979	.981	.981	.980	.982	.990
		$\rho^r X_1Y(P)$	.567	.861	.927	.960	.976	.985	.985	.985	.985	.985	.985
		$\rho^r X_1Y(S)$	.596	.868	.931	.951	.972	.989	.990	.990	.990	.990	.990
		$S_1=5,$	$S_2=7$										
13.	Harman's 24 variables(1967)	$1^r X_1Y(P)$	.335	.577	.697	.787	.830	.862	.889	.909	.929	.943	.954
		$1^r X_1Y(S)$	.495	.700	.815	.910	.932	.943	.955	.962	.969	.968	.975
		$\lambda_1(r_{X_1Y}(P))$	.624	.797	.879	.926	.933	.942	.951	.959	.965	.970	.974
		$\lambda_1(r_{X_1Y}(S))$	.580	.735	.827	.903	.919	.930	.944	.953	.962	.960	.969
		$\rho^r X_1Y(P)$	.600	.815	.904	.952	.962	.970	.974	.978	.980	.981	.981
		$\rho^r X_1Y(S)$	.536	.737	.851	.932	.948	.961	.967	.975	.981	.984	.985
		$S_1=5,$	$S_2=13,$	Humres=4,	Subjective=4								
14.	Shiba's 38 variables(1972)	$\lambda_1(r_{X_1Y}(P))$	.595	.773	.841	.878	.915	.930	.942	.950	.960	.965	.969
		Humres=13											

TABLE 2-a
Harman's 8 political variables (R_0 : Original)

	variables							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2	.840							
3	.620	.840						
4	-.530	-.680	-.760					
5	.030	-.050	.080	-.250				
6	.570	.760	.810	-.800	.250			
7	-.330	-.350	-.510	.620	-.720	-.580		
8	-.630	-.730	-.810	.880	-.360	-.840	.680	

TABLE 2-b
Harman's 8 political variables ($(-)^R_0$: Reflected)

	variables							
	1	2	3	4(-)	5	6	7(-)	8(-)
1								
2	.840							
3	.620	.840						
(-) 4	.530	.680	.760					
5	.030	-.050	.080	.250				
6	.570	.760	.810	.800	.250			
(-) 7	.330	.350	.510	.620	.720	.580		
(-) 8	.630	.730	.810	.880	.360	.840	.680	

よび 8 に関して符号反転した Table 2-b の $(-)^R_0$ をもとにしたものである。この行列 $(-)^R_0$ で負の符号をもつ要素は (5, 2) のただ 1 ケで、第 1—第 8 因子までの相関値の変化があきらかに異なることはすでにしめしたとおりである。一般に必要な符号反転を実施しないときの値は大きめにしやすいが、このことは容易にしめすことができるものと思われるがここではその証明を省略する。なお、Table 2-b の変数上の $(-)$ は符号反転を実施する変数であることをしめしている。

上記の原相関行列の符号反転は直観的にも容易であった。しかし、符号反転の変数を客観的にえらぶためにはそれなりの工夫が必要とされよう。ここでは次のような方法をとることをすすめる。

原相関行列 R_i あるいは R_0 の主軸第 1 因子をもとめ正負の符号数をかぞえる。もし、正の符号をもつ変数の数が負の符号をもつそれよりも多いかひとしいときは、後者に属する変数群を符号反転する。逆に前者が後者より少ないときは、前者に属する変数群を符号反転する。この符号反転法は、以後の因子分析法に主軸法をえらぶかぎり、もっとも合理的な方法とみなしうるものである。

る。

主軸法以外の因子分析法、たとえば、セントロイド法を用いる場合には、上記とは異なる符号反転法のほうがよいと考えられよう。すなわち、符号反転の可能な組合わせから、セントロイド法のねらう目的基準関数、たとえば、因子負荷量の絶対和の最大化とすることができよう。理論的には、変数の数を n とするとき、 $2^n - 1$ の符号反転を実行すればよい。ただし、 n が増大するところ種の符号反転の実行可能性は極度に小さいものとなり実用性はなくなる。せいぜい $n \approx 20$ が限界ではないかと予想されている。しかし、このようなセントロイド法を用いる場合でも、ここで提案した $(-)^R_0$ のための符号反転法は十分に有効性を発揮する。これは、主軸第 1 因子とセントロイド第 1 因子の相関がほとんど 1 となるというよく知られた経験によってもあきらかである。

いうまでもなく、Table 1 に与えた相関値は、すべてここで提案した符号反転法を前提としている。それが適用されているのが、上記の第 7 の R_0 と第 14 の R_0 であった。

最後に、第 2 節で指摘した上あるいは下 3 角行列によ

る平均のずれを Minres 法によって修正を加えうる可能性にふれておこう。

Minres 法の詳細は Harman (1967) によって周知であるものとするが、所与の因子数 l によってもとめられた初期因子解、たとえば、最小 2 乗解などを、1 変数単位の因子負荷量の Gauss-Seidel 型の部分修正法により、因子解を逐次的に改善してゆく。ここで改善というのは、各推定共通性と因子数 l での対応する計算される共通性との差を精度内で 0 とすることを意味している。この方法でもとめられた結果によると、第 l 因子からの残差相関行列の非対角要素の総和、すなわち、対角要素をふくむふくまないに関係なく上または下 3 角行列要素の総和はほとんど完全に 0 となる（もちろん全要素の総和も 0 となる）。これは、Minres 法によらない残差相関行列の主対角をふくめた総和が近似的に 0 となるのとはかなり意味がちがうといえよう。このように、残差主対角要素の各々が 0 よりもかなり大きく、しかも、その全要素和に対する比重が大きいときは、すべての因子数で Minres 解をもとめ、それぞれの因子数のもとで $||r_{X,Y}(P)||$ などを計算することが考えられよう。ただし、Minres 解では Heywood Case や予定因子数にみたない正の固有根などという現象も往々にして発生する危険性をもはらんでおり、因子解としての適切さがつねに保証されるとはかぎらない。これらの問題に対しては、さらに今後の研究を必要としていることはいうまでもない。

付 録⁸

第 l 残差相関行列 ${}_lR_h$ に対する因子負荷量ベクトルを ${}_l\alpha$ であらわすものとする。なお、 ${}_lR_h$ の要素を ${}_lr_{h \cdot ij}$ 、 ${}_l\alpha (\neq 0)$ の要素を ${}_l\alpha_i$ や ${}_l\alpha_j$ などであらわすものとする。また、第 $l+1$ 残差相関行列 ${}_{l+1}R_h$ は

$${}_{l+1}R_h = {}_lR_h - {}_l\alpha {}_l\alpha' \quad (8)$$

であるが、この行列要素の 2 乗和の最小化を考える。すなわち、

$$f = \sum_{i,j} {}^{n,m} ({}_lr_{h \cdot ij} - {}_l\alpha_i {}_l\alpha_j)^2 \longrightarrow \min. \quad (9)$$

この最小化を達成するために、ベクトル ${}_l\alpha$ に関する偏微分、すなわち、 $\partial f / \partial {}_l\alpha = 0$ をもとめる。ただし、0 は全要素 0 のベクトルをあらわす。この結果を (8) の行列およびベクトル形式で表現すると、

$${}_{l+1}R_h {}_l\alpha = ({}_lR_h - {}_l\alpha {}_l\alpha') {}_l\alpha = 0 \quad (10)$$

が導かれる。なお、(10) が ${}_lR_h {}_l\alpha = \lambda {}_l\alpha$ という固有方程式となることも容易にわかるし、このことは周知であろう。ただし、 $\lambda = {}_l\alpha' {}_l\alpha$ は固有根をあらわす(柏木, 1967)。

ところで(10)の第 i 行に注目しそれを要素で表現すると、

⁸ 文章表現のあいまいさをさけるため、この付録をつけ加えた。なお、三嘴 武(鉄道技研)と麻生銀吾(鉄道労研)との討論に負う所が大であった。

$$\sum_{j=1}^n ({}_lr_{h \cdot ij} - {}_l\alpha_i {}_l\alpha_j) {}_l\alpha_j = 0 \quad (11)$$

となる。これにもとづき、残差要素 $Res({}_{l+1}r_{h \cdot ij})$ の総和を 0 とする条件の検討が可能となろう。

まず考えられる条件は、すべての $Res({}_{l+1}r_{h \cdot ij})$ が同時に 0 となる場合、すなわち、因子数 l が m に完全に一致するときである。もう 1 つの条件は、ベクトル ${}_l\alpha$ の全要素 ${}_l\alpha_j$ がひとしい場合である。

最小 2 乗解において $Res({}_{l+1}r_{h \cdot ij})$ の総和が近似的に 0 となるはっきりした可能性の 1 つは、因子数 l が m に非常によく近似している場合であろう。すなわち、各残差要素 $({}_lr_{h \cdot ij} - {}_l\alpha_i {}_l\alpha_j) \approx 0$ が同時に成立するものとしてよいときである。さきにあげた Harman の計算例の場合はほぼこの条件をみたしているといえるかもしれない。したがって、因子数 l が m に近づけば近づくほど、原および復元相関係数の平均はよりよい近似で一致するものとしてよいであろう。

次の条件は、因子負荷量ベクトルの各要素 ${}_l\alpha_j$ がよい近似でひとしくなる場合である。ただし、最小 2 乗解では絶対値がひとしければよい。なぜなら、第 4 節でのべたように、変数に関する符号反転に対して最小 2 乗解による因子負荷量は不変となるからである。ところで、いまベクトル ${}_l\alpha$ の要素の絶対値の最大値を ${}_l\alpha_k$ であるとして、(11)を次のように書きかえてみる。すなわち、

$$\sum_{j=1}^n ({}_lr_{h \cdot ij} {}_l\alpha_k - {}_l\alpha_i {}_l\alpha_j {}_l\alpha_k) ({}_l\alpha_j / {}_l\alpha_k) = 0 \quad (12)$$

ここでもし、かなりの数の ${}_l\alpha_j / {}_l\alpha_k \approx 1$ が許容される場合には、最小 2 乗解による残差総和が 0 に近似していくものと考えてよいであろう。

引用文献

- Bechtoldt, H. P. 1961 An empirical study of the factor analysis stability hypothesis. *Psychometrika*, 26, 405—432.
- Browne, M. W. 1968 A note on lower bounds for the number of common factors. *Psychometrika*, 33, 233—236.
- Chapman, D. I. 1948 The MacQuarrie test for mechanical ability. *Psychometrika*, 13, 175—179.
- Davis, F. B. 1944 Fundamental factors of comprehension in reading. *Psychometrika*, 9, 185—197.
- Fruchter, B. 1954 *Introduction to factor analysis*. New York; Van Nostrand.
- Guttman, L. 1940 Multiple rectilinear prediction and the regression into components. *Psychometrika*, 5, 75—99.
- Guttman, L. 1954 Some necessary conditions for common factor analysis, *Psychometrika*, 19, 149—161.
- Guttman, L. 1956 "Best possible" systematic esti-

- mates of communalities. *Psychometrika*, **21**, 273—285.
- Guttman, L. 1966 Order analysis of correlation matrices. In R. B. Cattell (Ed.) *Handbook of multivariate experimental psychology*, 438—458.
- Harman, H. H. 1967 *Modern factor analysis*. Univ. of Chicago press.
- Harris, C. W. 1962 Some Rao-Guttman relationships. *Psychometrika*, **27**, 149—162.
- Jöreskog, K. G. 1962 On the statistical treatment of residuals in factor analysis. *Psychometrika*, **27**, 335—354.
- Kaiser, H. F. & Caffrey, J. 1965 Alpha factor analysis. *Psychometrika*, **30**, 1—14.
- 柏木繁男 1967 主因子分析における因子数に関する新基準の提案, 教育心理学研究 **15**, 129—134.
- Kashiwagi, S. 1971 Classification of correlational matrices and the number of factors: A tentative proposal for the number of factors. *Japanese Psychological Research*, **13**, 70—81.
- Kendall, M. G. 1957 *A course in multivariate analysis*, Charles Griffin.
- Kruskal, J. B. 1964 Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis, *Psychometrika*, **29**, 1—27.
- McCloy, C. H. 1940 "The measurement of speed in motor performance", *Psychometrika*, **5**, 173—182.
- Sherman, C. R. 1972 Nonmetric multidimensional scaling: A monte carlo study of the basic parameters. *Psychometrika*, **37**, 323—355.
- Thomson, G. H. 1951 *The factor analysis of human abilities*, 5th ed., New York: Houghton Mifflin Co..

—1973. 5. 8. 受稿—

Summary

A new criterion which is based on the principle of linear regression analysis is proposed concerning the estimation of the number of factors in multiple factor analysis.

In the first section, immediately after a short historical review on the number of factors is presented, the emphasis is placed on the necessity of a further criterion which will assure greater invariance with regard to the change of the number of variables.

In the second section, as indicated in the title of this paper, the following linear regression formula is proposed. That is

$${}_iY = X\beta + E \quad (4)$$

where ${}_iY$ is the criterion vector which consists of the deviated off-diagonal elements of the reproduced correlation matrix with the number of factors l , X the predicted vector which consists of the deviated off-diagonal elements of the original correlation matrix β , the linear regression coefficient, and E the error vector. In (4), if the standard deviation of ${}_iY$ is almost the same as that of X , the least square estimate of the linear regression coefficient $\hat{\beta}$ may be

$$\hat{\beta} \approx r_{X, Y} \approx 1 \quad (6)$$

where $r_{X, Y}$ is the correlation coefficient between X and ${}_iY$. If the criterion (6) is satisfied with the increase of the number of factors l , l is expected to be a powerful estimate of the true number of factors. Here we assume that the change of the value of $r_{X, Y}$ is monotone with regard to the increase of the number of factors.

The proposal above is applied to two hypothetical and twelve actual correlation matrices and the functional relationships between the change of the value of $r_{X, Y}$ and the increase of the number of factors and is investigated in the third section. The most important parts of results are presented in Table 1, Fig. 1-a, Fig. 1-b, and Fig. 1-c. And it is suggested that the value of $r_{X, Y}$.900 may be a useful index for the estimate of the number of common factors.

In the last section, some related topics such as the sign reflection to assure the maximization of the value of $r_{X, Y}$ in the neighborhood of the true number of factors are discussed.