原 著

 ^{60}Co -TAR の3つの指数関数による近似

九州大学医学部附属病院 放射線部

中 野 努

(論文受理 昭和53年1月5日)

(Code No. 41110)

APPROXIMATION OF ^{60}Co -TAR WITH THREE
EXPONENTIAL FUNCTIONS.

By TSUTOMU NAKANO

Department of Radiology, Kyushu University
Hospital

(Article received ; Jan. 5, 1977)

Summary

The popular method of estimating tissue-air ratio was investigated by Onai et al.

This is polynomial approximation for parameters k and m which are expressed in Pfalzner's general formula.

I made an approximation with three exponential functions for tissue-air ratio of cobalt 60 gamma radiation. It can be seen that.

$\text{TAR}(d, \ell) = 1.033 \exp(-0.0066 d) + \{0.414 \log(\ell + 2.5) - 0.21\} \exp\{-(0.061 - 0.0294 \log \ell) d\} - (0.243 \log \ell - 0.0072) \exp(-0.75 \ell^{-0.343} d)$ where ℓ (cm) is one dimension of square field, and d (cm) is the depth of interest.

The result indicates that the errors are less than 2% in range of $0.5 \leq d \leq 20\text{cm}$, $4 \leq \ell \leq 20\text{cm}$.

1. 緒 言

TAR の近似計算について既に尾内らによる報告がある¹⁾。これは Pfalzner の計算式²⁾の定数 k と m の項を近似多項式によって近似するものである。その他に既知関数による近似計算式もあるが、今回 TAR を3つの指数関数によってうまく近似できることが判ったので報告する。

2. 考 察

TAR は、照射野と深さの関数であり、いま照射野をパラメータとして TAR を片対数グラフにプロットすると、**Fig. 1** のように照射野面積の増大に伴ない TAR の値は大きくなる。

これは広い照射野の場合、scattered radiation の付加が増大するためと考えられる。

Fig. 1 Tissue-air ratio for ^{60}Co on semi-log paper with field size as paramaters.

ここで Fig. 1 の一番下の 0 cm^2 エリアの TAR というのは, scattered radiation のない, 一次線だけの TAR であり, 指数関数的に減少する。

TAR はこの 0 cm^2 エリアの TAR に scattered radiation が加わったものであり, (1)式のように表わせる^{3)~4)}。

$$\text{TAR}(d, r_d) = \text{TAR}(d, 0) + \text{SAR}(d, r_d) \dots (1)$$

ここで r_d は, 深さ d で, 半径 r であるような円の照射野を表わし, d はその時の深さを表わす。SAR は scatter-air ratio の略で, scattered radiation の一次線の peak 深での強度に対する比である。いま $^{60}\text{Co}-\gamma$ 線の組織との相互作用を考えると, そのほとんどがコンプトン散乱による吸収⁵⁾であり, 散乱二次電子は, ほとんど散乱の起った場所でエネルギー損失を行なう。一方 scattered radiation の大部分は再びコンプトン散乱をくり返しなが, 最終的には光電効果によって消滅する。

そのため, scattered radiation のある微小深さでの変化を考えると, scattered radiation の発生 (一次線とのコンプトン散乱) と scattered radiation の消滅という二つの変化の和として考えることができる。高エネルギーの photon beam での scattered radiation は, かなり強い指向性を持って前方散乱する⁶⁾のでその中心軸での scattered radiation の強度は次のような形でうまく近似できるものとする。

$$\text{SAR}(d, r) = f_1(r)e^{-g_1(r) \cdot d} + f_2(r)e^{-g_2(r) \cdot d} \dots (3)$$

$f_1(r)$, $g_1(r)$, $f_2(r)$, $g_2(r)$ はそれぞれ, 照射野の大きさの関数である。

3. 近似関数の決定

照射野をパラメータとして, 深さに対して SAR をプロットすると, Fig. 2 に示すような SAR 曲線が得られる。図から判るように SAR は, ある深さまで増大するが, ある深さでピークに達し, 以後は, 指数関数的に減少する。

これは浅いところでは scattered radiation の発生が消滅を上回るが, ある深さで釣り合い, それ以後は, 一次線の減少によって scattered radiation の発生が少なくなるためと考えられる。

Fig. 2 には, 指数関数的に減少する部分から浅い方に外挿した直線を破線で示しているが, これは(3)式の第1項に相当する。

実際には浅いところでは SAR は実線で示す値をとる。破線で示す外挿直線から実際の SAR を引いた値を Fig. 3 に示す。これもほぼ指数関数によって近似でき, (3)式の第2項に相当する。結局, (3)式の f_1 , f_2 は $d=0$ の時の初期値で, g_1 , g_2 は指数関数の傾きである。

Fig. 2 Scatter-air ratio for ^{60}Co on semi-log paper with field size as paramaters.

Solid lines show real scatter-air ratio and dashed lines are drawn along decreasing exponential parts.

Fig. 3 The values subtracting real SAR from the values of dashed lines.

計算のための ^{60}Co の TAR 値は Gupta & Cunningham の測定データ⁷⁾を用いた。

また(3)式は照射野の大きさを半径 r の円の照射野で表わしたが、これを一辺が ℓ であるような正方形の照射野についての近似関数を求める方がより有効なので(3)式は(4)式のように書き改める。

$$\text{SAR}(d, \ell) = f_1(\ell) e^{-g_1(\ell) \cdot d} - f_2(\ell) e^{-g_2(\ell) \cdot d} \dots (4)$$

3.1 $f_1(\ell)$, $g_1(\ell)$ の近似式

Fig. 4 に Fig. 2 の破線で示した直線の 0 cm 深さでの値と照射野の大きさとの関係を、Fig. 5 には、その傾きと照射野の関係を示す。

図中の数式は、最小二乗法による回帰方程式を示し、 R は相関係数を示す。

$f_1(\ell)$ はそのままではうまく近似できないため、右に 2.5 だけ移動させたのち $Y = a \log x + b$ の形の近似式に近似させた。(5), (6) に $f_1(\ell)$, $g_1(\ell)$ の近似式を示す。

$$f_1(\ell) = 0.414 \log(\ell + 2.5) - 0.21 \dots (5)$$

$$g_1(\ell) = 0.061 - 0.0294 \log \ell \dots (6)$$

3.2 $f_2(\ell)$, $g_2(\ell)$ の近似式

Fig. 6 に Fig. 3 に示す値の 0 cm 深さにおける値と照射野の関係を、Fig. 7 にはその傾きと照射野の関係を示す。3.1 と同様に、最小二乗法による回帰方程式と相関係数を図中に示す。

しかし、 $f_2(\ell)$ と $g_2(\ell)$ の回帰方程式が必ずしも $f_2(\ell) e^{-g_2(\ell)}$ という形で、近似誤差を最小にするとは限ら

Fig. 4 $f_1(\ell)$ values for various fields.
 $f_1(\ell)$ are extrapolated values of dashed lines at $d=0$.

Equation shows the regression equation, and R is the correlation coefficient.

Regression equation was made after moving $f_1(\ell)$ values toward right 2.5 on semi-log paper.

Fig. 5 $g_1(\ell)$ values for various fields.
 $g_1(\ell)$ represent slopes of dashed lines.

ないため、 $f_2(\ell)$ と $g_2(\ell)$ の回帰方程式の周囲をさぐり計算によって、 $f_2(\ell) e^{-g_2(\ell)}$ の形で最も良く近似するような $f_2(\ell)$, $g_2(\ell)$ を逐次近似し (7), (8) 式のような値を得た。

$$f_2(\ell) = 0.243 \log \ell - 0.0072 \dots (7)$$

$$g_2(\ell) = 0.75 \ell - 0.343 \dots (8)$$

Fig. 6

Fig. 7

$f_2(l)$ and $g_2(l)$ values for various fields.

$f_2(l)$ are values subtracted real SAR from the value of dashed lines, and $g_2(l)$ represent their slopes.

Equation and R shows the regression equation and the correlation coefficient respectively, however, result of trials, approximation was modified as equation (7) and (8).

3.3 $TAR(d, o)$ の近似式

一次線の TAR は (9) 式のように近似できる.

$$TAR(d, o) = 1.033 \exp(-0.0066 \cdot d) \quad \dots\dots\dots (9)$$

4. 結 論

深さ $d(\text{cm})$, 一辺が $l(\text{cm})$ であるような正方形の照射野中心での TAR は (5), (6), (7), (8), (9) 式より, (10)

式のように3つの指数関数によって, よく近似することができる.

$$\begin{aligned} TAR(d, l) = & 1.033 \exp(-0.0066 \cdot d) \\ & + \{0.414 \log(l + 2.5) - 0.21\} \\ & \exp\{- (0.061 - 0.0294 \log l) d\} \\ & - (0.243 \log l - 0.0072) \\ & \exp(-0.75 l - 0.343 \cdot d) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

この近似式の誤差は, $0.5 \leq d \leq 20 \text{ cm}$, $4 \leq l \leq 20 \text{ cm}$ の範囲で2%以内にあり, ほとんど1%以内に近似できる. (10)式は簡単なプログラムの組める電卓で容易に計算できるため, 我々は ^{60}Co 照射の線量計算のための TAR は(10)式を使って行ってきた.

本稿を終るに当り, 御校閲をいただきました九州大学歯学部歯科放射線学教室, 小西圭介助教授に感謝申し上げます.

文 献

- 1) Onai, Y., Irifune, T., Tomaru, T., and Konishi T.: Calculation of Dose Distribution in Radiation Therapy by a Digital Computer, I, 日医放会誌, **27**, 653—666, (1967)
- 2) Pfalzner, P.M.: A General Formula for Axial Depth Dose Derived from an Empirical Power Law for Tumor-Air Ratios. Radiology, **75**, 438—445, (1960)
- 3) Johns, H.E.: The Physics of Radiology. Charles C Thomas. (1971)
- 4) Onai, Y., Irifune, T., Tomaru, T. and Uchida, I.: Calculation of Dose Distribution in Radiation Therapy by a Digital Computer III, 日医放会誌, **30**, 718—729, (1970)
- 5) 3) p.167. Table V-5.
- 6) 兵藤知典: 放射線遮蔽入門, 産業図書. (1966)
- 7) Gupta, S. K. and Cunningham, J. R.: Measurement of Tissue-Air Ratios and Scatter Functions for Large Field Sizes, for Cobalt 60 Gamma Radiation. Brit. J. Radiol., **39**, 7—11, (1966)