内田クレペリン検査の作業曲線 I¹

—2 成分モデルによる解析—

大阪市立大学

中塚善次郎 奥本隆昭

THE WORK CURVE OF UCHIDA-KRAEPELIN PSYCHODIAGNOSTIC TEST I

—ANALYSIS BY TWO COMPONENTS MODEL—

ZENJIRO NAKATSUKA AND TAKAAKI OKUMOTO

Osaka City University

The main purpose of this research was to construct a mathematical model of work curve of Uchida-Kraepelin Psychodiagnostic Test (UKPT). The proposed model is composed of 2 components, i. e., learning and fatigue. The theoretical curve including 5 parameters was derived from the model, and Marquardt's method was used to estimate these parameters. Estimation of 5 parameters can be performed for each individual's work curve. The examination of validity of this model was the problem left for the future.

内田クレペリン検査は、内田勇三郎が Kraepelin の単純加算法を用いた精神作業過程の研究を發展させて、これを心理検査として用い、その実際の妥当性を確立して以来日本で最も多く利用されるテストの一つとなっている。しかし、この検査がいかなる精神機能を測定しているかについては、創始者内田は Kraepelin 学派の理論を援用し、精神障害者や正常人へのテスト結果とその人々の実際の医学的診断結果や実際生活での行動およびパーソナリティとの対応を考察したのみで、検査結果そのものを分析して測定内容をより明確にしようとは試みなかった。したがって、その普及度に比してこの検査の測定内容はそれほど明瞭とはいえないのである。

ところで、最近数量的分析法によって測定内容の明確化をすすめるという試みが、辻岡美延および柏木繁男によってなされてきている²。

辻岡 (1968) は、大学生 300 名の結果を因子分析し、6 因子を抽出、解釈した。さらに、加算速度因子とされる第 1 因子をのぞく 5 因子について、個人別に因子得点を求め、これを各個人の曲線特徴 (すなわち、因子の解釈によって意味づけられた 5 つの心理的機能の特徴) を示す測度として使用している。しかし、5 因子の中には解

釈が困難なものもあり、必ずしも測定内容が十分明確化されたとはいえない。

次に柏木 (1962) は、作業曲線にあらわれる作業経過が、線形振動の過減衰にあらわれる線形 2 階常微分方程式で記述できること、また別の観点から作業曲線を初期効果と作業習熟の重ね合わせとしても記述できることを指摘した。しかし、この研究は、作業曲線の意味づけに対するひとつのモデルを提供はしたものの、さらに進んでその意味内容を測度として直接個人ごとの特徴をあらわす個人パラメーターのかたちで取り出す段階には至っていない。むしろそれにかわって、ある規準集団での各分平均作業量への直線回帰推定が行なわれ、この推定式を使ってえがく作業量水準のことなるいわゆる正常曲線 (期待曲線とよばれる) に、上記モデルの理論式が良くあてはまる (柏木, 1964) ことから、この期待曲線と個人曲線とのずれを、その個人曲線の正常性ないしは定型性を評価する測度とした。その後この測度の実際の妥当性が確かめられ、曲線を客観的に記述する測度として、曲線類型の判定資料などの実用に供されている (日本・精神技術研究所, 1972)。しかし、このような扱いは、実用上、大きな効用をもたらしたものの、検査の測定内容の明確化という点では一歩後退といわねばならないであろう。

本論文は、柏木の作業曲線経過が 2 階の微分方程式で記述できるという仮定を受け入れるが、意味づけの点で

¹ 日本人間工学会第 7 回関西支部大会 (1973 於大阪府科学技術センター) で口頭発表したものをまとめた。

² 以下この論文では、内田クレペリン検査は、15 分作業—5 分休憩—15 分作業の型にかぎられる。

柏木とは異なったモデルを提供するとともに、柏木がモデルのあてはめを期待曲線だけにとどめていたものを、個人ごとの曲線へのあてはめに一般化することをも目的とする。これは、一般化されたこのモデルのあてはめによって得られる諸測度の分析を通じて、将来測定内容がより明確にされることが期待できると考えるからである。

モデルの構成

作業曲線に働く作業機能の因子として Kraepelin は、意志緊張、興奮、慣熟、練習効果、疲労その他、いくつかのものをあげている（内田，1951）が、これらの因子は、加算作業のさまざまな実験の事態の分析を通じて仮説として推測されたものにすぎず、実際の作業曲線からこれらを区別して抽出することは不可能である。また、戸川（1973）も、精神作業機構とよばれる仮説の提唱に先立ち、Kraepelin の因子を再検討し、“練習（効果）と慣熟を明確に区別することは概念的にも具体的にも無理ではないかと思われる”としている。まして限定された内田のテスト条件下で、これらの因子がどう発現するかについては、現在まで明確な説明がなされていない。前述のように、辻岡は実際の作業曲線を6つの因子の合成として記述できることを示したが、上記 Kraepelin 因子との明確な対応は得られていないし、それにかわるべき明確な内容もいまのところ示されていない。

これらのことから、本論文では意味づけが比較的明確で、実際にあてはめが可能な次のようなモデルを構成した。

内田クレペリン検査は単純作業からなっているので、作業曲線の経過を構成している成分は、基本的には学習と疲労の2成分であると考え、実際の作業曲線では、これらのほかに精神の緊張と弛緩によって起こる心理的現象が重なっているものとする。

そこでまず、疲労の性質を次の式であらわす。

$$\frac{dx_1}{dt} = -\lambda_1 x_1 \quad (1)$$

これを解くと、

$$x_1 = Ae^{-\lambda_1 t} \quad (2)$$

となる。柏木はこれを初期効果と考えたが、ここでは初期効果は、作業開始に先立ち起こる精神の緊張と考え、のちの(7)式の表現の中に含まれると考える。

次に、学習を次の式であらわす。

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 (C - x_2) \quad (3)$$

これを解くと、

$$x_2 = C - Be^{-\lambda_2 t} \quad (4)$$

となる。ここで、 x_1, x_2 は、時刻 t で達成された各成分に対応した作業量である。実際の作業曲線は、上記2曲線の合成であると考えれば

$$x = Ae^{-\lambda_1 t} - Be^{-\lambda_2 t} + C \quad (5)$$

となる。一般的に取扱うためには、(5)式を微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + mx = 0 \quad (6)^3$$

の解であると考え、そうすれば、 $-\lambda_1, -\lambda_2$ は特性根であり、 A, B, C は任意定数となる。したがって、Fig. 1 に模式的に示すように λ_1, λ_2 は変化の仕方（関数の形）を与える因子であり、 A, B, C は初期の状況によって上記の関数のあてはめ方を規定するパラメーターと考えられる。(5)式を少し変形して図示すると Fig. 1 のようになる。

ここで、 $Ae^{-\lambda_1 t}$ は疲労の項、 $B(1 - e^{-\lambda_2 t})$ は学習の項、 C' は定数である。

ところで、これらの成分を実際のデータから引き去った残りは、前述のように、精神の緊張と弛緩をあらわすものと考え、(6)式を基本としてこの残差成分を振動的と考える（すなわち、特性根が複素数 $\{\lambda = p \pm i\lambda_3, i = \sqrt{-1}\}$ の場合に対応するものとする）。その場合、(5)式は次のようになる。

$$x = e^{pt} \{A' \cos \lambda_3 t + B' \sin \lambda_3 t\} \quad (7)$$

この残差成分については、なお十分な意味づけを必要とし、次稿にゆずることとする。

モデルのあてはめ

ここで取扱うのは、基本的には個人データであり、この方法で推定されるパラメーターは個人ごとの成分の特

FIG. 1. Hypothetical time course of three components in Eq. (5).

³ ここで無理に(1), (3)式を(6)式の形に書く必要はないが、作業の前半・後半を統一して取扱うということを前提とすれば、(6)式の方がパラメーターの規定がやや明確となり、好ましいであろう。

徴を示すと考えるが、これによって曲線類型判定の何らかの手掛りを得ることを目的とする。

Fig. 1 で示されたように、モデルには次の 2 つの仮定が含まれている。

- ① 疲労は、5 分間の休憩で完全に回復する。したがって作業の前半と後半で同じ形の進行のしかたをする。
- ② 学習は、作業の前半、後半を通じて継続して進行する。

1. あてはめの式

モデルの基本式は次のようになる。

$$\begin{cases} x_f(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + B(1 - e^{-\lambda_2 t}) + C & (8) \\ x_s(t+15) = Ae^{-\lambda_1 t} + B(1 - e^{-\lambda_2(t+15)}) + C & (9) \end{cases} \quad t=1, 2, \dots, 15$$

ここで、 $x_f(t)$ は前半の各分作業量、 $x_s(t+15)$ は後半の各分作業量である。

(8), (9) 式は直接あてはめられないので、上の仮定 ① をつかって、(9) から (8) を引くと、次の式をうる。

$$y(t) = B(1 - e^{-15\lambda_2})e^{-\lambda_2 t} \equiv B^*e^{-\lambda_2 t} \quad (10)$$

ただし、 $B^* = B(1 - e^{-15\lambda_2})$ 。この式からまず B, λ_2 を推定すれば、未知の項は次のようになる。

$$\begin{cases} z_f(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + C & (11) \\ z_s(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + C \end{cases} \quad t=1, 2, \dots, 15$$

ここで $z_f(t)$ は前半の、学習成分を控除した作業量の残差を、 $z_s(t)$ は後半のそれらをあらわす。

次いで、(11) 式の A, C, λ_1 を推定する。実際の計算の手順をのちの Fig. 2 のフロー・チャートに示す。

2. あてはめの方法

(10) および (11) 式のような指数関数のあてはめについては、Lewis (1960) にさまざまな方法が紹介されている。しかし、ここでは個人曲線を扱うようなデータに多様性があり、そこで述べられているような単純なあてはめ方法では、全てのデータに適用することができない。仮にあてはめを行なっても、実際のあてはめの近似はかなり悪い。そこで独自の方法として、データに 2 次ないし 3 次式を最小 2 乗法であてはめ、その推定されたパラメーターと、目的の指数関数を 2 次ないし 3 次までテーラー展開した各項との対応から、近似的に指数関数のパラメーターを推定しようと試みた。しかし、この方法も Lewis のものよりもいくらか改善されはしたが、あてはめた曲線がわずかに下にはずれる傾向があり、完全に満足できるものとはならなかった。この方法上の困難を解決してくれたのは、非線形パラメーターの推定法における Marquardt (1963) の方法である。

電子計算機の繰り返し計算による非線形パラメーターの推定法には、基本的に 2 種類ある。すなわち、線形化

法と最急勾配法である (Draper & Smith, 1966)。線形化法では、計算は単純であるが解への収束が保証されないし、また最急勾配法では、理論的には収束するが解の近傍で収束がきわめて遅くなる。Marquardt 法は、両者の欠点をお互いに補いあうように工夫されている。Maximum neighbourhood 法とよばれるこの方法では、データと予測値との差の 2 乗和が常に小さくなるように、解の遠くでは最急勾配法に重点をおき、解の近辺では線形化法に重点をうつすことによって解への収束の保証と計算時間の短縮をはかろうとしている。

3. あてはめのアルゴリズム⁴

前述のように、モデルに含まれる 5 つのパラメーターを推定するためのフロー・チャートは、Fig. 2 のとおりである。

FIG. 2. Flow chart of computer program estimating five parameters.

⁴ この節だけ便宜上、 λ_1, λ_2 の符号を変えてある。すなわち、(5) 式 $e^{-\lambda_1 t} \equiv$ 本節 $e^{\lambda_1 t}$

繰返し計算をともなる非線形のパラメーター推定では、適当な初期設定が重要である。初期設定の値が悪いと、計算時間がかかるばかりか、局所的最小が存在する場合にはそこに収束してしまうことも起こる。以下初期設定が必要な2つの場合についてくわしく述べることにする。

1. (10) 式に含まれる B^* と λ_2 の初期値 Fig. 3 に示すように B^* と λ_2 の符号の組合わせにより、4つの場合が考えられうる。実際に得られる前半と後半との作業量の差の曲線は、さまざまな形をしているが、これら4つのうちの1つがあてはめられなければならない。

初期値を与えるアルゴリズムが、次のように定められた。

1) 線形回帰直線を差の曲線 ($y(t)$) にあてはめる。

これは、指数関数の1次までのテーラー展開に線形のパラメーターを近似することによって指数関数のパラメーターを推定するためである。式で書くと次のようになる。

$$\hat{y}(t) = a_0 + a_1 t \quad (12)$$

$$\hat{y}(t) = B^* e^{\lambda_2 t} = B^* + B^* \lambda_2 t \quad (13)$$

$$t = 1, 2, \dots, 15$$

(12), (13) 式より

FIG. 3. Four schematic curves which are possible for Eq. (10).

FIG. 4. Two cases in which linear regression line crosses the axis of abscissa.

FIG. 5. Four schematic curves which are possible for Eq. (11).

$$B^* = a_0 \quad (14)$$

$$\lambda_2 = \frac{a_1}{a_0} \quad (15)$$

もし、データが横軸を横切るならば、(14), (15) 式では不適当となる。すなわち、Fig. 4 に示す2つの場合である。回帰直線が a) であるとき、Fig. 3 の a) が適当なのか、d) が適当なのか、また b) のとき、Fig. 3 の b) が適当なのか、c) が適当なのかという問題である。この問題を解決するために次のようなアルゴリズムを工夫した。

2) $(a_0 \times 8 a_1)$ の符号を調べる。

3) もし正なら、初期値は(14), (15)式で与えられる。

4) もしゼロなら、 $B^* = 0$, $\lambda_2 = 0$ とし、繰り返しの推定は行なわない。

5) もし負なら、 $B^* = a_0 + 16 a_1$, $\lambda_2 = \frac{-a_1}{a_0 + 16 a_1}$ とし、データが逆にされる。この手続は、横軸の方向を逆にすることを意味する。収束値 $B^{*'}$ と λ_2' が得られたならば、 $B^{*'}$ と λ_2' は次の式でおきかえられる。

$$B^{*'}_{\text{true}} = B^{*'} e^{16 \lambda_2'} \quad (16)$$

$$\lambda_2'_{\text{true}} = -\lambda_2' \quad (17)$$

軸を逆にするのは、Fig. 3 の b) および d) での推定を a) および c) の型におして推定することになっているが、これは、b) や d) の型で推定すると推定のごくわずかの誤差でも独立変数の大きいところでは、データと推定値との差が異常に大きくなるのをさけるためである。

2. (11) 式に含まれる A, λ_1, C の初期値 まず、学習成分を差し引いた残りの値に対して2次式があてはめられる。データにあてはめられるべき指数曲線は、Fig. 5 に示す4つの場合がある。

$$\hat{z}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (18)$$

$$\hat{z}(t) = A e^{\lambda_1 t} + C \quad (19)$$

$$t = 1, 2, \dots, 15$$

(18), (19) 式の対応から次の式が得られる。

$$A e^{0 \cdot \lambda_1} - A e^{15 \cdot \lambda_1} = A(1 - e^{15 \lambda_1}) = a_0 - \hat{z}(15) \quad (20)$$

$$a_0 - \hat{z}(15) = -(15 a_1 + 225 a_2) \equiv \alpha \quad (21)$$

ここで

FIG. 6. Ten examples. Broken line represents real data and smoothed line theoretical one.

$$\beta \equiv 1 - e^{15.21} \quad (22)$$

とおくと、 $A\beta = \alpha$ である。いま β の値は未知であるが、 λ_1 の平均的な値を考慮して $|\beta| = 0.9$ と仮定することにする。ところで、Fig. 5 に示すように λ_1 には正負の値がありうるので、これの初期値設定に先立って、 β の符号も決定されなければならない。このため次のように p と q を定義する（ただし、 q は 2 次曲線上の値）。

$$p \equiv \frac{1}{2} (a_0 + a_1 + 15a_2 + 225a_3) \quad (23)$$

$$q \equiv a_0 + 7.5a_1 + 56.25a_2 \quad (24)$$

$$p - q = 56.25a_3 \quad (25)$$

これより、 A の符号と等しい $p - q$ の符号は a_3 によってきまることがわかる。上記の $A\beta = \alpha$ より、

$$\beta = 0.9 \operatorname{sign}(a_3 \cdot \alpha) \quad (26)$$

(22) と (26) 式から

$$\lambda_1 = \frac{1}{15} \log_e [1 - 0.9 \operatorname{sign}(a_3 \cdot \alpha)] \quad (27)$$

(20), (21) 式および λ_1 の値から

$$A = \frac{\alpha}{1 - e^{15.21\lambda_1}} \quad (28)$$

(18), (19) 式の $t=0$ での対応および A の値から

$$C = a_0 - A \quad (29)$$

なお、Marquardt 法において、計算速度を考慮して文献にはない次の収束判定基準が設けられた。

$$p = \frac{|\Phi_r - \Phi_{r-1}|}{\Phi_r} \quad (30)$$

ただし

$$\Phi = \sum_{i=1}^n [Y_i - \hat{Y}_i]^2 \quad (31)$$

r は繰り返し数、 Y_i は観測値、 $\hat{Y}_i$ はその推定値である。

もし p が 10^{-7} 以下になると、繰り返し計算を中止する。

実 例

上記の方法によってあてはめた結果を Fig. 6 に 10 例示す。例 1 は、内田の示した 1 万人あまりの平均曲線を分析したものである。図中に示した疲労曲線、学習曲線および定数部分とそれらの合成としてのあてはめの曲線は、モデルを直観的に理解するうえで役立つであろう。例 2 から例 5 は、作業量のことなる定型曲線であるが、他の例とくらべると、平均曲線をも含めて λ_1 および λ_2 の値がかなり似かよっていることがわかる。また、 A , B , C の値は、これらの間でかなりことなっている。例 6 は、 a' 型と判定された曲線であるが、定型曲線とくらべて λ_2 の値だけが少しずれている。例 7 から例 10 は、 a' , d , $f(A)$, p と判定された曲線である（いずれも判定は、日本・精神技術研究所、1957 による）が、各パラメーターの値は、定型曲線のそれらからかなりばらばらにずれていて、それぞれ非定型性を示している。例

7 では、疲労をあらわすパラメーター A と α_1 に大きなずれが見られるし、例 8 では、学習をあらわすパラメーター B と λ_2 に大きなずれが見られる。

なお、あてはめのための計算時間は、内田 16 類型約 300 例、高校生 300 例、合計 600 例の一人当たり平均が、NEAC SERIES 2200 MODEL N-700 の CPU TIME で、3.3 秒であった。ただし、これにはモデルのあてはめのほか、残差成分のフーリエ解析の時間も含まれている。

考 察

これまで、600 例についてあてはめが試みられたが、パラメーターの推定で収束しないものはなかった。またそのあてはまりの程度は、実例において示されたようにかなり満足できるものであった。これから、モデルあてはめの一般化については成功したと言えるであろう。

次に提唱したモデルと辻岡の因子分析の結果との関連について述べてみたい。中塚は、かつて (32) 式に示されるような期待増加率を定義した (1970) が、のちに辻岡の 5 因子を学業成績予測に関して検討した (1971) さい、この期待増加率と 5 因子との相関が計算された。それによると、

$$\text{期待増加率} = \frac{100(R - ER)}{ER} + 50 \quad (32)$$

ただし R : 従来の後期増加率

ER : 柏木 (1964) の PF_i 得点算出に用いる期待曲線で求めた後期増加率

純粹常態一般意志因子と命名された第 II 因子と 0.967、また従来の後期増加率がこの因子と 0.728 といういずれも高い相関を示した。“モデルのあてはめ”で述べたようにモデルでは、中間の 5 分間の休憩が疲労を完全に回復させる効果をもつと仮定しているので、後期における作業量水準の増加は、全く学習（慣熟、練習効果）によるものと言える。ところで、辻岡の因子偏差値を求める重みは⁵、第 II 因子では前半、後半で水準を異にするかなり平坦な線を描くのであるが、このことは前述のように、この因子がある作業量水準で期待される後期増加率からその作業量水準にある個人の実際の増加率が割合としてどの程度ずれているかを示す前記期待増加率と完全に近い相関を示す事実とよく符合している。すなわち、因子偏差値は、重みの描く傾向曲線との類似性指数と考えられるから、この傾向曲線は、期待曲線で計算される後期増加率の内容をなす前期、後期の作業量水準を示す平均直線に対応していると解することができる。これから、第 II 因子は、学習の因子だと言えよう。次に第 III 因子は、疲労因子と解釈されているが、この因子の描く

⁵ 因子得点を標準化したものを因子偏差値とよんでいる。

因子負荷量と因子偏差値の重みとのグラフは、作業の前半と後半できわめて類似した単調減少を示しており、この経過は Fig. 1 で示されたモデルでの疲労成分とよく一致している。第Ⅳ, Ⅴ, Ⅵ因子は、それぞれ抵抗努力因子または興奮因子、動揺因子または反転因子、純粹意志緊張因子と名づけられているが、いずれも解釈がむずかしい。このうち第Ⅳ因子は、モデルでは、疲労成分に含まれていると考えられる。すなわち、提唱したモデルでは、疲労と興奮の分離は不可能なのである。したがって、通常疲労のパラメーター λ_1 の符号は正であると考えられるが、Fig. 6 の事例でも示したように負になる場合が起こったときには、疲労を打消す興奮が起こったと解釈するのが妥当であろう。ちなみに、学習成分についても、 λ_2 に負の値が起こりうるが、これは負の学習す

なわち学習によって混乱が生じたと解釈しうるであろう。残りの第Ⅴ, Ⅵ因子は、モデルでは、データから学習・疲労を引いた残差成分に対応していると考えられる。これらの対応については、さらにデータを使ってくわしく分析していかなければならない。

ところで、推定されたパラメーターが、類型判定にどう役立つかについては、今後の研究にまたねばならないが、ある程度の見通しを与えるものとして、Fig. 7, Fig. 8 に A と λ_1 , B と λ_2 のそれぞれ類型別同時分布を示しておく。

また、これらのパラメーターが具体的にいかなる心理的事象に対応しているのか、あるいは、同一個体でどう変化するのかなども、今後にのこされた課題と言える。

引 用 文 献

- Draper, N. K., & Smith, H. 1966 *Applied regression analysis*. New York: Wiley. (中村 慶一 訳 1968 応用回帰分析 森北出版)
- 柏木 繁男 1962 内田クレベリン検査の作業曲線について 心理学研究, **33**, 36—38.
- 柏木 繁男 1964 内田クレベリン検査の信頼性と妥当性の客観的手法による検討 心理学研究, **35**, 93—95.
- Lewis, D. 1960 *Quantitative methods in psychology*. New York: McGraw-Hill.
- Marquardt, D. W. 1963 An algorithm for least-squares estimation of nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **11**, No. 2 June.
- 中塚善次郎 1970 高校学業成績の規定要因に関する研究 教育心理学研究, **18**, 1—13.
- 中塚善次郎 1971 内田クレベリン検査の数量化に関する研究 大阪市立大学修士論文 (未刊)
- 日本・精神技術研究所(編) 1970 内田クレベリン精神検査法早わかり
- 日本・精神技術研究所(編) 1972 内田クレベリン精神検査の数量的評価法
- 戸川行男(監) 1973 精神作業検査要覧 実務教育出版
- 辻岡美延 1968 適性検査としての内田クレベリン検査の妥当性と判定の電子計算化 関西大学社会学論集, **2**, 1—59.
- 内田勇三郎 1951 内田クレベリン精神検査法手引 日本・精神技術研究所

FIG. 7. Joint distribution of A and λ_1 .

FIG. 8. Joint distribution of B and λ_2 .

SUMMARY

Some attempts have been made by Kashiwagi (1962) and Tsujioka (1968) to explicate more clearly the psychological nature of the work curve obtained by Uchida-Kraepelin Psychodiagnostic Test (UKPT). Both of them used qualitative methods.

The purpose of the present study was also to construct a mathematical model in order to add a new technique of analyzing the work curve of UKPT. The proposed model has common characteristics with Kashiwagi's model in the sense that the course of work curve was described by the second order ordinary differential equation, but was different from Kashiwagi's in the other sense that the model was derived from a very different standpoint. Especially, not only the averaged work curve, but also individual curves can be analyzed by the authors' model.

MODEL CONSTRUCTION AND PROCEDURE OF FITTING MODEL TO DATA : The components which compose the work curve are considered fundamentally as learning and fatigue. Accordingly, during the actual working process, the psychological phenomena which are caused by the mental tension and its relaxation are assumed to accompany these components. The following equations were proposed as the model.

$$x_f(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + B(1 - e^{-\lambda_2 t}) + C \quad (1)$$

$$x_s(t+15) = Ae^{-\lambda_2 t} + B(1 - e^{-\lambda_2(t+15)}) + C \quad (2)$$

$$t = 1, 2, \dots, 15$$

where $x_f(t)$ is the amount of work in the first half and $x_s(t+15)$ in the second half, and the first term on the right side of equations is the fatigue term, the second term is the learning term and the third term is constant.

The following two hypotheses are involved in the model. 1) The fatigue progresses in the same way at the first half and the second half. 2) The learning progresses continuously through the first half and the second half. At first, parameters B and λ_2 were estimated by subtracting Eq. (1) from Eq. (2) using these two hypotheses. Second, the residual parameters A , λ_1 and C were estimated. In order to estimate these nonlinear parameters involved in the model, Marquardt's method (1963) was used. An algorithm for determining the initial values which were important for this method was constructed by the authors. The residual components, which were obtained by subtracting two components from the actual data, indicate the mental tension and relaxation as mentioned above. If these residuals can be regarded as oscillation, the above equations can be simplified as follows.

$$x = e^{\rho t} \{A' \cos \lambda_3 t + B' \sin \lambda_3 t\} \quad (3)$$

These residual components were not analyzed in this paper.

EXAMPLES : The examples, which were analyzed using real data, were presented here. Some or all of five parameters diverged much in values from the regular type as the irregularity increased.

DISCUSSION : The curve fitting was attempted for 600 samples by now. There were no samples for which the parameters could not be estimated. The goodness of fit was satisfactory as ten examples showed. Some correspondence between the components of the model and the factors of Tsujioka's factor model (1968) was discussed. The examination of validity of this model was the problem left for the future.