 原 著

放射線画像系における確率的行列論と周波数解析論との接点

国立循環器病センター放射線診療部

若 松 孝 司

(論文受理 1984年 1 月18日)

(最終論文受理 1984年 4 月20日)

(Code No. 21120)

Key words: Probability matrix, Frequency analysis, Spectral signal-to-noise ratio, Detectivity, Whitening noise filter.

THE JOINT BETWEEN PROBABILITY MATRIX AND FREQUENCY ANALYSIS THEORY FOR ESTIMATING THE IMAGE QUALITY OF A RADIOGRAPHIC IMAGING SYSTEM

TAKASHI WAKAMATSU

National Cardiovascular Center Department of Radiology

(Article received; Jan., 18, 1984.)

Summary

In this paper, an estimation was made of the image quality of the radiographic imaging system, the joint between probability matrix and frequency analysis theory was made clear with mediating the idea of the whitening noise filter.

The detectivity d' of the ideal detector is defined as,

$$\sqrt{\mathbf{S}_1^T \boldsymbol{\Phi}_{nn}^{-1} \mathbf{S}_1} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S_1(u)^2 / W(u) du}$$

Where $\mathbf{S}_1$ denotes the signal matrix, $\boldsymbol{\Phi}_{nn}^{-1}$ the variance and co-variance inverse matrix, $S(u)$, the signal spectrum and $W(u)$, the Wiener spectrum of noise.

The next formula used was,

$$\boldsymbol{\Phi}_{nn}^{-1} = \mathbf{G}^T \mathbf{G}$$

Where $\mathbf{G}$ is the triangular matrix of the whitening noise filter.

$\mathbf{G}$ corresponds to $\sqrt{W(u)^{-1}}$ and $\mathbf{G}\mathbf{S}_1$ to the convolution between the whitening noise filter function on the spatial area and the signal distribution.

Thus, $\boldsymbol{\Phi}_{nn}$ can be represented by a non singular and symmetric matrix whose normal diagonal elements are all same, and $\mathbf{G}$ can be represented by a triangular matrix whose normal diagonal elements are all same.

This proved that the noise process of the radiographic imaging system is a necessary ergodic.

1. 緒 言

放射線画像の画質の総合評価において、最も客観的な一つの方法は、人の視覚による ROC 曲線を求めることであった。その根底になるものは、心理物理学からの応用としての確率および統計の理論である。したがって、物理量をもとにした総合画像評価の理論を構築するに当たって、放射線画像論の中に確率および統計論の導入は必然的なものとなる¹⁾。しかも、確率および統計の理論の導入が、人の視覚による ROC 曲線の結果を説明できる可能性をもつばかりでなく、さらに従来の周波数解析の理論とも矛盾なく接合され得る形のものでなければならぬ¹⁾²⁾⁴⁾。

確率論の展開には、信号および雑音の空間領域でのデジタル化が必要であり、これはサンプリングの定理によって保証されている。

統計論の展開としては、デジタル化されたサンプル値をもとにした、多変量正規分布密度関数の信号および雑音の尤度比の対数方程式の解を求めるために行列論の導入が必要であり¹⁾、これは放射線画像系における雑音の空間的なエルゴード性⁵⁾によって保証され得るものである。

以上の観点から著者らは、信号ベクトルを S_1 とし、粒状雑音の共分散行列を Φ_{nn} とすると理想的検出器による検出能、すなわち系の S/N 比の最大値は、 $\sqrt{S_1^T \Phi_{nn}^{-1} S_1}$ であることを導出した。ところで、 $\Phi_{nn}^{-1} = G^T G$ (G は三角行列) となるので、 $S_1^T \Phi_{nn}^{-1} S_1 = (GS_1)^T (GS_1)$ と表わされるので、 G は白色化雑音フィルタの作用をもつ行列であることが判明した¹⁾。

放射線画像系では、粒状雑音のウィナースペクトル $W(u)$ が求められるので、空間周波数領域における白色化雑音フィルタは $W(u)^{-1/2}$ の形で表わされる。

したがって、

$$S_1^T \Phi_{nn}^{-1} S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_1(u)^2}{W(u)} du$$

なる関係式が導出された。この関係式は、さらに Matched フィルタ論によって保証されている。この稿で問題にすることは、既に G が三角行列であることの存在と証明がなされているので³⁾、 GS_1 が何を意味し、何に対応するのかを数学的な立場から直接的に明らかにする必要がある。これによって、行列論と周波数解析論の接点が明確になるものと考えられる。

2. 方 法

Fig. 1. a: Distribution function $g(x)$ on the spatial area.
b: Discretizing the distribution function $g(x)$ to the x axis.

Fig. 1a のように、距離 x に対する分布関数 $g(x)$ があり、系によって決められるナイキスト周波数に対応するサンプル間隔 Δx 、そして分布関数の継続する領域 L に対応するサンプル点数 m に離散化されたものを Fig. 1b とすると次式が得られる。

$$g(x) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} g(\alpha \Delta x) \frac{\sin((\pi/\Delta x)(x - \alpha \Delta x))}{(\pi/\Delta x)(x - \alpha \Delta x)} \dots\dots\dots (1)$$

(1)式において、 $g(\alpha \Delta x) = g(\alpha)$ と表示することにする。但し α は、 $0 \sim m-1$ の整数。

他の分布関数 $S_1(x)$ についても同様なことが言える。

$g(x)$ と $S_1(x)$ の重畳積分 $C(x)$ は次式によって与えられる。

$$C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-z) S_1(z) dz \dots\dots\dots (2)$$

(2)式に対応する離散関数 $C(\alpha)$ は次式によって表わされる。

$$C(\alpha) = \sum_{\beta=0}^{m-1} g(\alpha - \beta) S_1(\beta) \dots\dots\dots (3)$$

(3)式において、一つの α の値に対して、 β を 0 から $m-1$ まで変化さすことによって $C(\alpha)$ の全体の値が決定されることになる。

$\alpha=0$ のとき、

$\beta=0$ において、

$$\begin{cases} g(\alpha-\beta)=g(0) \\ S_1(\beta)=S_1(0) \end{cases}$$

$\beta=1$ において,

$$\begin{cases} g(\alpha-\beta)=g(-1)=0 \quad (\because \text{領域外}) \\ S_1(\beta)=S_1(1) \end{cases}$$

$\beta=2$ において,

$$\begin{cases} g(\alpha-\beta)=g(-2)=0 \\ S_1(\beta)=S_1(2) \end{cases}$$

$\vdots$

$\beta=m-1$ において,

$$\begin{cases} g(\alpha-\beta)=g(-m+1)=0 \\ S_1(\beta)=S_1(m-1) \end{cases}$$

したがって,

$$C(1)=g(0)S_1(0)+0 \cdot S_2(0)+\cdots+0 \cdot S_1(m-1)$$

$\alpha=1$ のとき.

$\beta=0$ において,

$$\begin{cases} g(\alpha-\beta)=g(1) \\ S_1(\beta)=S_1(0) \end{cases}$$

$\beta=1$ において,

$$\begin{cases} g(\alpha-\beta)=g(0) \\ S_1(\beta)=S_1(1) \end{cases}$$

$\beta=2$ において,

$$\begin{cases} g(\alpha-\beta)=g(-1)=0 \quad (\because \text{領域外}) \\ S_1(\beta)=S_1(2) \end{cases}$$

$\vdots$

$\beta=m-1$ において,

$$\begin{cases} g(\alpha-\beta)=g(-m)=0 \\ S_1(\beta)=S_1(m-1) \end{cases}$$

したがって,

$$C(2)=g(1)S_1(0)+g(0)S_1(1)+0 \cdot S_1(2) \\ +\cdots+0 \cdot S_1(m-1)$$

同様にして $C(\alpha)$ を順次求めて行くと,

$\alpha=m-1$ のとき.

$\beta=0$ において,

$$\begin{cases} g(\alpha-\beta)=g(m-1) \\ S_1(\beta)=S_1(0) \end{cases}$$

$\beta=1$ において,

$$\begin{cases} g(\alpha-\beta)=g(m-2) \\ S_1(\beta)=S_1(1) \end{cases}$$

$\beta=2$ において,

$$\begin{cases} g(\alpha-\beta)=g(m-3) \\ S_1(\beta)=S_1(2) \end{cases}$$

$\vdots$

$\beta=m-1$ において,

$$\begin{cases} g(\alpha-\beta)=g(0) \\ S_1(\beta)=S_1(m-1) \end{cases}$$

したがって,

$$C(m-1)=g(m-1)S_1(0)+g(m-2)S_1(1) \\ +g(m-3)S_1(2)+\cdots+g(0)S_1(m-1)$$

以上のことにより, 次のことが言える.

列ベクトル $\mathbf{C}$ および $\mathbf{S}_1$, そして $m \times m$ の正方行列 $\mathbf{G}$ を次のごとく定義する.

$$\mathbf{C}=[C(0), C(1), C(2), \cdots, C(m-1)]^T$$

$$\mathbf{S}_1=[S_1(0), S_1(1), S_1(2), \cdots, S_1(m-1)]^T$$

(但し T は転置記号)

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix} g(0), & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ g(1), & g(0), & 0 & \cdots & 0 \\ g(2), & g(1), & g(0), & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g(m-1), & g(m-2), & g(m-3), & \cdots & g(0) \end{pmatrix}$$

すなわち, (3)式の α, β の変化による, すべての値は, 次式によって与えられる.

$$\mathbf{C}=\mathbf{G}\mathbf{S}_1 \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

$\mathbf{G}$ は, 明らかに, 三角行列であり, 主対角線上の要素は $g(0)$ と相等しくなっている.

$g(x)$ を空間領域のシステム関数とし, $S_1(x)$ を信号の関数とすれば, $g(x)$ と $S_1(x)$ の重畳積分は, (2)式で表現され, これに対応する行列では主対角線上の要素を等しくする三角行列と信号ベクトルとの積で表わされる.

$\mathbf{G}\mathbf{S}_1$ の存在が空間領域の方から明らかになった.

行列論によれば次のことが定理として存在している.

定理: 主対角線上の要素が相等しい, 正則対称行列の逆行列は, 主対角線上の要素が相等しい, 三角行列と, その転置行列との積で表わされる.

粒状雑音の共分散行列 Φ_{nn} が, 次式によって表わされるものとする.

$$\Phi_{nn}=\begin{pmatrix} \overline{n_1 n_1}, & \overline{n_1 n_2}, & \overline{n_1 n_3}, & \cdots, & \overline{n_1 n_m} \\ \overline{n_2 n_1}, & \overline{n_2 n_2}, & \overline{n_2 n_3}, & \cdots, & \overline{n_2 n_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{n_m n_1}, & \overline{n_m n_2}, & \overline{n_m n_3}, & \cdots, & \overline{n_m n_m} \end{pmatrix}$$

ところで, Φ_{nn} の要素に注目すると, Fig. 2 のように, $\overline{n_i n_j}=\overline{n_j n_i}$ であり, 各サンプル点における粒状雑音のエルゴード性が, 放射線画像系において成立するものとして $\overline{n_i n_i}=\sigma^2$ と主対角線上の要素を相等しくできる. すると Φ_{nn} は, 主対角線上の要素が相等しい正則対称行列となるので, その逆行列 Φ_{nn}^{-1} は, 主対角線上の要素が相等しい, 三角行列 $\mathbf{G}$ とその転置行列との積で表わされる.

Fig. 2. Mutual relations of matrix elements of the variance and co-variance matrix of noise.

したがって、 $\Phi_{nn}^{-1} = G^T G$ となり、 G の作用は、有色雑音を白色化する白色化雑音フィルタとして働く。

すなわち、

$$S_1^T \Phi_{nn}^{-1} S_1 = S_1^T G^T G S_1 = (GS_1)^T (GS_1) \\ = (GS_1)^T E^{-1} (GS_1)$$

ここで、 $E^{-1} = E$ 、 E は単位行列で、白色雑音の共分散行列を表す。

3. 結 果

信号の分布関数を $S_1(x)$ としそのスペクトルを $S_1(u)$ 、そして信号ベクトルを S_1 とする。

粒状雑音の分布関数を $n(x)$ とし、その自己相関関数を $\varphi(q)$ 、そのフーリエ変換すなわち粒状雑音のウィナースペクトルを $W(u)$ 、そして粒状雑音の共分散行列を Φ_{nn} 、その逆行列を Φ_{nn}^{-1} とすれば、 $\Phi_{nn}^{-1} = G^T G$ となり、 G は、白色化雑音フィルタで、主対角線上の要素が相等しい三角行列となる。 G に対応するシステム関数 $g(x)$ が考えられ、行列 GS_1 は、 $g(x)$ と $S_1(x)$ との重畳積分 $C(x)$ に対応している。 $C(x)$ のフーリエ変換は $G(u)S_1(u)$ と表わされ、 Φ_{nn}^{-1} が $W(u)^{-1}$ に対応しているので、これより $G(u) = W(u)^{-1/2}$ となる。したがって、 $G(u)S_1(u) = S_1(u)/\sqrt{W(u)}$ と表わされ、スペクトル S/N 比として、検出能の基本となっている。

対応関係を $\longleftrightarrow$ 、フーリエ変換を $\bullet \rightarrow$ 、逆フーリエ変換を $\bullet \leftarrow$ 、そして重畳積分を $*$ の記号で示すことにする。これをもとにして、

$$\begin{aligned} \Phi_{nn} &\longleftrightarrow \varphi(q) = \overline{n(x)n(x+q)} \\ &\downarrow \text{フーリエ変換} \\ &W(u) \\ &\downarrow \text{逆フーリエ変換} \\ \Phi_{nn}^{-1} &= G^T \times G \\ &\downarrow \text{フーリエ変換} \\ W(u)^{-1} &= W(u)^{-1/2} \times W(u)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} g(\alpha - \beta) S_1(\beta) &\quad (\text{離散化}) \\ \longleftrightarrow & \\ GS_1 &\longleftrightarrow C(x) = g(x) * S_1(x) \\ \longleftrightarrow & \\ G(u)S_1(u) &\quad \downarrow \frac{S_1(u)}{\sqrt{W(u)}} \end{aligned}$$

となる。

したがって、検出能 d' は、次式となる。

$$d' = \sqrt{S_1^T \Phi_{nn}^{-1} S_1} = \sqrt{S_1^T G^T G S_1} \\ = \sqrt{(GS_1)^T (GS_1)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_1(u)^2}{W(u)} du}$$

4. 考 察

放射線画像系における粒状雑音の共分散行列の逆行列が、三角行列とその転置行列との積で表わされることが、数学的に行列論から証明することができる。一方、三角行列と信号ベクトルとの積 GS_1 が白色化雑音フィルタの空間領域でのシステム関数 $g(x)$ と信号の分布関数 $S_1(x)$ との重畳積分 $C(x)$ に対応することから、 $C(x)$ のフーリエ変換は、 $G(u)S_1(u)$ となるので、空間領域→周波数領域の立場のもとに、白色化雑音フィルタの存在が明らかになったものと考えられる。

逆に、放射線画像系において、粒状雑音のウィナースペクトル $W(u)$ が存在し、測定も行われているので、周波数領域において、白色化雑音フィルタ関数 $W(u)^{-1/2}$ を確かに考えることができる。すると、行列論より三角行列が考えられる。このためには、粒状雑音の共分散行列の逆行列は、正則対称行列でなければならない。したがって、 Φ_{nn} も正則対称でなければならない。また、逆に、 $W(u)^{-1/2}$ が存在するためには、 GS_1 が重畳積分に対応しなければならない。 G は、主対角線上の要素が等しい三角行列となる。したがって Φ_{nn} は、行列論により主対角線上の要素が相等しい正則対称行列である。これは正に、粒状雑音の分散に関するエルゴード性を認めることにほかならない。

S/N 比の表示には、信号の尖頭値と粒状雑音の RMS 値との比、または信号のエネルギーの平方根と粒状雑音の RMS 値との比による方法とがあるが、これらは、いづれもスペクトル S/N 比 $S_1(u)/\sqrt{W(u)}$ をもちいた S/N 比の最大値を与える次式による値を越えることはない。

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{S_1(u)}{\sqrt{W(u)}} \right)^2 du} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_1(u)^2}{W(u)} du}$$

このことは、Schwarz の不等式によっても導出される

もので、検出能 d' そのものが最大の S/N 比を与えており、しかも逆に、検出能をもちいて、Schwarz の不等式により、理論の結果を従来の S/N 比として表示することもできる。すなわち、検出能 d' が最も一般的な S/N 比を表わしており、これが信号および雑音のスペクトルを最もよく反映する S/N 比の表示法であることは、興味ある結果であると考えられる。

5. 結 語

検出能は、白色化雑音フィルタの出力信号のパワーの平方根で与えられる。白色化雑音フィルタの行列は、三角行列である。これに対応する周波数関数は、 $W(u)^{-1/2}$ である。

以上の対応が可能になるためには、 GS_1 が重畳積分に対応しなければならない。そのためには、 G が主対角線上の要素を相等しくする三角行列であることになる。したがって、結果的に、粒状雑音の共分散行列が、主対角線上の要素を相等しくする正則対称行列でなければならない。これは、雑音の分散に関するエルゴード性を認めることであり、画像論に対応する分散に関する測定は、ウィナーспекトルが各周波数に亘って十分に収束するようなデータ数にもとづくものでなければならない。ま

た、画像論そのものも、精密な物理量の測定を要求するばかりでなく、測定データを十分に活用包活する方向に発展さすべきである。これによって、画像論と物理量の測定技術の向上が望めるものとなるであろう。白色化雑音フィルタをもとにして、多変量密度関数解析による確率的行列論と周波数解析論の接点が明らかになった。

文 献

- 1) 若松孝司, 山下一也: スペクトル S/N 比を用いた検出能による総合画像評価の理論. 日放技学誌, **39**(6), 891-898, (1983).
- 2) 若松孝司, 伊藤慎三, 今出川和世, 他: スペクトル S/N 比をもちいた, 検出能による総合画像評価の増感紙・フィルム系への応用. 日放技学誌, **40**(1), 20-27, (1984).
- 3) 若松孝司: スペクトル S/N 比を用いた検出能による総合画像評価の理論, および増感紙系への応用の論文に関する補遺. 日放技学誌, **40**(2), (1984).
- 4) 若松孝司: 放射線医療画像の解析に関する問題点とその展望 (ROC 曲線による画像評価).
- 5) 滝沢英一: 情報の理論と演習. 広川書店, (1968).