増感率の定義に関する提案とその測定法に就いて

大阪大学医学部 内 田 勝

電気制御研究所 山 田 正 光

(論文受付 昭和31年1月30日)

A PROPOSAL ON THE NEW DEFINITION FOR INTENSIFICATION FACTOR AND THE MEASURING METHOD

By SUGURU UCHIDA

MASAMITSU YAMADA

Osaka Univ. Medical Coll.

(Article recieved : JAN. 30, 1956)

Summary

The following description is devoted to the new definition for intensification factor based upon the experimental data and the measuring method of wavelength-intensification factor characteristics.

1. 緒 言

連続X線によって撮影を行う場合に医学的にも工学的にも撮影時間の短縮を目的として増感紙が一般に使用せられている。この増感紙の時間の短縮比を増感率と称しているがこれは一般に次の様に定義されている。

今、フィルムに増感紙を用いない場合と之を用いた場合とにつき等しい黒化度 S を得るに必要な露出時間を夫々 t_0 及び t とする時、 $f = \frac{t_0}{t}$ を以てその増感紙の増感率 f と定義

する。増感率の表示には黒化度が指定される。普通は黒化度 1.0 である。他に増感指数法、露出時間の逆数による法等があるが一般には用いられていない。この様に定義された増感率では Fig. 1, 2, 3 に例示する様に同一の増感紙

Fig. 1 東芝 佐藤氏による

であっても印加電圧の最高値の高低によってその増感率が異なる。之は発生X線の波長 (又は振動数) の energy 分布が異なるためであると考えられる。しかもすべてのX線

Fig. 2 極光 滝沢氏による

Fig. 3 島津 西川氏による

発生装置が同一の最高電圧に対して同一の波長分布を有するとは絶対に考えられない。装置の特性が個々の装置に就いてすべて異なる事、電源、線条電流等の条

件を同一には取り得ない事等の理由から当然である。従って Fig. 1, 2, 3 に図示する様な増感率の表はし方は実用上余り大きな意味を持たないのではなかろうか。従って増感率は発生X線の波長（又は振動数）分布状態に無関係となる様に定義するのが当然と考えられる。被写体がは入った場合の事も併せ考慮すれば明らかである。但しフィルム、現像条件、黒化度並びにその測定法等の増感率に影響する因子はある約束のもとに常に厳密に一定に保つものとする。

以上の様な考え方に基いて Fig. 1, 2, 3 の特性曲線を材料として以下に詳述する様な考察を行い併せて新しい増感率の定義を提案してみた。又単一波長（又は振動数）に対する増感率の測定計算法に就いて述べた。

尚考察に使用した資料 Fig. 1, 2, 3 は何れも相当に信頼を置けるものと考えられる。

2. 増感率の定義に関する提案

1. 測定例より得られる増感紙の特性

本節の以下に述べる議論は飽くまで現象論的なものである事を先づ断って置かなければならない。即ち Fig. 4 の様に或る増感紙を使用した時その入力であるX線源の状態と、出力である写真の黒化度との間に存在する関係を考察しようとするのである。但し前述の様にフィルムに感光する energy を黒化度に変換する過程は常に一定に保つものとしている。勿論増感紙の増感作用には microscopic な種々の問題がある事は当然であるが本文ではそう云う事は一切考えず入力と出力との関係のみに注目してその特性を考えるものである。卑近な例で云えば増感紙を一種の“開かずの箱”と考えて原因と結果とのみからその“開かずの箱”の特性を求めようとするのである。“開かずの箱”の内部構造を考えようとするのではない。

	DS	DH	DD	DS/DH	DH/DD	DS/DD
130kVp	214	140	83	1.53	1.68	2.57
120	186	124	73	1.50	1.69	2.54
110	156	105	62	1.48	1.69	2.51
100	132	89	52	1.48	1.71	2.53
90	108	72	42	1.50	1.71	2.57
80	85	57	34	1.49	1.67	2.50
70	69	46	27	1.50	1.70	2.55
60	53	35	21	1.51	1.66	2.52

Table 1

Fig. 1 に於いて数種の増感紙の特性中任意の2つを採って任意の電圧に就いて増感率の比をとってみると、電圧の如何に拘らず常に略同一の数値を示す事が分る。即

Fig. 4

ち table 1 に示したものがそれである。Fig. 2, Fig. 3 に就いても同じ事が云える。之を数式で表わせば次

のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\int_{\lambda_0}^{\infty} \eta_1(\lambda) F(\lambda) d\lambda / \int_{\lambda_0}^{\infty} F(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\infty} \eta_2(\lambda) F(\lambda) d\lambda / \int_{\lambda_0}^{\infty} F(\lambda) d\lambda} \\
 &= \frac{\int_0^{\nu_0} \eta_1'(\nu) G(\nu) d\nu / \int_0^{\nu_0} G(\nu) d\nu}{\int_0^{\nu_0} \eta_2'(\nu) G(\nu) d\nu / \int_0^{\nu_0} G(\nu) d\nu} \\
 &= \frac{\int_{\lambda_0}^{\infty} \eta_1(\lambda) F(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\infty} \eta_2(\lambda) F(\lambda) d\lambda} \\
 &= \frac{\int_0^{\nu_0} \eta_1'(\nu) G(\nu) d\nu}{\int_0^{\nu_0} \eta_2'(\nu) G(\nu) d\nu} \\
 &= K = \text{constant} \quad \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

但、 λ : 波長 λ_0 : 最短波長 ν : 振動数

ν_0 : 最大振動数

$\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda)$: 2種の増感紙の単一波長に対する増感率（波長の函数）

$\eta_1'(\nu), \eta_2'(\nu)$: 2種の増感紙の単一振動数に対する増感率（振動数の函数）

$F(\lambda)$: 波長分布函数

$G(\nu)$: 振動数分布函数

$F(\lambda)$ 又は $G(\nu)$ の如何に拘らず常に式(1)が成立するためには如何なる条件が必要となるか、次にその必要充分条件を求めてみる。

2. 式(1)が成立するための必要充分条件

2.1 必要条件

2.1. A変圧器式の場合

Fig. 5

Fig. 5 に示した様な4端子回路（一般には変圧器及び整流器よりなる回路）に於いて、A Bは入力端子、CD

は出力端子であるとし、CD 間にX線管球が接続されているものとする。AB 間に $E_0 \sin(\omega t + \phi)$ なる正弦波状の電圧を印加したとき、CD 間に表われる電圧 v 、及び電流 i は共に入力と同一の繰返し周期を有する周期函数であつて（但し v, i 共に必ずしも正弦波ではない。）且つ $\omega t = 0, \omega t = \theta_k (0 < \theta_k < 2\pi)$ に於いて $v = 0, i = 0$ となり、 $E_0 \rightarrow 0$ にして $v \rightarrow 0, i \rightarrow 0$ とする。 $0 < \omega t < \theta_k$ に於いて $v > 0, i \geq 0$ 更に v は Fig. 6 に示す様に $0 < \omega t < \theta_k$ に於いて只1箇だけの極大値を有する

ものと仮定する。此の仮定は先ず大部分の装置に於いて成り立つものと考えてよい。かような仮定をすると v, i は共に $E_0 \sin(\omega t + \phi)$ が定まれば定まるから $E_0 \sin(\omega t + \phi)$ の函数であると考えてよい。従って v, i は次式で表わせる。

$$v = v\{E_0 \sin(\omega t + \phi)\} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$i = i\{E_0 \sin(\omega t + \phi)\} \quad \dots\dots\dots(3)$$

然るに $E_0 \sin(\omega t + \phi)$ は E_0 及び t を変数とする 2 変数函数であるから v, i も亦 E_0, t が定まれば決定せられる。従って v, i も亦 E_0, t の函数であると考えてよい。故に $v = v(E_0, t)$

$$i = i(E_0, t) \quad \dots\dots\dots(5)$$

となる。式(4)に於いて

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

なる関係を満足する t の値を求める。明らかに此の t は E_0 の函数として定まり v が極大となる時間を与えるものである。そこでこの時間を t_m で表わそう。 $t = t_m$ なる時間に於ける v の値即ち v の極大値を v_m とすると、

$$v_m = v_m\{E_0, t_m(E_0)\} = v_m(E_0) \quad \dots\dots\dots(7)$$

となり E_0 が定まれば一義的に定まるから E_0 のみの函数である。

今 Kulenkampff の実験式を簡単に

$$I = A(\nu_0 - \nu) + B \quad \dots\dots\dots(8)$$

但 $A(=aZ), B(=abZ^2)$: 常数

ν_0 : 最大振動数, ν : 振動数

で表わす事とすると電圧 v , 電流 i なる瞬時値によって時間 dt の間に放射する振動数が ν なる X 線の energy は次式で与えられねばならない。

$$I = [A\{kv(E_0, t) - \nu\} + B] \cdot i(E_0, t) dt \quad \text{但 } \nu_0 = kv \quad \dots\dots\dots(9)$$

但し $kv(E_0, t) \leq \nu$ に対しては $I = 0$ $\dots\dots\dots(10)$

である。即ちある振動数 ν を考えた時それが電圧 v に対する最大振動数よりも大きい時はその電圧に対しては I が零であると言う事である。

然る時は ωt が 0 より θ_k まで変化する際に発生する X 線中 ν なる振動数を有するものの energy は次式で与えられるものとなる筈である。

$$\int_{t_1}^{t_2} I dt = \int_{t_1}^{t_2} [A\{kv(E_0, t) - \nu\} + B] \cdot i(E_0, t) \cdot dt = \varphi \quad \dots\dots\dots(11)$$

但し t_1, t_2 は $kv(E_0, t) = \nu$ $\dots\dots\dots(12)$
なる t に関する方程式の 2 根である。

Fig. 6

註 1 $0 < \omega t < \theta_k$ に於いて唯 1 個の極大値を有すると云う仮定をしているから式(12)が 2 根を有するのは当然である。但 t_m は除く。

註 2 $0 < \omega t < \theta_k$ に於いて v が唯 1 個の極大値を有すると云う仮定があるから $t_1 < t < t_2$ に於いては必ず $kv(E_0, t) > \nu$ であって、 ν なる振動数を有する energy が存在し $t < t_1, t_2 < t$ に於いては $kv(E_0, t) < \nu$ になるから ν なる振動数を有する energy は式(10)に基づいて存在しない。之が積分領域を $t_1 < t < t_2$ と採る理由である。

式(12)より直ちに t_1, t_2 は E_0, ν の函数となる事が判る。

$$\text{即ち } t_1 = t_1(E_0, \nu), \quad t_2 = t_2(E_0, \nu) \quad \dots\dots\dots(13)$$

である。従って式(11)の定積分も亦 E_0, ν の函数となる事は明らかである。即ち

$$\varphi = \varphi(E_0, \nu) \quad \dots\dots\dots(14)$$

である。此処で今増感率 $\eta_1'(\nu), \eta_2'(\nu)$ なる 2 種の増感紙を採って同一の条件のもとで次の様な値を求めてみよう。但し ν_{0m} は電圧の最大値 v_m に対する最大振動数を表わしているものとする。

$$\int_0^{\nu_{0m}} \varphi(E_0, \nu) d\nu = \int_0^{kv_m(E_0)} \varphi(E_0, \nu) d\nu \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\int_0^{\nu_{0m}} \eta_1'(\nu) \cdot \varphi(E_0, \nu) d\nu = \int_0^{kv_m(E_0)} \eta_1'(\nu) \varphi(E_0, \nu) d\nu \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\int_0^{\nu_{0m}} \eta_2'(\nu) \cdot \varphi(E_0, \nu) d\nu = \int_0^{kv_m(E_0)} \eta_2'(\nu) \varphi(E_0, \nu) d\nu \quad \dots\dots\dots(17)$$

然るに実験の結果表示した様に明らかに次の事実が見出される。

$$\frac{\int_0^{kv_m(E_0)} \eta_1'(\nu) \varphi(E_0, \nu) \cdot d\nu}{\int_0^{kv_m(E_0)} \eta_2'(\nu) \varphi(E_0, \nu) \cdot d\nu} \bigg/ \frac{\int_0^{kv_m(E_0)} \varphi(E_0, \nu) d\nu}{\int_0^{kv_m(E_0)} \varphi(E_0, \nu) d\nu} = K = \text{constant} \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$\text{従って } \int_0^{kv_m(E_0)} \eta_1'(\nu) \varphi(E_0, \nu) d\nu = K \int_0^{kv_m(E_0)} \eta_2'(\nu) \varphi(E_0, \nu) d\nu \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$\text{故に } \int_0^{kv_m(E_0)} \{\eta_1'(\nu) - K\eta_2'(\nu)\} \cdot \varphi(E_0, \nu) \cdot d\nu = 0 \quad \dots\dots\dots(20)$$

然るに物理的性質より $\varphi(E_0, \nu)$ は常に正であって且つ kv_m の値如何に拘らず式(20)が成立するためには

$$\eta_1'(\nu) - K\eta_2'(\nu) = 0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

が成立せねばならない。即ち

$$\frac{\eta_1'(\nu)}{\eta_2'(\nu)} = K = \text{constant} \quad \dots\dots\dots(22)$$

が成立せねばならぬ。即ち式(22)は式(18)が成り立つための必要条件である。

註 以上 $0 \rightarrow \theta_k$ と云う範囲で証明したが之で一般性は失われまいと考えられる。尚之は半波整流に就いて考

えたが勿論全波についても成り立つ。又極大値が1つしかない場合に就いて考えたが之は必ずしも1個の場合に限らなくても証明出来る筈である。然し実用上は之で充分であると考えられる。

2.1. B 蓄電器式の場合

Kulenkampff の式を

$$I = A(\nu_0 - \nu) + B \quad \dots\dots\dots(8)$$

で表わすと電圧 v 、電流 i なる瞬時値によって時間 dt の間に放射せられる振動数が ν なる X 線の energy は次式で与えられる。

$$Idt = [A\{k\nu(t) - \nu\} + B] \cdot i(t) \cdot dt \quad \text{但 } \nu_0 = k\nu \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$\text{然るに } i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{dv}{dt} \quad \dots\dots\dots(24)$$

但し q : 蓄電器の電荷、 C : 蓄電器の容量であるから式(23)は次の形で書ける。

$$Idt = [A\{k\nu - \nu\} + B] \cdot \left(-C \frac{dv}{dt}\right) \cdot dt \\ = -C[A\{k\nu - \nu\} + B] dv \quad \dots\dots\dots(25)$$

従って v が v_m から v まで変動する間に発生する振動数 ν なる X 線の energy は次式で与えられる。

$$\int_{v_m}^{v=\nu/k} -C[A\{k\nu - \nu\} + B] dv \\ = C \left[\frac{Ak}{2} v^2 - Avv + Bv \right]_{v=\nu/k}^{v_m} \\ = C \left[\frac{Ak}{2} v_m^2 - Avv_m + Bv_m + \frac{A\nu^2}{2k} - \frac{B\nu}{k} \right] \\ = \phi(v_m, \nu) \quad \dots\dots\dots(26)$$

然るに実験の結果次の関係式が成り立つ。但 ν_{0m} は v_m に於ける最大振動数を表わすものとする。即ち

$$\frac{\int_0^{\nu_{0m}=k\nu_m} \eta_1'(\nu) \phi(v_m, \nu) d\nu}{\int_0^{\nu_{0m}=k\nu_m} \eta_2'(\nu) \phi(v_m, \nu) d\nu} \bigg/ \frac{\int_0^{\nu_{0m}} \phi(v_m, \nu) d\nu}{\int_0^{\nu_{0m}} \phi(v_m, \nu) d\nu} \\ = K = \text{constant} \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$\text{従って } \int_0^{k\nu_m} \eta_1'(\nu) \phi(v_m, \nu) d\nu \\ = K \int_0^{k\nu_m} \eta_2'(\nu) \phi(v_m, \nu) d\nu \quad \dots\dots\dots(28)$$

$$\text{故に } \int_0^{k\nu_m} \{\eta_1'(\nu) - K\eta_2'(\nu)\} \phi(v_m, \nu) d\nu = 0 \quad \dots\dots\dots(29)$$

$$v_m \text{ は任意の大きさととれるから前述と同様の推論によ} \\ \text{って } \eta_1'(\nu) - K\eta_2'(\nu) = 0 \quad \dots\dots\dots(30)$$

となる。即ち

$$\frac{\eta_1'(\nu)}{\eta_2'(\nu)} = K = \text{constant} \quad \dots\dots\dots(31)$$

が成立せねばならぬ。即ち式(31)は式(27)が成り立つための必要条件である。

2.2 充分条件

今最大振動数が ν_{0m} なるある energy 量の X 線があるってその中振動数 ν なるものが

$$\varphi(\nu) \quad \dots\dots\dots(32)$$

であるものとする。然る時増感率が $\eta_1'(\nu), \eta_2'(\nu)$ なる増感率を有する増感紙をとって次の値を計算してみる。

$$\frac{\int_0^{\nu_{0m}} \eta_1'(\nu) \varphi(\nu_{0m}, \nu) d\nu}{\int_0^{\nu_{0m}} \eta_2'(\nu) \varphi(\nu_{0m}, \nu) d\nu} \bigg/ \frac{\int_0^{\nu_{0m}} \varphi(\nu_{0m}, \nu) d\nu}{\int_0^{\nu_{0m}} \varphi(\nu_{0m}, \nu) d\nu} \\ = R(\nu_{0m}) \quad \dots\dots\dots(33)$$

$$\text{此処で } \eta_1'(\nu) = K\eta_2'(\nu) \quad \dots\dots\dots(34)$$

なる関係を代入すると

$$R = \frac{\int_0^{\nu_{0m}} K\eta_2'(\nu) \varphi(\nu_{0m}, \nu) d\nu}{\int_0^{\nu_{0m}} \eta_2'(\nu) \varphi(\nu_{0m}, \nu) d\nu} = K \quad \dots\dots\dots(35)$$

となって式(34)の条件があれば必ず式(1)の関係が成立する事が分る。従って式(34)は式(1)が成立するための充分条件である。

3. 増感率の定義に関する提案

前節に述べた所より次の事を知った。即ち任意の増感紙の増感率は

$$\eta'(\nu) = \eta_a \cdot \eta_b(\nu) \quad \dots\dots\dots(36)$$

と表わす事が出来る。

但 η_a : 個々の増感紙固有の常数で振動数に無関係。

η_b : 増感紙に共通な性質で振動数の函数となる。

従って η_a の値を以てその増感紙の増感率と定義してやれば之は全く電圧、電流とは無関係になるから装置、電源等の影響を受けない。又フィルター、被写体等の透過物質層にも関係しない。従って個々の X 線装置に対する任意の一種の増感紙の特性を予め測定して置けば他の増感紙に対する特性は此の特性に或る常数を乗ずる事によって得られる事となる。尚その場合に被写体を考慮して測定して置けば一層实际的である。

3. 増感紙の振動数特性の測定法

前述した所によって増感紙の特性は

$$\eta'(\nu) = \eta_a \cdot \eta_b(\nu) \quad \dots\dots\dots(36)$$

となる事が分った。茲に η_a は簡単な測定によって相対的に求められるが $\eta_b(\nu)$ 即ち振動数に対する特性は分らない。勿論単一波長を出す大容量の X 線源があれば簡単に測定出来るがこれは甚だ得難い。そこで次の様な方法を考えてみた。

1. 定電圧装置を用いて求める方法

1.1 今増感紙を用いた時得られる黒化度と同一の黒化度を興えるに要する X 線 energy を等価 energy と称する事にする。増感率を $\eta(\nu)$ とすると Fig. 7 を参照して、

$\nu = 0 \rightarrow \nu_0 + \Delta\nu_0$ までの等価 energy は

Fig. 7

$$E_+ = \int_0^{v_0 + \Delta v_0} \eta(v) \{A(v_0 + \Delta v_0) + B - Av\} dv \quad \dots\dots\dots (37)$$

$v=0 \rightarrow v_0$ までの等価 energy は

$$E_0 = \int_0^{v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv \quad \dots\dots\dots (38)$$

$v=0 \rightarrow v_0 - \Delta v_0$ までの等価 energy は

$$E_- = \int_0^{v_0 - \Delta v_0} \eta(v) \{A(v_0 - \Delta v_0) + B - Av\} dv \quad \dots\dots\dots (39)$$

となる。今 (37) + (39) - 2 × (38) 即ち $E_+ + E_- - 2E_0$ を考えてみる。

$$\begin{aligned} E_+ + E_- - 2E_0 &= \int_0^{v_0 + \Delta v_0} \eta(v) \{A(v_0 + \Delta v_0) + B - Av\} dv \\ &\quad - \int_0^{v_0 - \Delta v_0} \eta(v) \{A(v_0 - \Delta v_0) + B - Av\} dv \\ &\quad - 2 \int_0^{v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv \\ &= \int_0^{v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv + \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv \\ &\quad + \int_0^{v_0 - \Delta v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv - 2 \int_0^{v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv \\ &\quad + \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} \eta(v) A \Delta v_0 dv + \int_0^{v_0 - \Delta v_0} \eta(v) A \Delta v_0 dv \\ &\quad - \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv - \int_0^{v_0 - \Delta v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv \\ &= \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv + \int_0^{v_0 - \Delta v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv \\ &\quad + \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} \eta(v) A \Delta v_0 dv - \int_0^{v_0 - \Delta v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv \quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

Δv_0 が小さくその間 $\eta(v)$ は略一定で $\eta(v_0)$ に等しいものとする、

$$\begin{aligned} E_+ + E_- - 2E_0 &= \eta(v_0) \left[\int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} (Av_0 + B - Av) dv \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{v_0 - \Delta v_0} (Av_0 + B - Av) dv + \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} A \Delta v_0 dv \right] \\ &= (A \Delta v_0^2) \eta(v_0) \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

$$\text{故に } \eta(v_0) = \frac{E_+ + E_- - 2E_0}{A \Delta v_0^2} \quad \dots\dots\dots (42)$$

で与える事が出来る。

式(42)に於いて Fig. 7 を参照すれば明らかな様に $A \Delta v_0^2$ は A は勾配であるから斜線の面積を示している。従って実際測定に際しては電圧 $v + \Delta v$, v , $v - \Delta v$ に於ける X 線 energy とその等価 energy の夫々の $e_+ + e_- - 2e_0$ の比をとれば $kv = v_0$ の増感率が得られる。茲に e_+ , e_0 ,

e_- は電圧 $v + \Delta v$, v , $v - \Delta v$ に於ける X 線 energy と等価 energy の総称である。

1.2 1.1 によれば

$$\begin{aligned} E_+ + E_- - 2E_0 &= \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv \\ &\quad - \int_{v_0 - \Delta v_0}^{v_0} \eta(v) \{Av_0 + B - Av\} dv \\ &\quad + \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} \eta(v) A \Delta v_0 dv \quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

であるが本表示式中 $v = v_0$ の近傍に於いて

$$\eta(v) = \eta(v_0) + \eta'(v_0)(v - v_0) \quad \dots\dots\dots (43)$$

なる近似式で表わせるものとする、

$$\begin{aligned} E_+ + E_- - 2E_0 &= \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} \{\eta(v_0) + \eta'(v_0)(v - v_0)\} \\ &\quad \{Av_0 + B - Av\} dv \\ &\quad - \int_{v_0 - \Delta v_0}^{v_0} \{\eta(v_0) + \eta'(v_0)(v - v_0)\} \{Av_0 + B - Av\} dv \\ &\quad + \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} \{\eta(v_0) + \eta'(v_0)(v - v_0)\} A \Delta v_0 dv \\ &= \{\eta(v_0) - \eta'(v_0)v_0\} \left[\int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} (Av_0 + B - Av) dv \right. \\ &\quad \left. - \int_{v_0 - \Delta v_0}^{v_0} (Av_0 + B - Av) dv + A \Delta v_0 \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} dv \right] \\ &\quad + \eta'(v_0) \left[\int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} (Av_0 v + Bv - Av^2) dv \right. \\ &\quad \left. - \int_{v_0 - \Delta v_0}^{v_0} (Av_0 v + Bv - Av^2) dv \right. \\ &\quad \left. + A \Delta v_0 \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v_0} v dv \right] = \Delta v_0^2 \{A\eta(v_0) + B\eta'(v_0)\} \quad \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

$E_- = E_{-1}$, $E_0 = E_0$, $E_+ = E_{+1}$ と置き換える。

$v=0 \rightarrow v_0 + 2\Delta v_0$ までの等価 energy は

$$E_{+2} = \int_0^{v_0 + 2\Delta v_0} \eta(v) \{A(v_0 + 2\Delta v_0) + B - Av\} dv \quad \dots\dots\dots (45)$$

とすると、 $E_0 + E_{+2} - 2E_{+1}$ は前述の結果に於いて

$v_0 = v_0 + \Delta v_0$ と置けばよいから

$$E_0 + E_{+2} - 2E_{+1} = \Delta v_0^2 \{A\eta(v_0 + \Delta v_0) + B\eta'(v_0 + \Delta v_0)\} \quad \dots\dots\dots (46)$$

となるが

$\eta(v) = \eta(v_0) + \eta'(v_0)\{v - v_0\}$ と置いているから

$$\eta'(v_0) \doteq \eta'(v_0 + \Delta v_0)$$

$$\eta(v_0 + \Delta v_0) = \eta(v_0) + \eta'(v_0)\{v_0 + \Delta v_0 - v_0\}$$

$$= \eta(v_0) + \eta'(v_0) \Delta v_0$$

となるから

$$E_0 + E_{+2} - 2E_{+1} = \Delta v_0^2 \{A\eta(v_0) + \eta'(v_0)\{A \Delta v_0 + B\}\} \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$\text{又 } E_{-1} + E_{+1} - 2E_0 = \Delta v_0^2 \{A\eta(v_0) + B\eta'(v_0)\} \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$\eta(v_0) = \frac{E_{-1} + E_{+1} - 2E_0}{A \Delta v_0^2} + \frac{B(E_{-1} - 3E_0 + 3E_{+1} - E_{+2})}{A^2 \Delta v_0^3} \quad \dots\dots\dots (48)$$

となって $\eta(v_0)$ が計算出来る。式(42)と比較すれば明らかな様に式(48)に於いて第2項は補正項となりよりよい近似値を得る事が出来る。

2. 蓄電器式装置を用いて求める方法

Kulenkampff の式を簡単に

$$I = A(\nu_0 - \nu) + B \quad \dots\dots\dots(8)$$

で表わして置く。電圧を $v(t)$, 電流を $i(t)$ とすると dt 秒間に発生する振動数 ν の X 線 energy は次式で表わせる。

$$Idt = [A\{k\nu(t) - \nu\} + B]i(t)dt \quad \dots\dots\dots(23)$$

蓄電器式にあっては

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -C\frac{dv(t)}{dt} \quad \dots\dots\dots(24)$$

なる関係があるから式(23)は次の形になる。

$$\begin{aligned} Idt &= [A\{k\nu(t) - \nu\} + B] \left\{ -C\frac{dv(t)}{dt} \right\} dt \\ &= -C[A\{k\nu - \nu\} + B] d\nu \quad \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

従って放電によって v が v_m から v まで変動する間に発生する振動数 ν なる X 線の energy は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \int_{v_m}^{v_1} I dt &= -C \int_{v_m}^{v_1} [A\{k\nu - \nu\} + B] d\nu \\ &= C \left[-\frac{Ak}{2} v_m^2 - A\nu v_m + Bv_m + \frac{A\nu^2}{2k} - \frac{B\nu}{k} \right] \quad \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

となって v_m のみによって定まる。即ち初充電電圧のみを定めてやればその energy 分布が定まる。換言すれば他の方式に比して再現性が最も大きい。従って測定には最適であると考えられるから以下此の方式を用いてする測定法を述べる。

2.1 式(26)

$$E_\nu = C \left[-\frac{Ak}{2} v_m^2 - A\nu v_m + Bv_m + \frac{A\nu^2}{2k} - \frac{B\nu}{k} \right]$$

に於いて $v_m = \frac{\nu_0}{k}$ を代入して整理すると

$$E_\nu = C \left[\frac{A}{2k} (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu + \nu^2) + \frac{B}{k} (\nu_0 - \nu) \right] \quad \dots\dots\dots(49)$$

$$\frac{CA}{2k} = k_1, \quad \frac{CB}{k} = k_2 \quad \text{と置いて}$$

$$E_\nu = k_1(\nu_0 - \nu)^2 + k_2(\nu_0 - \nu) \quad \dots\dots\dots(50)$$

を得る。次に式(50)を用いて 1. と同様な考え方を進めてみる。

$\nu=0 \rightarrow \nu_0 + \Delta\nu_0$ までの等価 energy は

$$\begin{aligned} E_+ &= \int_0^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) [k_1\{(\nu_0 + \Delta\nu_0) - \nu\}^2 \\ &\quad + k_2\{(\nu_0 + \Delta\nu_0) - \nu\}] d\nu \\ &= k_1 \int_0^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) \{(\nu_0 + \Delta\nu_0) - \nu\}^2 d\nu \\ &\quad + k_2 \int_0^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) \{(\nu_0 + \Delta\nu_0) - \nu\} d\nu \quad \dots\dots\dots(51) \end{aligned}$$

$\nu=0 \rightarrow \nu_0$ までの等価 energy は

$$\begin{aligned} E_0 &= \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) \{k_1(\nu_0 - \nu)^2 + k_2(\nu_0 - \nu)\} d\nu \\ &= k_1 \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) (\nu_0 - \nu)^2 d\nu + k_2 \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) (\nu_0 - \nu) d\nu \quad \dots\dots\dots(52) \end{aligned}$$

$\nu=0 \rightarrow \nu_0 - \Delta\nu_0$ までの等価 energy は

$$E_- = \int_0^{\nu_0 - \Delta\nu_0} \eta(\nu) [k_1\{(\nu_0 - \Delta\nu_0) - \nu\}^2 + k_2\{(\nu_0 - \Delta\nu_0) - \nu\}] d\nu$$

$$= k_1 \int_0^{\nu_0 - \Delta\nu_0} \eta(\nu) \{(\nu_0 - \Delta\nu_0) - \nu\}^2 d\nu$$

$$+ k_2 \int_0^{\nu_0 - \Delta\nu_0} \eta(\nu) \{(\nu_0 - \Delta\nu_0) - \nu\} d\nu \quad \dots\dots\dots(53)$$

(51) + (53) - 2 × (52) 即ち $E_+ + E_- - 2E_0$ を考える。

$E_+ + E_- - 2E_0$ に於いて k_2 の項は既に 1. で算出されて居りそれは次の様になる。

$$(k_2 \Delta\nu_0^2) \cdot \eta(\nu_0) \quad \dots\dots\dots(54)$$

従って k_1 の項のみ計算すればよい。

$$\begin{aligned} (E_+ + E_- - 2E_0) k_1 &= k_1 \left[\int_0^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) \{(\nu_0 + \Delta\nu_0) - \nu\}^2 d\nu \right. \\ &\quad + \int_0^{\nu_0 - \Delta\nu_0} \eta(\nu) \{(\nu_0 - \Delta\nu_0) - \nu\}^2 d\nu \\ &\quad - 2 \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) (\nu_0 - \nu)^2 d\nu \\ &= k_1 \left[\int_0^{\nu_0} \eta(\nu) (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu + \nu^2) d\nu \right. \\ &\quad + \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu + \nu^2) d\nu \\ &\quad + \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) \{ \Delta\nu_0^2 + 2\Delta\nu_0(\nu_0 - \nu) \} d\nu \\ &\quad + \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) \{ \Delta\nu_0^2 + 2\Delta\nu_0(\nu_0 - \nu) \} d\nu \\ &\quad + \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu + \nu^2) d\nu \\ &\quad + \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu + \nu^2) d\nu \\ &\quad + \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) \{ \Delta\nu_0^2 + 2\Delta\nu_0(\nu - \nu_0) \} d\nu \\ &\quad + \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) \{ \Delta\nu_0^2 + 2\Delta\nu_0(\nu - \nu_0) \} d\nu \\ &\quad - 2 \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu + \nu^2) d\nu \\ &= k_1 \left[2 \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) \Delta\nu_0^2 d\nu + \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu + \nu^2) d\nu \right. \\ &\quad + \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu + \nu^2) d\nu \\ &\quad + 2 \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) \Delta\nu_0 (\nu_0 - \nu) d\nu \\ &\quad \left. + \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) \Delta\nu_0^2 d\nu + \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \eta(\nu) \Delta\nu_0^2 d\nu \right] \quad \dots\dots\dots(55) \end{aligned}$$

$\Delta\nu_0$ が小さくその間 $\eta(\nu)$ は略一定で $\eta(\nu_0)$ に等しいものとする。

$$\begin{aligned} (E_+ + E_- - 2E_0) k_1 &= k_1 \left[2 \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) \Delta\nu_0^2 d\nu \right. \\ &\quad + \eta(\nu_0) \left\{ \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu + \nu^2) d\nu \right. \\ &\quad + \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu + \nu^2) d\nu \\ &\quad + 2 \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \Delta\nu_0 (\nu_0 - \nu) d\nu + \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \Delta\nu_0^2 d\nu \\ &\quad \left. \left. + \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} \Delta\nu_0^2 d\nu \right\} \right] = 2k_1 \Delta\nu_0^2 \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) d\nu \quad \dots\dots\dots(56) \end{aligned}$$

$$(E_+ + E_- - 2E_0) k_2 = k_2 \eta(\nu_0) \Delta\nu_0^2$$

故に $E_+ + E_- - 2E_0 = (E_+ + E_- - 2E_0) k_1$

$$+ (E_+ + E_- - 2E_0) k_2$$

$$= 2k_1 \Delta\nu_0^2 \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) d\nu + k_2 \eta(\nu_0) \Delta\nu_0^2$$

$$= \eta(\nu_0) \Delta\nu_0^2 \left\{ \frac{2k_1}{\eta(\nu_0)} \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) d\nu + k_2 \right\} \quad \dots\dots\dots(57)$$

$$\text{茲で } \frac{1}{\eta(\nu_0)} \int_0^{\nu_0} \eta(\nu) d\nu = \nu_1 \quad \Delta\nu_0 < \nu_1 < \nu_0 \quad \dots\dots\dots(58)$$

$$\text{従って } \eta(\nu_0) = \frac{E_+ + E_- - 2E_0}{\Delta\nu_0^2 (2k_1 \nu_1 + k_2)} \quad \dots\dots\dots(59)$$

Fig. 8

逆に Fig. 8 の斜線の面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\nu_0 - \Delta\nu_0}^{\nu_0} [k_1\{(\nu_0 + \Delta\nu_0) - \nu\}^2 + k_2\{(\nu_0 + \Delta\nu_0) - \nu\} \\ &\quad - k_1(\nu_0 - \nu)^2 - k_2(\nu_0 - \nu)] d\nu \\ &= \int_{\nu_0 - \Delta\nu_0}^{\nu_0} [k_1\{\Delta\nu_0^2 + 2\Delta\nu_0(\nu_0 - \nu)\} + k_2\Delta\nu_0] d\nu \\ &= \Delta\nu_0^2(2k_1\Delta\nu_0 + k_2) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(60)$$

式(59), 式(60)より明らかな様に蓄電器式に於いてはこの方法で $\eta(\nu_0)$ の測定は出来ない。

そこで次の様な方法を考えてみた。

2.2 ν と $\nu + d\nu$ との間の energy 分布函数を $I_{0\nu}d\nu$ で表わし之が $\eta(\nu)$ 倍に増感されるものとするとき等価 energy $I_\nu d\nu$ は次の形で与えられる。

$$I_\nu d\nu = I_{0\nu} \eta(\nu) d\nu \quad \dots\dots\dots(61)$$

従ってすべての振動数の energy に就いては

$$\int_{\nu_0}^{\nu_0} I_\nu d\nu = \int_{\nu_0}^{\nu_0} I_{0\nu} \eta(\nu) d\nu = E_1(\nu_0) \quad \dots\dots\dots(62)$$

又増感しない時の energy 量は

$$\int_{\nu_0}^{\nu_0} I_{0\nu} d\nu = E_2(\nu_0) \quad \dots\dots\dots(63)$$

で与えられる。

$\nu_0 = k\nu$ であるから蓄電器式にあっては全 energy は夫々

$$-C \int_{\nu_1}^{\nu_2} E_1(\nu) \cdot d\nu = E_3(\nu) \quad \dots\dots\dots(64)$$

$$-C \int_{\nu_1}^{\nu_2} E_2(\nu) \cdot d\nu = E_4(\nu) \quad \dots\dots\dots(65)$$

で与えられる。

従って今 ν_2 の値を固定して置いて ν_1 を変化せしめて之を plot して行くとするとこの曲線は

$$E_3(\nu) = -C \int_{\nu}^{\nu_2} E_1(\nu) d\nu = C \int_{\nu_2}^{\nu} E_1(\nu) d\nu \quad \dots\dots\dots(66)$$

$$E_4(\nu) = -C \int_{\nu}^{\nu_2} E_2(\nu) d\nu = C \int_{\nu_2}^{\nu} E_2(\nu) \cdot d\nu \quad \dots\dots\dots(67)$$

を表わす事となる。

然るに之は $C \int E_1(\nu) \cdot d\nu$, $C \int E_2(\nu) \cdot d\nu$ なる不定積分の1つである。従って以上の函数を C で割って ν に就いて微分すれば $E_1(\nu)$, $E_2(\nu)$ なる原函数を表わす事となる。故に蓄電器式によって定電圧の場合と同一の結果が得られる事となる。

実際測定にあたっては波尾截断電圧は一定とし充電電圧を種々変化して ν と X 線 energy 並びにその等価 energy との関係を曲線に画く。それ等の曲線を表わす数式の微分が原函数即ち定電圧に於ける X 線 energy 並びにその等価 energy を表わすと考えてよいわけである。従ってこれ等原函数に電圧 $\nu + \Delta\nu$, ν , $\nu - \Delta\nu$ を代入して X 線 energy 並びにその等価 energy を算出し $e_+ + e_- - 2e_0$ を夫々作ってこれ等の比を求むればその目的を達する事が出来る。

4. 結 言

“増感率は発生 X 線の波長 (又は振動数) 分布状態に無関係となる様に定義する可きである” と云う考え方にもとづいて Fig. 1, 2, 3 の特性曲線を材料として現象論的に又理論的に考察を行い併せて新しい増感率の定義を提案した。又単一波長 (又は振動数) に対する増感率の測定計算法を理論的に考究しよい近似に於いてその可能性を確認した。

終りに臨み御校閲を賜った西岡時雄教授に深甚の謝意を表するとともに X 線管協議会の各委員に御検討を戴いたことを感謝するものである。

文 献

- 1) 佐藤秀夫: 新種増感紙について, 東芝 X 線資料, 第 11 輯, 18 頁 (昭 30).
- 2) 滝沢達児: 高圧撮影技術の研究 (I) — 増感紙と螢光板に就いて —, 極光 X-Ray, 第 6 号, 3 頁 (昭 29).
- 3) 西川邦夫: 増感紙の写真効果特性 (第 1 報), 島津評論, 第 9 巻, 第 3 号, 16 頁 (昭 27)

レ線感光エネルギーに就いて (I)

国立国府台病院放射線科

(科長 大出良平)

鍵 田 政 雄 山 田 生 男 原 田 淳

(論文受付 昭和 31 年 1 月 16 日)