ノート

矩形波 MTF と Coltman 補正の検討

札幌南通信病院

水野 茂・高田 具泰

(論文受理 昭和54年10月26日)

(Code No. 21123)

EXAMINATION OF COLTMAN'S FORMULA AND RECTANGULAR WAVE'S RESPONSE COMPARED WITH SINE WAVE'S RESPONSE

By SHIGERU MIZUNO and

TOMOYASU TAKADA

Sapporo Minami Teishin Hospital, Sapporo

(Article received; Oct. 26, 1979)

Summary

It has been known that contrast method for the measurement of response function has two ways, i.e. rectangular wave's chart method which is commonly used and sine wave's exposure method of which manufacture is technically difficult. Fundamental difference between rectangular and sine wave's response obtained with each method were studied in this paper.

We assumed that six kinds of line spread distribution had its own function, $F(x)$, respectively, and both sine and rectangular wave's response for these functions were calculated to compare. By using Coltman's formula, the rectangular wave's responses calculated above was corrected by various numbers of correction terms on its formula to observe the degree of approximation to the standard formula of sine wave's responses.

はじめに

X線撮影系における MTF を Contrast 測定方式で求める場合、正弦波チャートの製作が技術的に困難であるため、矩形波 MTF で代用されている場合が多い。これらの現状から、正弦波 MTF と矩形波 MTF の基礎的な比較は有意義なことと思われる。

Fourier 変換法による正弦波 MTF は、既に、多くの関数について求められているが¹⁾²⁾、矩形波 MTF についての例は殆んど見受けられない。

我われは、6種類の線像強度分布 (LSF) を、それぞれ関数 $f(x)$ に仮定して、その $f(x)$ について正弦波 MTF と矩形波 MTF を求め比較した。更に、矩形波 MTF については、Coltman の関係式を用いて補正項数とその補正值の関係について検討した。

1. MTF の算出方法

正弦波 MTF は、各 LSF を Fourier 変換して求めた。また、矩形波 MTF は、画像合成の基礎式として知られている Convolution 積分³⁾ から求めた。Fig. 1 のような

Fig. 1. Quantities involved in the definition of response factors.

線像強度分布 $f(x)$ の系に矩形波 $h(x)$ を入力すると、その出力像の強度分布 $i(x)$ は次の式で表わされる。

$$\begin{aligned} i(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')h(x')dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')h(x-x')dx' \end{aligned} \quad \text{.....(1)}$$

そして、Fig. 1, (b), (c) の矩形波と出力像の山の中心と、谷の中心の強度を、それぞれ、 $h_{\max}(x)$, $h_{\min}(x)$, $i_{\max}(x)$, $i_{\min}(x)$ とするならば、この系の矩形波 MTF $S(\omega)$ は(2)式として求められる⁴⁾。

$$S(\omega) = \frac{i_{\max} - i_{\min}}{i_{\max} + i_{\min}} \cdot \frac{h_{\max} - h_{\min}}{h_{\max} + h_{\min}} \quad \text{.....(2)}$$

特に強度分布 $f(x)$ が偶関数で、その積分 $F(x)$ がわかるならば、その系の矩形波 MTF は式(1), (2)によって次のように求められる。

$$\begin{aligned} |x| \leq d : & f(x) \\ |x| > d : & f(x) = 0 \\ \int f(x)dx &= F(x) + C \end{aligned} \quad \text{.....(3)}$$

但し、 $2d$ は線像強度分布の幅

C は積分定数

矩形波の周波数 ω Lp/mm が

$$\frac{2n-1}{4d} < \omega < \frac{2n+1}{4d} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

のとき

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{(-1)^n \cdot F(d) - F(0)}{F(d) - F(0)} \\ &+ \frac{2}{F(d) - F(0)} \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \cdot Fm\left(\frac{2m-1}{4\omega}\right) \end{aligned} \quad \text{.....(4)}$$

Fig. 2. Line spread function of square pattern.

とくに $F(0)=0$ となるならば式(4)は

$$S(\omega) = (-1)^n + \frac{2}{F(d)} \cdot \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \cdot Fm\left(\frac{2m-1}{4\omega}\right) \quad \text{.....(5)}$$

となる。

例えば Fig. 2 のような

$$f(x) = \begin{cases} 1 : |x| \leq d \\ 0 : |x| > d \end{cases}$$

なる線像強度分布の矩形波 MTF は

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= x \\ F(d) &= d \\ F(2m-1/4\omega) &= \left(\frac{2m-1}{4\omega}\right) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(6)}$$

式(6)を式(5)に代入すれば $S(\omega)$ として求まる。

$$\begin{aligned} S(\omega) &= (-1)^n + \frac{1}{2d\omega} \cdot \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \cdot (2m-1) \\ &= (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{n}{2d\omega}\right) \end{aligned} \quad \text{.....(7)}$$

即ち

$$\left. \begin{aligned} 0 < \omega \leq 1/4d & \quad S(\omega) = 1.0 \\ \frac{2n-1}{4d} < \omega \leq \frac{2n+1}{4d} & \quad S(\omega) = (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{n}{2d\omega}\right) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(8)}$$

となる。

MTF の算出に用いた線像強度分布は、Fig. 3 に示す 6 種類の関数である。

LSF (A)

$$f(x) = \exp \frac{\log_e 0.5}{d} |x|$$

LSF (B)

$$f(x) = \exp \frac{\log_e 0.5}{d^2} x^2$$

LSF (C)

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2d} x + 1 \right)$$

ただし $-2d > x > 2d$ では $f(x)=0$ とする。

LSF (D)

矩形波 MTF と Coltman 補正の検討 (水野・高田)

Fig. 3. Response can be calculated by those line spread function.

$$f(x)=1$$

ただし $-d > x > d$ では $f(x)=0$ とする.

LSF (E)

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{2d}x+1\right)$$

ただし $-\frac{3}{5}d < x < \frac{3}{5}d$ では $f(x)=0.5$

$-\frac{6}{5}d > x > \frac{6}{5}d$ では $f(x)=0$ とする.

LSF (F)

$$0 \leq x \leq \frac{d}{2} \text{ では } f(x)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{5\pi}{2d}x\right)$$

$$\frac{d}{2} < x \leq \frac{19}{10}d \text{ では}$$

$$f(x)=-\frac{1}{d}\left\{\frac{5}{14}\left(1-\cos\frac{5}{4}\pi\right)-\frac{5}{16}\left(1-\cos\frac{19}{4}\pi\right)\right\}x+\left\{\frac{19}{28}\left(1-\cos\frac{5}{4}\pi\right)-\frac{5}{32}\left(1-\cos\frac{19}{4}\pi\right)\right\}x$$

$$\frac{19}{10}d < x \leq \frac{12}{5}d \text{ では}$$

$$f(x)=\frac{7}{16}\left(1-\cos\frac{5\pi}{2d}x\right)$$

$$0 > x > \frac{12}{5}d \text{ では } f(x)=0 \text{ とする.}$$

LSA(A), (B) は, フィルムや増感紙の LSF の形に近く, LSF(C) は, X線管焦点の軸方向, LSF(E), (F) は幅方向の LSF の形に近いものと考えられる. また, LSF(D) は等速度の動きやスリット幅等の LSF に相当する.

LSF(F) のような非偶関数の線像強度分布を矩形波と Convolution 積分すると, その出力像の波形は歪みを生じるため, そのときの矩形波 MTF は, Fig (1) の(C) について山の maximum と谷の minimum を, それぞれ $i_{\max}(x)$, $i_{\min}(x)$ として求めた.

矩形波 MTF から正弦波 MTF への補正には Coltman の式を用いた. Coltman の式は, 正弦波 MTF を $H(\omega)$,

Table 1.

項 数	K	Kの素因数	素数の個数	異なる素数の個数	$(-1)^m$	$(-1)^{(K-1)/2}$	B_K	
							$r=m$	$r<m$
n	2n-1		m	r			$(-1)^m \cdot (-1)^{(K-1)/2}$	0
1	1	1	0	0	+ 1	+ 1	+ 1	
2	3	3	1	1	- 1	- 1	+ 1	
3	5	5	1	1	- 1	+ 1	- 1	
4	7	7	1	1	- 1	- 1	+ 1	
5	9	3・3	2	1	+ 1	+ 1		0
6	11	11	1	1	- 1	- 1	+ 1	
7	13	13	1	1	- 1	+ 1	- 1	
8	15	3・5	2	2	+ 1	- 1	- 1	
9	17	17	1	1	- 1	+ 1	- 1	
10	19	19	1	1	- 1	- 1	+ 1	
11	21	3・7	2	2	+ 1	+ 1	+ 1	
12	23	23	1	1	- 1	- 1	+ 1	
13	25	5・5	2	1	+ 1	+ 1		0
14	27	3・3・3	3	1	- 1	- 1		0
15	29	29	1	1	- 1	+ 1	- 1	

矩形波 MTF を $S(\omega)$ とするならば

$$H(\omega) = \frac{\pi}{4} \left[S(\omega) + \frac{S(3\omega)}{3} - \frac{S(5\omega)}{5} + \frac{S(7\omega)}{7} - 0 + \frac{S(11\omega)}{11} - \frac{S(13\omega)}{13} - \frac{S(15\omega)}{15} - \frac{S(17\omega)}{17} + B_K \frac{S(K\omega)}{K} \dots \right]$$

ただし, $r=m$ ならば $B_K = (-1)^m \cdot (-1)^{(K-1)/2}$

$r < m$ ならば $B_K = 0$

として表される⁵⁾. なお, m は k を素因数に分解したときの素数の総個数, r は分解したときの異なる素数の個数である. 項数を n とするならば一般項の K と B_k の関係は Table 1 の如く説明される.

2. 算出結果

Fig. 4, 6, 8, 10, 12, 14 は, Fig. 3 の各線像強度分布をそれぞれ Fourier 変換, 或は Convolution 積分して求めた MTF である. 実線は正弦波 MTF を, 破線は矩

Fig. 4. Comparison of rectangular wave's response $S(\omega)$ and sine wave's response $H(\omega)$ of LSF(A).

Fig. 5. Relation of terms and corrected value calculated by coltman's formula of figure(4).

Fig. 6. Comparison of rectangular wave's response $S(\omega)$ and sine wave's response $H(\omega)$ of LSF(B).

Fig. 7. Relation of terms and corrected value calculated by coltman's formula of figure(6).

Fig. 8. Comparison of rectangular wave's response $S(\omega)$ and sine wave's response $H(\omega)$ of LSF(C).

矩形波 MTF と Coltman 補正の検討 (水野・高田)

Fig. 9. Relation of terms and corrected value calculated by coltman's formula of figure(8).

Fig. 10. Comparison of rectangular wave's response $S(\omega)$ and sine wave's response $H(\omega)$ of LSF(1).

Fig. 11. Relation of terms and corrected value calculated by coltman's formula of figure (10).

Fig. 12. Comparison of rectangular wave's response $S(\omega)$ and sine wave's response $H(\omega)$ of LSF(E).

Fig. 13. Relation of terms and corrected value calculated by coltman's formula of figure(12).

Fig. 14. Comparison of rectangular wave's response $S(\omega)$ and sine wave's response $H(\omega)$ LSF(F).

形波 MTF をそれぞれ示す。

Fig. 5, 7, 9, 11, 13 は, Fig. 4, 6, 8, 10, 12 について, 各周波数毎の矩形波 MTF をそれぞれ Coltman 補正した場合の補正項数と補正值の関係を示す。横軸の $S(\omega)$ は矩形波 MTF, 1 乃至 10 の数は Coltman の補正項数, $H(\omega)$ は正弦波 MTF である。なお, これらの計算はプログラム電卓 (YHP-97) を用いて行った。

3. 考 察

Fig. 3 の各 LSF について MTF を求めた結果, 偽解像は LSF(A), (B) には見られないが, LSF(C) には僅かに現れ, LSF(D), (E), (F) には大きく現れている。LSF(D) の矩形波 MTF は, 第 1 解像点以後の絶対値の最高点で滑らかに移行せず尖状点を有し, 従来の文献^{6), 7)}と異った結果が得られた。

各 LSF について矩形波 MTF と正弦波 MTF を比較してみるとかなりの差があり, これらの混同を避けるため, 矩形波 MTF にはその旨を明記すべきであろう。

線像強度分布が偶関数の被測定系に限り, その矩形波 MTF は, Coltman の式を用いて無限に補正するならば, 正弦波 MTF と一致することは当然である。しかし, 無限に補正するということは技術的に困難であるため, 実用上何項まで補正すればよいかと言うことがよく問題となる。ここでは 2 乃至 10 項までの補正結果について図示した。

Fig. 4, 6 のように偽解像が無いが, 或は, 有っても Fig. 8 のように僅かな場合には, 補正を無視できる限界項数は容易に見極められる。しかし, Fig. 10, 12 の如く大きな偽解像を有する系については, 矩形波チャート

を用いて高周波領域まで正確な MTF を求めることは難しく, 従って, 正弦波 MTF への正確な補正も望めない。

また, Fig. 14 の如く位相を有する系 (LSF が非偶関数のとき) については Coltman の式は摘要できない⁶⁾。従って, 偽解像や位相を有する系における MTF の測定には Fourier 変換法が有利であろう。

む す び

以上の結果は, 飽くまでも仮定上の論理に過ぎないが, 正弦波 MTF と矩形波 MTF との基本的な差, 並びに, Coltman の式について, 項数とその補正状況の関係を概略的に知ることができた。

稿を終るにあたり御校閲を戴いた, 当院の丸山武保院長に深謝致します。

文 献

- 1) 久保田広監: 写真レンズとレスポンス関数, 99, (1961).
- 2) 加地, 土井: レスポンス関数による増感紙および螢光板の性能評価, 極光, 20, 7, (1966).
- 3) 久保田広監: 写真レンズとレスポンス関数9.
- 4) 久保田, 浮田, 会田編: 光学技術ハンドブック, 153, (1975).
- 5) J. W. Coltman: J, Opt, Soc, Am, 44, 468, (1954).
- 6) 久保田, 浮田, 会田編: 光学技術ハンドブック, 260.
- 7) 津田元久: 日放技学誌, 33, 516, (1977).