 討 論

スペクトル S/N 比を用いた検出能による総合画像評価の 理論, および増感紙系への応用の論文に関する補遺

国立循環器病センター放射線診療部

若 松 孝 司

Key words: Detectivity, Spectral signal-to-noise ratio, Number of noise-equivalent quanta (NEQ(U)), Matrix, Radiographic screen-film system

THE SUPPLEMENT FOR THESES OF THE TOTAL EVALUATION THEORY OF IMAGE QUALITY BY THE DETECTIVITY DERIVED FROM THE SPECTRAL SIGNAL-TO-NOISE RATIO AND IT'S APPLICATIONS TO RADIOGRAPHIC SCREEN-FILM SYSTEMS

TAKASHI WAKAMATSU

Department of Radiology, National Cardiovascular Center

1. 緒 言

第1論文「スペクトル S/N 比を用いた検出能による総合画像評価の理論」(日放技誌・第39巻・6号)¹⁾, および第2論文「スペクトル S/N 比を用いた検出能による総合画像評価の増感紙系への応用」(日放技誌・第40巻・1号)²⁾において, 行列論の展開やビーズ玉に関する被写体スペクトルの公式の導入等を行ったが, 与えられた紙数に限度があり, 数式の展開や説明に若干の不足があるものと考え, 討論の場を補遺のため借用して報告を行う。

2. 方 法

第1論文において, 2値信号, および雑音の行列を次のように定義した。

2値信号ベクトル

$$S_i = [S_{i1}, S_{i2}, S_{i3}, \dots, S_{im}]^T, i=0, 1$$

雑音ベクトル

$$N = [n_1, n_2, n_3, \dots, n_m]^T$$

雑音の平均ベクトル

$$\bar{N} = [0, 0, 0, \dots, 0]^T$$

出力ゲクトル

$$Y = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_m]^T$$

雑音の共分散行列

$$\phi_{nn} = \overline{NN^T}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{n_1 n_1} & \overline{n_1 n_2} & \dots & \overline{n_1 n_m} \\ \overline{n_2 n_1} & \overline{n_2 n_2} & \dots & \overline{n_2 n_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{n_m n_1} & \overline{n_m n_2} & \dots & \overline{n_m n_m} \end{pmatrix}$$

円柱波形 $s_0(x)$ の信号ベクトルを S_0 , ビーズ玉波形 $s_1(x)$ の信号ベクトルを S_1 とし, 記号一を平均値, T は転置記号, そして -1 は逆行列の記号とした。

S_i , N , $\bar{N}$, そして Y は列ベクトルであり, S_i^T , N^T , 等は行ベクトルを表わすことになる。雑音の共分散行列 ϕ_{nn} に注目すると Fig. 1 より, ϕ_{nn} は, 対称行列であり, 逆行列 ϕ_{nn}^{-1} を有することを前提としているから ϕ_{nn}

スペクトル S/N 比を用いた検出能による総合画像評価の理論・および増感紙系への応用の論文に関する補遺 (若松)

Fig. 1. Mutual relations of matrix elements of the variance and covariance matrix of noise.

は正則行列でもある。

規則 1) 雑音の共分散行列は、正則対称行列である。

$$\phi_{nn}\phi_{nn}^{-1} = \mathbf{E} \quad (\mathbf{E} \text{ は単位行列})$$

$$n_i n_j = n_j n_i \quad (i, j = 1 \sim m \text{ の整数})$$

2.1 多変量正規確率密度関数 (第 1 論文, (2.2), (2.3) 式) について

例えば、出力 $\mathbf{Y}$ を受けたとき、これがビーズ玉の信号 $\mathbf{S}_1$ である、条件付確率密度関数、 $p(\mathbf{Y}|\mathbf{S}_1)$ は次式となる。

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}|\mathbf{S}_1) &= p(y_1, y_2, y_3, \dots, y_m | S_{11}, S_{12}, S_{13}, \dots, S_{1m}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\phi_{nn}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{M_{ij}}{|\phi_{nn}|} (y_i - S_{1i})(y_j - S_{1j}) \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\phi_{nn}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \mathbf{S}_1)^T \phi_{nn}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{S}_1) \right] \end{aligned}$$

但し、 M_{ij} は $|\phi_{nn}|$ の余因数

したがってベクトル積 $(\mathbf{Y} - \mathbf{S}_1)^T \phi_{nn}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{S}_1)$ の形は、

$$* \quad \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11}P_{11}, & P_{11}P_{12}, & P_{11}P_{13}, & \dots, & P_{11}P_{1m} \\ P_{11}P_{12}, & P_{12}P_{12} + P_{22}P_{22}, & P_{12}P_{13} + P_{22}P_{23}, & \dots, & P_{12}P_{1m} + P_{22}P_{2m} \\ P_{11}P_{13}, & P_{12}P_{13} + P_{22}P_{23}, & P_{13}P_{13} + P_{23}P_{23} + P_{33}P_{33}, & \dots, & P_{13}P_{1m} + P_{23}P_{2m} + P_{33}P_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{11}P_{1m}, & P_{12}P_{1m} + P_{22}P_{2m}, & P_{13}P_{1m} + P_{23}P_{2m} + P_{33}P_{3m}, & \dots, & P_{1m}P_{1m} + P_{2m}P_{2m} + \dots + P_{mm}P_{mm} \end{pmatrix}$$

$$** \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{P}|} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2m} \\ 0 & P_{33} & \dots & P_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{mm} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1m} \\ 0 & P_{33} & \dots & P_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{mm} \end{vmatrix} & \dots & (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1m} \\ P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{m-1m} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{1+m} \begin{vmatrix} 0 & P_{22} & \dots & P_{2m-1} \\ 0 & 0 & \dots & P_{3m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+m} \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m-1} \\ 0 & 0 & \dots & P_{3m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} & \dots & (-1)^{m+m} \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m-1} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{m-1m-1} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

2 次形式である。

2.2 共分散行列 ϕ_{nn} の逆行列 ϕ_{nn}^{-1} が三角行列とその転置行列の積 (第 1 論文, (2.15) 式) で表わされることについて

規則 2) 正則対称行列は、上三角行列とその転置行列との積で表わされる。

規則 1) によって ϕ_{nn} は、正則対称であるので、規則 2) によって $\phi_{nn} = \mathbf{P}^T \mathbf{P}$, ($\mathbf{P}$ は上三角行列) とできる。

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11}, & P_{12}, & P_{13}, & \dots, & P_{1m} \\ 0, & P_{22}, & P_{23}, & \dots, & P_{2m} \\ 0, & 0, & P_{33}, & \dots, & P_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & P_{mm} \end{pmatrix}, \text{ 上三角行列とする.}$$

*

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^j P_{kj} P_{ki}, \quad P_{ji} = \sum_{k=1}^i P_{ki} P_{kj}$$

したがって $P_{ij} = P_{ji}$ となり $\mathbf{P}^T \mathbf{P}$ は対称行列である。

また $|\mathbf{P}| \neq 0$, $|\mathbf{P}^T| \neq 0$, $\mathbf{P}^T \mathbf{P}$ は正則である。 ϕ_{nn} の要素と $\mathbf{P}^T \mathbf{P}$ の要素との対応によって P_{ij} の実現も可能である。 P_{ij} は $\mathbf{P}^T \mathbf{P}$ の要素

例えば $P_{11} = \sqrt{n_1 n_1}$, $P_{12} = n_{12} / \sqrt{n_1 n_1}$, $\dots$, $P_{1m} = n_{1m} / \sqrt{n_1 n_1}$ として順次 P_{ij} は求まる。

規則 3) $\phi_{nn}^{-1} = (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} = \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{P}^T)^{-1}$, すなわち、2 個の正則行列の積の逆行列は、個々の逆行列の交換した積で表わされる。

規則 4) 三角行列の逆行列は三角行列である。

**

今、 $\mathbf{P}^{-1}$ の要素を P_{ij}^{-1} とすると、 P_{ij}^{-1} は、 $\mathbf{P}$ の余因数 R_{ji} を用いて次式となる。

$$\begin{array}{c}
 *** \\
 P_{ij}^{-1} = \frac{R_{ji}}{|\mathbf{P}|} = \frac{(-1)^{j+i}}{|\mathbf{P}|} \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1j-1} & P_{1j} & \dots & P_{1i-1} & P_{1i+1} & \dots & P_{1m} \\ 0 & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2j-1} & P_{2j} & \dots & P_{2i-1} & P_{2i+1} & \dots & P_{2m} \\ 0 & 0 & P_{33} & \dots & P_{3j-1} & P_{3j} & \dots & P_{3i-1} & P_{3i+1} & \dots & P_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{j-1j-1} & P_{j-1j} & \dots & P_{j-1i-1} & P_{j-1i+1} & \dots & P_{j-1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & P_{j+1j} & P_{j+1i} & \dots & P_{j+1i+1} & \dots & P_{j+1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & P_{mm} \end{vmatrix}
 \end{array}$$

すなわち、 P_{ij} は $\mathbf{P}$ の j 行と i 列を欠いた、 $(m-1, m-1)$ の正方行列式であるから、 $i > j$ ならば、主対角線上の要素 P_{jj} の位置に $j+1$ 行の 0 が置換して、 R_{ji} の主対角線上に少なくとも 0 が 1 個以上存在することになる。したがって $i > j$ の条件のもとで、 $P_{ij} = 0$ となる。これは $\mathbf{P}^{-1}$ が三角行列であることの証明である。

同様にして $(P^T)^{-1}$ も三角行列であることが証明できる. $(P^T)^{-1}$ は P^{-1} の転置行列である.

したがって“共分散行列の逆行列は，三角行列とその転置行列との積で表わされる”。

$$\phi_{nn}^{-1} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} \quad (\mathbf{G} \text{ は三角行列})$$

2.3 統計量 $V = Y^T \phi_{nn}^{-1} (S_1 - S_0) - b$ ($i=0, 1$) の平均値 $\bar{V}$ と分散 $\text{Var } V$ (第1論文 (2.9), (2.10), (2.11)式) について

$$\begin{aligned}\bar{V}_i &= \overline{Y^T \phi_{nn}^{-1}(S_1 - S_0) - b} \quad (i=0, 1) \\ &= \overline{(S_i + N)^T \phi_{nn}^{-1}(S_1 - S_0) - b} \\ &= (S_i^T + \bar{N}^T) \phi_{nn}^{-1}(S_1 - S_0) - b \quad \dots\dots\dots (2.9) \\ &= \begin{cases} S_1^T \phi_{nn}^{-1} S_1 - S_1^T \phi_{nn}^{-1} S_0 - b, & i=1 \\ S_0^T \phi_{nn}^{-1} S_1 - S_0^T \phi_{nn}^{-1} S_0 - b, & i=0 \end{cases}\end{aligned}$$

ここで $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_0, \phi_{nn}^{-1}$ は, 確定ベクトルであり, $\overline{N^T}$ は 0 ベクトルであることが説明として必要である.

分散 $\text{Var } V$ は、雑音のみに依存するので $\mathbf{Y}=\mathbf{N}$ として求めればよい.

$$\begin{aligned}\text{Var } V &= \text{Var } \mathbf{Y}^T \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0) \\ &= \overline{N^T \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0) N^T \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)} \\ &= \overline{[N^T \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)]^T N^T \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)} \\ &= \overline{(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)^T (N^T \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1})^T N^T \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)} \\ &= \overline{(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)^T (N N^T \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1})^T \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)} \\ &= \overline{(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)^T (\boldsymbol{\phi}_{nn} \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1}) \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)} \\ &= \overline{(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)^T \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)} \quad \dots\dots\dots (2.10)\end{aligned}$$

ここで $\phi_{nn} = NN^T$ と公式として, $(A^T)^T = A$, $(AB)^T = B^T A^T$, および, 2 次形式では $Y^T \phi_{nn}^{-1} S_i = [Y^T \phi_{nn}^{-1} S_i]^T$ であることを用いている.

(2.9), および (2.10) 式において S_0 を 0 ベクトルとすると, ビーズ玉だけの信号が呈示された場合になる.

$$\bar{V} = S_1^T \phi_{nn}^{-1} S_1 - b \quad \text{または,} \quad -b$$

$$\text{Var } V = \mathbf{S}_1^T \boldsymbol{\phi}_{nn}^{-1} \mathbf{S}_1 \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

2.4 $S_1^T \phi_{nn}^{-1} S_1$ (第1論文(2.17)式) について

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1^T \phi_{nn}^{-1} \mathbf{S}_1 &= (\mathbf{G}\mathbf{S}_1)^T (\mathbf{G}\mathbf{S}_1) \\ &= [(G\mathbf{S}_1)_1^2 + (G\mathbf{S}_1)_2^2 + \dots + (G\mathbf{S}_1)_m^2] \\ &= \sum_{j=1}^m (G\mathbf{S}_1)_j^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_1(u)^2}{W(u)} du \quad \dots\dots\dots (2.17) \end{aligned}$$

ϕ_{nn}^{-1} は、三角行列とその転置行列との積で表わされる。したがって $\mathbf{G}$ は信号ベクトルに対する作用ベクトルとなる。第 1 論文では、これを周波数領域で考察して $\mathbf{G}$ に対応するフィルタ関数（白色化雑音フィルタ）として、 $G(u) = W(u)^{-1/2}$ を導出している。これが、第 1 論文のポイントである。 $G(u)$ の逆フーリエ変換を $g(x)$ とすれば、これは、信号 $s_1(x)$ に対する作用関数となる。 $g(x)$ と $s_1(x)$ のコンボリューションの 2 乗の積分は、出力信号の空間領域におけるパワー表示になり、これは、信号ベクトルのパワーに等しい。パーセバルの等式によって信号パワーは、空間領域と周波数領域で結合されているので、したがって (2.17) 式が得られる。

2.5 第2論文におけるビーズ玉のスペクトルに関するハンケル変換群の一般公式の導出について

Fig. 2 のように, ビーズ状の厚さ分布 $t(r)$ は表わされ, 微少濃度分布におけるビーズ玉のスペクトルは, ハンケル変換で表わされる.

$$S(u) = (\log_{10} e) g k \mu 2 \pi \int_0^a 2 \sqrt{a^2 - r^2} J_0(2 \pi u r) r dr \dots\dots\dots (2.1.11)$$

において

$$r=a \sin \theta \quad (0 \leq r \leq a)$$

の変数変換を行うと次式が得られる.

Fig. 2.
Thickness distribution
of a bead.

スペクトル S/N 比を用いた検出能による総合画像評価の理論・および増感紙系への応用の論文に関する補遺 (若松)

$$4\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta J_0(2\pi a u \sin \theta) d\theta \cdots \cdots (2.1.12)$$

$$(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta J_0(2\pi a u \sin \theta) d\theta \text{ の一般形を考える.}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{\nu+1} \theta \cos^{\lambda+1} \theta J_\nu(b \sin \theta) d\theta \cdots \cdots (2.5.1)$$

したがって(2.1.12) 式は, (2.5.1) 式において $\nu=0$, $\lambda=1$, $b=2\pi a u$ とおけばよいことになる. J_ν は, 第1種 ν 階のベッセル関数で級数表示で次式となる.

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \cdots \cdots (2.5.2)$$

したがって (2.5.1) 式は, 次式となる.

$$z = b \sin \theta \text{ において}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^{\nu+1} \theta \cos^{\lambda+1} \theta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2n} \\ &\quad \times \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \sin^{2n+\nu} \theta d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2n} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+2\nu+1} \theta \cos^{\lambda+1} \theta d\theta \\ &\cdots \cdots (2.5.3) \end{aligned}$$

ところで,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} \theta \cos^{\beta-1} \theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

($B(p, q)$ はベータ関数, $\Gamma(p)$ は, ガンマ関数), であるので, $(2n+2\nu+2)-1=\alpha-1$, $(\lambda+2)-1=\beta-1$ とし て I は, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2n} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right) \Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{\lambda}{2}+1+n+1\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2n} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}{2} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma\left(\nu+\frac{\lambda}{2}+1+n+1\right)} \\ &= 2^{\lambda/2} b^{-(\lambda/2+1)} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+(\lambda/2)+1} \\ &\quad \times \frac{(-1)^n}{n! \Gamma\left(\nu+\frac{\lambda}{2}+1+n+1\right)} \left(\frac{b}{2}\right)^{2n} \end{aligned}$$

(2.5.2) 式で $\nu=\nu+\lambda/2+1$ をおけば, I は次式となる.

$$I = 2^{\lambda/2} b^{-(\lambda/2+1)} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right) J_{\nu+(\lambda/2)+1}(b) \cdots (2.5.4)$$

(2.5.4) 式が第2論文で用いられた(2.1.13)の公式である.

ビーズ玉の厚さ分布のスペクトルは, 次式(第2論文の(2.1.14))である.

$$2a \sqrt{a} \frac{J_{3/2}(2\pi a u)}{2u^{3/2}} \cdots \cdots (2.1.14)$$

$J_{3/2}(z)$ は, 階数が半奇数次($n+1/2$)になっているもので球ベッセル関数である.

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right) \cdots \cdots (2.5.5)$$

したがって(2.1.14) 式は, 次式となる.

$$\begin{aligned} 2a \sqrt{a} \frac{J_{3/2}(2\pi a u)}{2u^{3/2}} &= \frac{a}{\pi u^2} \left(\frac{\sin 2\pi a u}{2\pi a u} - \cos 2\pi a u \right) \\ &= \frac{\sin 2\pi a u - 2\pi a u \cos 2\pi a u}{2\pi^2 u^3} \cdots \cdots (2.5.6) \end{aligned}$$

(2.5.6) の $u=0$ の値, すなわち, ビーズ玉の厚さ分布のスペクトルの周波数0の値が問題である. これを求めるのは, (2.5.6) 式で, $u \rightarrow 0$ の極限を求めれば良い. このための方法は, (2.5.6) 式の分母, 分子を独立に3回微分して, $u \rightarrow 0$ とおけば極限が求まる.

$$\text{分母}''' = 12\pi^2$$

$$\text{分子}''' = 16\pi^3 a^3 \cos 2\pi a u - 16\pi^4 a^4 u \sin 2\pi a u$$

$$\text{分子}''' = 16\pi^3 a^3 \quad (u \rightarrow 0)$$

したがって, $u \rightarrow 0$ のとき, (2.5.6) 式は, $16\pi^3 a^3 / 12\pi^2 = 4/3 \pi a^3$ となって, これはビーズ玉の体積に相当する.

一方, 被写体の1次元スペクトルは, 被写体の断面を1次元に積分投影したもののフーリエ変換によっても求めることができる.

断面を1次元に積分投影したものの分布を $f(x)$ とすると, $f(x)$ は次式で与えられる.

$$f(x) = \pi(\sqrt{a^2 - x^2})^2 = \pi(a^2 - x^2) \cdots \cdots (2.5.7)$$

$$\text{但し, } -a \leq x \leq a$$

$f(x)$ は, ビーズ玉の場合, 偶関数である. したがって $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} F(u) &= 2 \int_0^a f(x) \cos 2\pi u x dx \\ &= 2\pi \int_0^a (a^2 - x^2) \cos 2\pi u x dx \\ &= \frac{\sin 2\pi a u - 2\pi a u \cos 2\pi a u}{2\pi^2 u^3} \cdots \cdots (2.5.8) \end{aligned}$$

(2.5.6) 式と (2.5.8) 式は, 相等しい.

したがって, ハンケル変換から求めた, ビーズ玉のスペクトルの式が正しいことと同じく, (2.5.4) の一般公式が正しいことの裏付けともなっている.

2.6 被写体のパワースペクトルについて

検出能を求めるとき, 雑音のウィナースペクトルと被写体スペクトルの2乗, すなわち被写体のパワースペクトルとの比が重要である. 被写体のパワースペクトルを

求めるのに、被写体のスペクトル関数の係数も含めて2乗してよいのか、迷うものである。被写体のパワースペクトルが正確なのかどうかは、パーセバルの等式が成立するかどうかで検証を行えばよい。パーセバルの等式は、信号の空間領域でのエネルギーと、周波数領域でのエネルギーが等しいことを物理的な意味としている。

ビーズ玉の被写体信号を例にとる。空間領域でのエネルギーに相当するものは、厚さ分布の2乗の積分である。したがって Fig. 2 の $t(r)$ にもどって次式となる。

$$2\pi \int_0^a t(r)^2 r dr = 2\pi \int_0^a (2\sqrt{a^2 - r^2})^2 r dr \\ = 2\pi a^4 \quad \dots\dots\dots(2.6.1)$$

周波数領域では、(2.1.14) 式、または (2.5.6) 式の2乗を空間周波数 u について $0 \sim \infty$ cycles/mm まで積分を行わなければならない。ところが (2.5.6) 式では、次式のようになる。等方性2次元であることより、

$$2\pi \int_0^\infty \left(\frac{\sin 2\pi au - 2\pi au \cos 2\pi au}{2\pi^2 u^3} \right)^2 u du \\ \dots\dots\dots(2.6.2)$$

(2.6.2) の積分を求めるのは大変である。したがって、このような場合に備えて、ベッセル関数が存在する理由の一つでもあると考えられる。(2.1.14)の球ベッセル関数を用いると次式が得られる。

$$2\pi \int_0^\infty \left\{ 2a\sqrt{a} \frac{J_{3/2}(2\pi au)}{2u^{3/2}} \right\}^2 u du \\ = 2\pi a^3 \int_0^\infty u^{-2} \{J_{3/2}(2\pi au)\}^2 du \quad \dots\dots\dots(2.6.3)$$

ベッセル関数の積分については、公式の導出が容易である。次の公式が適用できる。

$$\int_0^\infty z^{-\lambda} J_\mu(bz) J_\nu(bz) dz \\ = \frac{b^{\lambda-1} \Gamma(\lambda) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}\right)}{2^\lambda \Gamma\left(\frac{\lambda+\mu-\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda-\mu+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu+1}{2}\right)} \\ \dots\dots\dots(2.6.4)$$

但し、 $b > 0$, Real $\lambda > 0$, Real $(\mu + \nu - \lambda) > -1$

(2.6.3) 式を対比して $\lambda = 2$, $\mu = \nu = 3/2$, $b = 2\pi a$, $z = u$ とおくと (2.6.3) 式は、次式となる。

$$\frac{2\pi a^3 (2\pi a) \Gamma(2) \Gamma(1)}{2^2 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(3)} = \frac{\pi^2 a^4 \cdot 1 \cdot 1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2} \\ = 2\pi a^4 \quad \dots\dots\dots(2.6.5)$$

(2.6.1) と (2.6.5) は等しくなると、パーセバルの等式が成立することが証明された。したがって、被写体のパワースペクトルは、被写体のスペクトル関数の係数を含

Fig. 3. On Receiver Operating Characteristics (ROC) curves coordinates, relations of Detectivity d' , Entropy $I_{\max}$ and Area under ROC curve.

めて2乗して求めればよい。

2.7 ROC曲線における検出能 d' 、曲線下の面積、最大伝達情報量 $I_{\max}$ および伝達効率

Fig. 3 は、ROC 曲線座標で右下りの対角線における点の検出能 d' と、これに対する ROC 曲線下の面積、最大伝達情報量 $I_{\max}$ との換算関係を示している。 $I_{\max}$ の最大は 1 bit であるので、 $I_{\max}$ そのものが割合となり、これを % で表示すると伝達効率になる。横軸は、偽陽性確率 $P(S|n)$ である。

3. 結 果

第1論文中、重要な意味をもつ、共分散行列の逆行列が、三角行列と、その転置行列との積で表わされることの証明ができた。また、第2論文中に用いられている、ビーズ玉の被写体スペクトル、および被写体パワースペクトルの数式の正確さと、その数式のもつ意味が明らかになった。その他、付随するベクトルの展開過程での種々の公式の導入と、説明が行なえたこと、またビーズ玉のスペクトルを求める過程では、ハンケル変換に関する一般公式の導出も行ない得た。

4. 考 察

第1論文の応用である第2論文によって、永年の懸案であったビーズ玉のX線像の検出能は、感度が同じ増感紙フィルム系において、MTF よりも粒状性の良い方が高いことの機構と証明が物理量をもとにして評価できるようになった。針のエッジの鮮鋭さは、結局、エッジ論に置きかえられるものと考えられる。エッジ像の立ち上りの最大傾斜が MTF の面積に相当することから、NEQ(u) の面積で評価することによって、一応の説明がつけられ、いわゆる増感紙フィルムシステムがもつ、

スペクトル S/N 比を用いた検出能による総合画像評価の理論・および増感紙系への応用の論文に関する補遺 (若松)

画質の二重性の解明ができるようになった。しかし、エッジについては、物理的な量、すなわち、 $NEQ(u)$ の面積の平方根において、 $Par+RP/R$ のシステムと $TF-2+RP$ システムの間の差が、心理的な感じの差に比較して小さいと言う事実に注目しなければならない。このことが、人の視覚の内部雑音と視覚の MTF によって引き起されたものなのか。 $NEQ(u)$ の面積、すなわち積分を等方性 2 次元にまで拡張して考える方が良いのか、さらに雑音と信号の定常、非定常のとり扱いに起因するものなのか等の議論が必要であるかも知れないことを考察するとともに、画像論の視点を、ビーズ玉からエッジ論に向ける必要があることを画像論の歴史的な循環として強調しておく。

なお、 $NEQ(u)$ は、リニアな関係で許容される濃度範囲での使用と言うことを念頭に置いておかなければならない。したがって、特性曲線の露光量を E とすれば、 $NEQ(u) \cdot (4 \log_{10} E)^2$ が最終的に許される比較の量なのである。

$NEQ(u)$ そのものが使用されるのは、以上のことを考慮に入れて相対比較としてである。特性曲線上において、階調も、ウィナースペクトルも露光軸、 $\log_{10} E$ の関数である。すなわち、 $g(\log_{10} E)$ 、および $W(u, \log_{10} E)$ と表示されるべきものである。しかも現時点では、雑音のウィナースペクトルも、特性曲線上の 1 点でしか求められていない。したがって、大幅な濃度域で画像論を論ずる時期に至っていないことが、周波数解析的な画像論での現状認識である。それができるのは、特性曲線上の各濃度における粒状雑音のウィナースペクトルが測定できてからであると考えられる。ところが情報量スペクトル³⁾による方法は Fig. 4 のように、特性曲線の dynamic range の中心点を D_{mean} として、この濃度における粒状雑音のウィナースペクトル $n(u)$ をもって全ての濃度

のウィナースペクトルを代表させてしまっている。しかも、情報量と言うことから、信号は、確定信号でなく、濃度の dynamic range ($D_{max}-D_{min}$) にまたがってガウス分布するランダム信号である。ランダム信号のウィナースペクトルを $p(u)$ として情報量スペクトル $I(u)$ を次式で規定している。但し u は空間周波数。

$$I(u) = \log_2 \sqrt{1 + p(u)/n(u)} \quad \dots\dots\dots ①$$

ランダム信号の標準偏差 σ_p は、次式で与えられている。

$$\sigma_p = (D_{max} - D_{min})/6 \quad \dots\dots\dots ②$$

分散 σ_p^2 と信号のウィナースペクトル $p(u)$ との関係は次式で与えられている。

$$\sigma_p^2 = 2\pi \int_0^\infty p(u) u du = 2\pi p(0) \int_0^\infty (MTF)^2 u du \quad \dots\dots\dots ③$$

$$p(0) = \sigma_p^2 / S \quad \dots\dots\dots ④$$

$$S = 2\pi \int_0^\infty u (MTF)^2 du \quad \dots\dots\dots ⑤$$

ところで、 $p(u)$ の式は、論文で与えられていないで、言葉で $p(u)$ は全 MTF の 2 乗に比例すると述べられているが、重要なのは $p(u)$ は、②、③、④、⑤式よりまとめると次式となる。

$$p(u) = \frac{\{(D_{max} - D_{min})/6\}^2}{2\pi \int_0^\infty u (MTF)^2 du} MTF^2 \quad \dots\dots\dots ⑥$$

特性曲線を理想化したときのみ、⑥式は、 $D_{max} - D_{min} = r(\log_{10} H_{max} - \log_{10} H_{min})$ において次式となるものと考えられる。

$$p(u) = \frac{\{r(\log_{10} H_{max} - \log_{10} H_{min})/6\}^2}{2\pi \int_0^\infty u (MTF)^2 du} MTF^2 \quad \dots\dots\dots ⑦$$

⑦式は、あくまで⑥式をもとにした出力側の信号のウィナースペクトルである。

系の MTF と出力の濃度と線形関係を保つための入力側の仮想的な被写体を考えると、次の変換系がある。

$$H = H_0 e^{-z/\log_{10} e} \quad \dots\dots\dots ⑧$$

⑧式対数をとると次式となる。

$$\log_{10} H = \log_{10} H_0 - z \quad \dots\dots\dots ⑨$$

例えば、被写体の線吸収係数を μ 、被写体の厚さを t とすると、 $z = (\log_{10} e) \mu t$ 。この場合も被写体は理想的なものでなければならないが、とにかく出力濃度と線形関係の仮想的被写体は存在した。そして、このときのみ⑥式は、MTF との関係において意味をもつことになる。

仮想的被写体の信号のウィナースペクトルを $p_z(u)$ とすると系の入出力関係から、出力のウィナースペクトルは、 $p_z(u) r^2 MTF^2$ となる。これは、⑥式より⑦式に等

Fig. 4. A characteristic curve: the dynamic density-range, the film gamma (contrast factor), the latitude, and the standard deviation σ_p of the signal are shown, by H. Kanamori.

しくなければならない。したがって $p_z(u)$ は、次式となる。

$$p_z(u) = \frac{\{(\log_{10} H_{\max} - \log_{10} H_{\min})/6\}^2}{2\pi \int_0^\infty u(\text{MTF})^2 du} \quad \text{.....⑩}$$

ところで、⑨式より次式が与えられる。

$$\log_{10} H_{\max} - \log_{10} H_{\min} = z_2 - z_1 \quad \text{.....⑪}$$

⑪式を⑩式に代入すると次式が与えられる。

$$p_z(u) = \frac{\{(z_2 - z_1)/6\}^2}{2\pi \int_0^\infty u(\text{MTF})^2 du} \quad \text{.....⑫}$$

いま、フィルムを同じくして、MTF の異なる 2 種類の増感紙を使用した場合の比較を行うことにする。感度の違いは、⑧式における H_0 を変化さすだけであるから、入出力関係に影響しない。2 種類の増感紙の MTF を MTF_1 、および MTF_2 とする。フィルムは同じであるから $D_{\max} - D_{\min} = r(\log_{10} H_{\max} - \log_{10} H_{\min}) = r(z_2 - z_1)$ となって、これは固定されている。

したがって、増感紙系に対する入力側の仮想的被写体の信号のウィナースペクトルを $p_{1z}(u)$ 、 $p_{2z}(u)$ とすると次式が得られる。

$$p_{1z}(u) = \frac{\{(z_2 - z_1)/6\}^2}{2\pi \int_0^\infty u(\text{MTF}_1)^2 du} \quad \text{.....⑬}$$

$$p_{2z}(u) = \frac{\{(z_2 - z_1)/6\}^2}{2\pi \int_0^\infty u(\text{MTF}_2)^2 du} \quad \text{.....⑭}$$

明らかに、 $\text{MTF}_1 \neq \text{MTF}_2$ であるから $p_{1z}(u) \neq p_{2z}(u)$ である。これが、第14回の画像分科会で著者が指摘した、情報量スペクトルによる画像評価の欠点と思われる第1の部分である。すなわち、出力側だけで規定しているので分りにくい、濃度の dynamic range 一杯に情報を引き出すことを前提としているので、系の MTF による減衰量に見合うだけ、仮想的被写体の信号のウィナースペクトルを変化させているのである。画像評価の比較は、不確定信号にしても、確定信号にしても、入力側の信号のウィナースペクトル、または、パワースペクトルが決定されている。そして入力信号がどのように減衰するのか、それによって S/N 比がどのように変化するのかによって行われているし、行なわれるべきであろう。

⑥式を見ると、情報量スペクトルの著者自身が常に言っているように、出力側だけから導出しているため、管電圧の変化による、入力信号の減弱に相当する項や、散乱線による MTF の低下の項も入っていないし、入れられる余地もないのである。例えば、同じ増感紙フィルム

系で、コントラストの減弱因子 $\alpha \leq 1$ を⑥式に導入すると次式となる。

$$\alpha^2 p(u) = \frac{\{(D_{\max} - D_{\min})/6\}^2 \alpha^2}{2\pi \int_0^\infty u(\text{MTF})^2 du} \text{MTF}^2 \quad \text{.....⑮}$$

⑮式において、 $(D_{\max} - D_{\min})\alpha$ は、同一系の濃度の dynamic range が小さくなったことを意味する。このようなことは、現実には起り得ない。 $\alpha > 1$ の場合は、dynamic range が拡大したことを想定しなければならなくなり、おかしいことになる。

散乱線の写真効果によらず MTF は、直接線含有率⁴⁾であると言われている。したがって散乱線の MTF を $\beta \leq 1$ で空間周波数について一定とできる。 β を⑥式に代入する。

$$\begin{aligned} p(u) &= \frac{\{(D_{\max} - D_{\min})/6\}^2 \beta^2 \text{MTF}^2}{2\pi \int_0^\infty u \beta^2 (\text{MTF})^2 du} \\ &= \frac{\{(D_{\max} - D_{\min})/6\}^2}{2\pi \int_0^\infty u (\text{MTF})^2 du} \text{MTF}^2 \quad \text{.....⑯} \end{aligned}$$

⑯式は、⑥式と等しくなって散乱線による効果は、式の上で表わすことができない。すなわち、管電圧の変化によるコントラストの変化、および散乱線の影響による MTF の変化は、全くの入力側だけの出来事であるからであり、⑥式の出力側だけから規定した趣旨には一致する。

濃度の dynamic range を設定するにも、階調曲線において高濃度部を外挿して求めている。通常、特性曲線の肩部の高濃度部は、X線撮影系で使用しないのに、それをさらに外挿している。しかも⑥式を見れば、これが、dynamic range の中に線形量として入っている。肩部や足部は、ほとんど情報をもたないのが現実である。外挿された、dynamic range や、⑥式における、入出力関係から矛盾を含むと考えられる MTF の積分の項が $p(u)$ を変化させている。そして、最終的に情報量スペクトル曲線、例えば、 $\text{TF}_2 + \text{RP}$ および $\text{Par} + \text{RP}/R$ の場合の重要な交点の位置を決定しているのである。

以上、情報量スペクトルによる画像評価には、その他の疑問があるが、本来、情報容量スペクトルと呼ぶべきものである。すなわち、仮想的被写体のコントラストはどうであれ与えられた系にどれだけ多くの情報をネジ込めるか、出力側からでは、全く理想的な特性曲線を有する系を想定して、どれだけ多くの情報を導出できるかを問題にしているものと考えられる。したがって、個々の確定信号を云々するには大局的すぎるのではなかろうか。

スペクトル S/N 比を用いた検出能による総合画像評価の理論・および増感紙系への応用の論文に関する補遺 (若松)

これに比較して $NEQ(u)$ は、第1論文および第2論文によって、入出力と系の内部因子との関係を求める中で検出能に対して重要な要素となり、増感紙フィルム系がもつ特有の空間周波数についての関数であることが明らかになった。しかも、被写体のパワースペクトルとの積として表現できること、その上、先達によって考案された一般的な関数である。したがって一般的に、誰でも直ぐに利用できる関数であると考えられる。

5. 結 語

総合画像評価のために、 $NEQ(u)$ を用いるのは、放射線画像論の周波数解析的な立場から最も有用な方法である。 $NEQ(u)$ は、階調度、MTF、そして粒状雑音のウィナースペクトルによって構成されるものであるが、第4の量として放射線画像論の中で視点を置かれて論ぜられて行くべきである。したがって、特性曲線、MTF、そしてウィナースペクトルの物理量の精密な測定の必要性とその規格化、迅速性および多量性が重大な課題である。

最後に、 $S^T \phi_{nn}^{-1} S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(u)^2}{W(u)} du$ なる、著者が導出した式は、物理的な意味も含めて、数学上の一つの公式となることを強調しておく。現在、われわれの調査では、上式を導出した論文を見るに至っていない。したがって当分の間、上式を若松の関係式としておく。なお、ビー

ズ玉のスペクトルは、肺癌等の数学的なモデルとして使用できることを附記しておく。

画像論の発展のため $NEQ(u)$ については、多くの研究者たちによって論議されて行くべきものであるが、情報量スペクトルの著者らが、 $NEQ(u)$ は、実情に合わないと発表しているので、 $NEQ(u)$ に対する誤解が生じてはならないと考え、情報量スペクトルの方が、本質的な規定の中に多くの問題点を含んでいるのだと言う著者の見解を、あえて併記した。

文 献

- 1) 若松孝司, 山下一也: スペクトル S/N 比を用いた検出能による総合画像評価の理論, 日放技学誌, **39**(6), 891-898, (1983).
- 2) 若松孝司, 伊藤慎三, 今出川和世, 他: スペクトル S/N 比をもちいた. 検出能による総合画像評価の増感紙・フィルム系への応用, 日放技学誌, **40**(1), (1984).
- 3) 金森仁志, 松本政雄: 情報量スペクトルを用いた針とビーズのX線写真の画質評価, 日放技学誌, **39**(5), 594-601, (1983).
- 4) 土井邦雄: 被写体散乱線の写真効果のレスポンス関数による評価. 放射線像の研究(解析と評価), RII, **2**, 90-98, (1966-1968).