重力を介した衛星の回転と軌道運動のエネルギー遷移*¹

Energy Transfer between Satellite Rotation and Revolution through the Gravity

渡 辺 泰 之*²・中 村 仁 彦*³
Yasuyuki WATANABE and Yoshihiko NAKAMURA

Key Words: Astronautics, Energy Transfer, Orbital Perturbation, Gravity Gradient

Abstract: We discuss the mechanism of energy transfer between rotation and revolution of a satellite through the gravity gradient. We assume the earth to be a homogeneous sphere and regard the satellite as an ellipsoid of inertia, not point mass. On the condition, the satellite experiences not only the gravitational force acting on the point mass at the center of mass, but also the force and torque due to the gravity gradient. In addition to the rotational energy and the orbital energy, the satellite has the potential energy generated by the gravity gradient, which performs the energy transfer. Utilizing the principle, we derive the optimal attitude of the satellite for raising the orbital energy. Additional energy is supplied to the rotation by the attitude control and transfers to the orbital motion through the mechanism. Finally, we numerically examine the effect of the proposed method to raise the orbital energy by attitude motion.

1. は じ め に

重力は地球中心からの距離の2乗に反比例するため、衛星の軌道運動は衛星を質点と仮定するとケプラー運動となる。一方、衛星の大きさを考慮すると、衛星には系の質量中心に質量が集中したと仮定したときに働く重力に加え重力傾斜効果による力が働き、衛星の軌道は摂動する。重力傾斜効果により軌道が変化することを利用して、衛星の姿勢運動やテザー衛星の伸縮運動により軌道を制御することが可能である¹⁻⁵⁾。重力傾斜効果を利用した衛星の姿勢運動による軌道制御は、姿勢制御を例えばホイールを用いて電気エネルギーのみで行えば非化学的推進システムとなり得る。

筆者らは文献5)において、重力傾斜効果により衛星に働く摂動力（重力傾斜力）のもつ特徴を述べ、軌道の摂動方程式を適用することにより重力傾斜効果による軌道への影響を調べた。さらに、その効果を利用した軌道の半直弦および離心ベクトルの制御法を提案した。半直弦や離心ベクトルの変化に伴い軌道の長半径が変化し、したがって軌道のエネルギーが変化するが、文献5)ではこの点について言及していなかった。

本論文では、衛星の姿勢運動に与えたエネルギーが軌道のエネルギーへと遷移するメカニズムについて論じる。地球は一樣な球体と仮定する。第2章では、系の角運動量保存則として軌道運動の角運動量と姿勢運動の角運動量の和が保

存されることを述べ、衛星に働く重力傾斜力と重力傾斜トルクの関係を示す。第3章では、衛星を慣性楕円体とみなしたとき、重力傾斜効果により生じるポテンシャルエネルギーを介して系のエネルギーが回転と軌道運動の間で遷移することを示し、重力傾斜効果によるエネルギー遷移のメカニズムについて述べる。第4章では、エネルギー遷移の原理を利用し、衛星の軌道面内運動について衛星の姿勢運動により軌道のエネルギーを増加・減少させる手法を提案する。姿勢制御により衛星の回転運動にエネルギーを注入し、それが重力傾斜効果により軌道のエネルギーへ遷移する。第5章では、提案したエネルギー注入法の効果を数値シミュレーションにより検証する。

記 号

- μ_e 地球重力定数： $\mu_e=3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$
- Σ_I 慣性座標系 $O_I-X_I Y_I Z_I$ ：原点は地球中心に一致し、 $X_I Y_I$ 平面は軌道面に一致する（第1図）。
- Σ_0 軌道上回転座標系 $O-XYZ$ ：原点は衛星の質量中心に一致する。 Y 軸と Z 軸の方向はそれぞれ r_c と Z_I 軸の方向に一致する。
- Σ_s 機体固定座標系 $o-xyz$ ：原点は衛星の質量中心に一致し、各座標軸は慣性主軸に平行である。
- a 長半径
- p 半直弦
- e 離心率
- ω 近地点引数
- θ 真近点角
- r_c 衛星の動径ベクトル
- φ 衛星の姿勢を表すオイラー角

*¹ © 2001 日本航空宇宙学会
平成12年9月7日原稿受理

*² 宇宙開発事業団

*³ 東京大学大学院工学系研究科

第1図 座標系と記号

- ω_c 衛星の角速度ベクトル
 ϕ 衛星が軌道面内運動を行うときのZ軸まわりの衛星の姿勢角度: X軸から測ったx軸の角度
 m 衛星の質量
 sI_0 Σ_s における衛星の質量中心まわりの慣性行列: ${}^sI_0 \triangleq \text{diag}(i_x, i_y, i_z)$
 I_c Σ_I における衛星の質量中心まわりの慣性行列
 f 衛星に働く重力
 f_g 重力傾斜効果により衛星に働く力(重力傾斜力)
 τ_g 重力傾斜効果により衛星に働くトルク(重力傾斜トルク)
 E 衛星のもつエネルギー
 E_o 衛星の軌道エネルギー
 T_a 衛星の回転エネルギー
 U_g 重力傾斜効果により生じる衛星のポテンシャルエネルギー
 C_σ $\cos \sigma$
 S_σ $\sin \sigma$

2. 角運動量保存則

衛星の大きさを考慮したとき, 衛星に働く重力と重力傾斜トルクとの関係式は次のように表される⁶⁾.

$$\mathbf{r}_c \times \mathbf{f} + \boldsymbol{\tau}_g = \mathbf{0} \quad (1)$$

式(1)の左辺第1項は軌道運動に関する角運動量の時間微分であり, 第2項は衛星の質量中心まわりの回転運動に関する角運動量の時間微分である. 従って, 式(1)を時間積分することにより,

$$\left(\begin{array}{c} \text{軌道運動の} \\ \text{角運動量} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{回転運動の} \\ \text{角運動量} \end{array} \right) = \text{一定}$$

となり, 角運動量保存則は軌道運動に関する角運動量と回転運動に関する角運動量の和が保存されることを示している. すなわち, 重力傾斜効果により軌道が変化する場合, 軌道の角運動量の変化は衛星の質量中心まわりの回転運動に関する角運動量として蓄積される. 衛星の姿勢を例えばホイールで制御する場合には, ホイールに角運動量が蓄積されることになる.

ところで, 系に働く重力は

$$\mathbf{f} = -\mu_e m \mathbf{r}_c^{-3} \mathbf{r}_c + \mathbf{f}_g$$

と表される⁵⁾から, 上式を式(1)に代入することにより, 重力傾斜力と重力傾斜トルクの関係式:

$$\mathbf{r}_c \times \mathbf{f}_g + \boldsymbol{\tau}_g = \mathbf{0} \quad (2)$$

が導かれる. 上式の関係により, 衛星の回転エネルギーと軌道エネルギーの間でエネルギー遷移が起こる.

3. エネルギーの変換メカニズム

重力傾斜効果によりエネルギーが衛星の回転と軌道運動との間で遷移するメカニズムについて論じる. 衛星の運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_c^T \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_c^T I_c \boldsymbol{\omega}_c \quad (3)$$

と表される. 一方, 地球の重力によるポテンシャルエネルギーは,

$$U = -\mu_e m r_c^{-1} - \frac{\mu_e}{2} \{ r_c^{-3} \text{trace}(I_c) - 3 r_c^{-5} \mathbf{r}_c^T I_c \mathbf{r}_c \} \quad (4)$$

と表される⁶⁾. 上式の右辺第2項は重力の傾斜効果を考慮したことにより生じるポテンシャルエネルギーであり, 本論文では「重力傾斜エネルギー」と呼ぶことにする. 重力傾斜エネルギーは衛星の位置 $\mathbf{r}_c$ および慣性行列 I_c すなわち衛星の姿勢 $\boldsymbol{\varphi}$ に依存する. このエネルギーにより回転と軌道運動のエネルギー遷移が行われることを以下に示す. 式(3), (4)から, 衛星のもつエネルギーは

$$E = T + U = E_o + T_a + U_g$$

と表される. ただし,

$$E_o = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_c^T \dot{\mathbf{r}}_c - \mu_e m r_c^{-1}$$

$$T_a = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_c^T I_c \boldsymbol{\omega}_c$$

$$U_g = -\frac{\mu_e}{2} \{ r_c^{-3} \text{trace}(I_c) - 3 r_c^{-5} \mathbf{r}_c^T I_c \mathbf{r}_c \}$$

である. ところで, 衛星の形状が変化しないとき U_g の時間微分は次式のように表される.

$$\dot{U}_g = \left(\frac{\partial U_g}{\partial \mathbf{r}_c} \right) \dot{\mathbf{r}}_c + \left(\frac{\partial U_g}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \right) \dot{\boldsymbol{\varphi}} \quad (5)$$

ここで, 重力傾斜力および重力傾斜トルクは重力傾斜エネルギー U_g から導かれる一般化力であるため, 次式が成り立つ.

$$\mathbf{f}_g = - \left(\frac{\partial U_g}{\partial \mathbf{r}_c} \right)^T \quad (6)$$

$${}^\varphi \boldsymbol{\tau}_g = - \left(\frac{\partial U_g}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \right)^T \quad (7)$$

ただし ${}^\varphi \boldsymbol{\tau}_g$ は衛星姿勢のオイラー角 $\boldsymbol{\varphi}$ に対する一般化力である. 式(5)~(7)より衛星のもつエネルギーの時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}_o + \dot{T}_a + \dot{U}_g \\ &= \dot{E}_o + \dot{T}_a - \mathbf{f}_g^T \dot{\mathbf{r}}_c - {}^\varphi \boldsymbol{\tau}_g^T \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \quad (8)$$

となる. 式(8)では明らかに, 第3項は軌道運動のエネルギーを変化させ, 第4項は回転運動のエネルギーを変化させる. 外部からのエネルギーの供給がなく系のエネルギーが保存される場合には, $\dot{E} = 0$ であるから

$$\dot{E}_0 = \mathbf{f}_g^T \dot{\mathbf{r}}_c \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_a &= {}^c \boldsymbol{\tau}_g^T \dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\tau}_g^T \boldsymbol{\omega}_c \\ &= -\mathbf{f}_g^T (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{r}_c) \quad (\because \text{式(2)}) \end{aligned} \quad (10)$$

となる. 以上より, 重力傾斜エネルギーを介して衛星の回転と軌道運動のエネルギー遷移が可能であることがわかる.

4. 軌道へのエネルギー注入

衛星が軌道面内運動を行う場合について, 重力傾斜効果を利用して軌道エネルギーを増加・減少させるための最適な衛星の姿勢運動について論じる. ここで軌道面内運動とは, 機体固定座標系 Σ_s の z 軸が慣性座標系 Σ_I の Z_I 軸に常に平行であることを意味し, このとき重力傾斜力の軌道面外成分は零となるため衛星の軌道面は変化しない⁵⁾. ここでは, 姿勢制御により衛星の回転運動に注入したエネルギーが重力傾斜効果により軌道エネルギーへ遷移し, 結果として軌道エネルギーが増加・減少することを利用する.

4.1 軌道エネルギーの変化 E_0 は衛星のもつ軌道エネルギーであるから

$$E_0 = -\frac{\mu_e m}{2} a^{-1} \quad (11)$$

と表すことができる. 一方, 軌道の長半径の摂動方程式は次式により表される⁷⁾.

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2a^2}{\sqrt{\mu_e b}} \{-a_X(1+eC_\theta) + a_Y e S_\theta\} \\ &= \frac{2a^2}{\sqrt{\mu_e b}} \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (12)$$

ただし,

$$\boldsymbol{\rho} = [-(1+eC_\theta) \quad eS_\theta]^T \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [a_X \quad a_Y]^T$$

である. $\boldsymbol{\alpha}$ は軌道上回転座標系 Σ_0 において表した摂動加速度であり, 重力傾斜力のみが摂動力となる場合には

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \frac{\mu_e}{m r_c^3} \begin{bmatrix} PS_{2\phi} \\ QC_{2\phi} + R \end{bmatrix} \\ &= \frac{\mu_e}{m r_c^3} \boldsymbol{\alpha}' \end{aligned} \quad (14)$$

となる⁵⁾. ただし,

$$P = -\frac{3}{2}(i_x - i_y)$$

$$Q = -\frac{9}{4}(i_x - i_y)$$

$$R = \frac{3}{4}(i_x + i_y - 2i_z)$$

$$\boldsymbol{\alpha}' = [PS_{2\phi} \quad QC_{2\phi} + R]^T \quad (15)$$

である. 式(11), (12), (14)より, 衛星に重力傾斜力が働くときの E_0 の時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{E}_0 &= \frac{\mu_e m}{2} a^{-2} \dot{a} \\ &= \sqrt{\frac{\mu_e^3}{b}} r_c^{-4} \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\alpha}' \end{aligned} \quad (16)$$

と表される. 上式は衛星が軌道面内運動をするときの式(9)と等価となる. 式(13)より $\boldsymbol{\rho}$ は θ の変化すなわち衛星の軌道運動に従って中心 $[-1 \ 0]^T$ 半径 e の円上を変化し, 一方, 式(15)より $P, Q \neq 0$ (i.e. $i_x \neq i_y$) のとき $\boldsymbol{\alpha}'$ は

第2図 エネルギー増加を最大にする衛星姿勢

第3図 エネルギーの増加が不可能な場合

ϕ の変化すなわち衛星の姿勢運動に従って楕円上を変化する. この楕円は(1)長軸と短軸の長さの比が3/2である, (2)長軸の方向は鉛直方向に一致するという特徴をもち, すべての衛星についてこの特徴は成り立つ. 式(16)は, 衛星の位置 $\mathbf{r}_c$ における軌道エネルギーの変化が $\boldsymbol{\rho}$ と $\boldsymbol{\alpha}'$ の内積により決まることを示している.

4.2 エネルギーの注法 軌道エネルギーを増加・減少させるのに最適な衛星の姿勢を導く. これはすなわち式(16)より $\boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\alpha}'$ を最大・最小にする ϕ を求めることである. エネルギーを増加させる場合は第2図に示すように, 衛星の姿勢が $\boldsymbol{\rho}$ に垂直な直線と $\boldsymbol{\alpha}'$ の描く楕円との接点における姿勢 ϕ_d となるよう姿勢制御を行えば, 軌道エネルギーの増加が最大となる. ただし第2図には $P, Q, R > 0$ のときの楕円が描かれている. R の値が大きく楕円の中心位置が原点から大きく離れる場合には, 第3図のようにエネルギーを増加させることが不可能になる場合があるが, このとき ϕ_d はエネルギーの減少を最小にする姿勢となる.

軌道エネルギーを増加させるときの衛星の最適姿勢 ϕ_d は以下のようにして求められる. $\dot{E}_0$ を最大にする $\phi = \phi_d$ は次式を満たすことが必要である.

$$\left(\frac{\partial \dot{E}_0}{\partial \phi} \right)_{\phi=\phi_d} = 0 \quad (17)$$

ところで式(16)より

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \dot{E}_o}{\partial \phi}\right) &= \sqrt{\frac{\mu_e^3}{p}} r_c^{-4} \boldsymbol{\rho}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}'}{\partial \phi} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\mu_e^3}{p}} r_c^{-4} \begin{bmatrix} -(1+eC_\theta) & eS_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2PC_{2\phi} \\ -2QS_{2\phi} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となるから、式(17)の条件は

$$P(1+eC_\theta)C_{2\phi_d} + QeS_\theta S_{2\phi_d} = 0 \quad (18)$$

と表される．上式を満たす ϕ_d は $0^\circ \leq \phi_d < 180^\circ$ の範囲では2つ存在し，一方は $\dot{E}_o$ の最大値を与え他方は最小値を与える．これは，第2図において $\boldsymbol{\rho}$ に垂直な楕円の接線は2通り存在することに相当する．式(18)を満たす2つの解のうち $\dot{E}_o$ の最大値を与えるものは

$$\begin{aligned}90^\circ < \phi_d < 180^\circ & \quad (P, Q > 0) \\ 0^\circ < \phi_d < 90^\circ & \quad (P, Q < 0)\end{aligned} \quad (19)$$

の範囲にあることは，第2図において $0 \leq e < 1$ より明らかであるため， ϕ_d は式(18)，(19)の条件により唯一に定まり，

$$\phi_d = \frac{1}{2} \text{atan} 2(-P(1+eC_\theta), QeS_\theta) \quad (20)$$

となる．軌道エネルギーを減少させる最適姿勢 ϕ_d についても同様の議論が行えて，式(18)を満たす2つの解のうち $\dot{E}_o$ の最小値を与えるものは

$$\begin{aligned}0^\circ < \phi_d' < 90^\circ & \quad (P, Q > 0) \\ 90^\circ < \phi_d' < 180^\circ & \quad (P, Q < 0)\end{aligned}$$

の範囲にあり， ϕ_d' は

$$\phi_d' = \frac{1}{2} \text{atan} 2(P(1+eC_\theta), -QeS_\theta)$$

により求められる．

5. 数値シミュレーション

前述の軌道エネルギーの注入法の効果を数値シミュレーションを用いて検証する．衛星の目標姿勢 ϕ_d は式(20)より求め，衛星は姿勢制御により目標姿勢に完全に追従すると仮定する．すなわち，衛星は常に軌道エネルギーを増加させる最適姿勢をとる．衛星モデルは文献5)と同様に第4図および第1表に示すモデルを用いる．初期条件を $a=1.0 \times 10^7$ [m]， $e=0.2$ の軌道上の近地点 ($\theta=0^\circ$) とし24時間

第4図 衛星のモデル

第1表 衛星モデルの質量 [kg] と慣性モーメント [kg・m²]

	m	i_x	i_y	i_z
Main body	1500	2250	2250	2250
Ball	500	50	50	50

のシミュレーションを行う．

第5図に長半径，離心率，半直弦の変化を示す．長半径は単調に増加し，それと共に離心率および半直弦も増加する．半直弦の変化は軌道の角運動量の変化を意味するが，第2章で述べた角運動量保存則によりこの変化分は衛星の質量中心まわりの角運動量の変化として現れ，姿勢制御装置により賄われることになる．衛星の姿勢 ϕ の変化は第6図に示すように， 135° のまわりで軌道運動に従って周期的に変化する．衛星のもつエネルギーの変化を第7図に示す．長半径が単調に増加するため軌道エネルギーも同様の变化を示す．回転エネルギーは $0 \sim 300$ [J] の間で軌道運動に従って周期的に変化し，重力傾斜エネルギーも $-70 \sim 0$ [J] の間で変化する．

第7図の各エネルギーの時間差分を時間刻み幅で除することによりそれぞれの時間微分を求めると第8図が得られ

(a) 長半径 (1.0×10^7 m からの変化)

(b) 離心率 (0.2 からの変化)

(c) 半直弦 (9.6×10^6 m からの変化)

第5図 エネルギーの注入による軌道要素の変化

第6図 衛星の姿勢 ϕ (最適姿勢)

(a) 軌道エネルギー (-4.9825×10^{10} J からの変化)

(b) 回転エネルギー

(c) 重力傾斜エネルギー

第7図 衛星のもつエネルギーの変化

第9図 重力傾斜トルクによる回転エネルギーの時間微分

第10図 軌道エネルギーと重力傾斜エネルギーの和の時間微分

第11図 重力傾斜効果により遷移した回転エネルギー

(a) 軌道エネルギー

(b) 回転エネルギー

(c) 重力傾斜エネルギー

第8図 エネルギーの時間微分

る。一方、式(10)から計算される重力傾斜トルクによる回転エネルギーの時間微分を第9図に示す。第9図は回転エネルギーの重力傾斜効果によるエネルギー遷移を表す。第9図は常に負の値となっており重力傾斜効果により回転エネルギーは単調減少することを示しているが、第8図(b)に示すように実際の衛星の姿勢運動から求めた回転エネルギーの時間微分はそれに一致せず、その差は姿勢制御により供給されていると考えられる。

軌道エネルギーと重力傾斜エネルギーの和について、その時間微分を第8図(a)および(c)の和を計算することにより求めると第10図が得られる。第9図と比較すると常に正負が逆で大きさが等しいためこれらの総和は零となり、重力傾斜効果により回転エネルギーが軌道および重力傾斜エネルギーへと遷移していることが確認できる。重力傾斜効果により遷移するエネルギーの総和が零となることは、例えば次のようにしても確かめることができる。各エネルギーの初期値に対するシミュレーション終了時の変化量の総和を計算する。第9図を時間積分することにより回転エネルギーから遷移したエネルギーを求めると第11図が得られ、シミュレーション終了時の変化量は -9828.5 [J]となる。軌道エネルギー(第7図(a))および重力傾斜エネルギー(第7図(c))の変化量はそれぞれ 9811.3 , 17.2 [J]であるため、これら3つのエネルギーの総和は零となる。

6. お わ り に

本論文では、重力傾斜効果により衛星の回転エネルギーと軌道エネルギーとの間でエネルギーの遷移が起こるメカニズムについて論じ、その原理を利用して衛星に与えた回転エネルギーを軌道エネルギーへ遷移させる衛星の最適姿勢を導いた。本論文の内容を以下にまとめる。

1. 衛星に働く重力と重力傾斜トルクとの関係式から、系の角運動量保存則として衛星の軌道運動の角運動量と質量中心まわりの回転運動の角運動量の和が一定となることを示した。

2. 重力傾斜効果により生じるポテンシャルエネルギーを介し、衛星の回転エネルギーと軌道エネルギーの間でエネルギー遷移が行われるメカニズムについて述べた。

3. 衛星の軌道面内運動について、衛星の回転と軌道の間で遷移するエネルギーが衛星の姿勢に依存することを示し、軌道へエネルギーを注入するための衛星の最適姿勢を求めた。

4. 数値シミュレーションにより重力傾斜効果を利用し

た軌道へのエネルギー注入法の効果を検証し、姿勢制御により供給される回転エネルギーが軌道エネルギーへ遷移することを確認した。

参 考 文 献

- 1) Moran, J. M.: Effects of Plane Librations on the Orbital Motion of a Dumbbell Satellite, *ARS J.*, **31** (1961), pp. 1089-1096.
- 2) Murakami, C.: On Orbit Control Using Gravity Gradient Effects, *Acta Astronautica*, **8** (1981), pp. 733-747.
- 3) Sanchez, M. M. and Gavit, S. A.: Orbital Modification Using Forced Tether-Length Variations, *AIAA J. Guidance*, **10** (1987), pp. 233-241.
- 4) Landis, G. A.: Reactionless Orbital Propulsion Using Tether Deployment, *Acta Astronautica*, **26** (1992), pp. 307-312.
- 5) 渡辺泰之, 中村仁彦: 重力傾斜による衛星軌道への影響とその軌道制御への応用, *日本航空宇宙学会論文集*, **48** (2000), pp. 220-225.
- 6) Kane, T. R., Likins, P. W. and Levinson, D. A.: *Spacecraft Dynamics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1983, pp. 112-116, 133-141.
- 7) 富田信之: *宇宙システム入門*, 東京大学出版会, 東京, 1993, pp. 161-170.