一様流中の自由-固定弾性片の静的空力発散と横挫屈^{*1} Aeroelastic Divergence and Lateral Buckling of Free-Fixed Elastic Strip in Uniform Flow

山 本 雄 三^{*2}
Yuzo YAMAMOTO

Key Words : Aeroelasticity, Aerodynamics, Strength of Materials, Lateral Buckling

Abstract : The static instability of a slender front-free-aft-fixed elastic strip in the uniform air stream the free end of which is the leading edge is studied analytically. The elastic strip is held vertically. The analysis is performed using the slender wing theory and beam theory and the effect of gravity force are considered that is the effect of the lateral buckling due to the gravity force. The approximate analysis is done by using energy method, and the static aeroelastic divergence speed is obtained. When the flexural rigidity approaches to the lateral buckling condition, the aeroelastic divergence speed becomes lower till zero wind speed.

記 号

a : 弾性片の自由端のたわみ
 b : 弾性片の幅
 C : ねじり剛性
 EI : 曲げ剛性
 E_{bnd} : 曲げのひずみエネルギー
 E_{tor} : ねじりのひずみエネルギー
 F_{air} : 空気力
 G : ずれ弾性率
 h : 弾性片の厚み
 k : 式 (A. 2) 参照
 l : 弾性片の長さ
 l_n : 弾性片に働く単位長さあたりの揚力
 L_{air} : 空気力のした仕事
 m_{air} : 単位長さあたりの空気の見掛けの質量
 M_{air} : 空気力による曲げモーメント
 q : 重力による分布荷重
 u_{div} : 静的空力発散モード
 u, v, w : x, y, z 方向のたわみ
 V : 一様流流速
 V_{div} : 静的空力発散速度
 W_{grv} : 重力のした仕事
 x, y, z : 座標
 β : ねじり変形
 δ : ディラックのデルタ関数
 ρ_{air}, ρ : 空気密度, 密度
 ξ, η, ζ : 物体固定座標

1. 序 論

前縁が自由端で後縁を固定支持とした細長い弾性片を流れ中に平行に置くと、流れがある臨界流速を越えると、静的空力発散が発生する。山本¹⁾はこの問題を、空気力評価にスレンダ翼理論^{2,3)}を、弾性力評価に梁理論を用いて解析により研究し、静的空力発散速度と静的空力発散モードの解析解をえた。空気力評価にスレンダ翼理論を用いていることから、解析結果は低速から亜・遷音速を越えマッハ数 1.6 程度以下の超音速まで有効である。

山本は解析に加うるに、小型低速風洞による風洞実験を実施した。弾性片には銅の薄板とアルミの薄板が用いられた。重力による初期たわみを防止するため、弾性片は旗を立てるように鉛直に支持する必要があった。弾性片のアスペクト比は、 $AR=0.25$, $AR=0.5$, $AR=0.75$ の 3 通りを選んだ。初期迎え角 $\alpha_0=0^\circ$ と $\alpha_0=15^\circ$ について、3 通りのアスペクト比とのすべての組み合わせについて風洞実験を実施した。静的空力発散速度は無次元化して比較したが、銅の薄板とアルミの薄板で特性の差異はなかった。初期迎え角 $\alpha_0=0^\circ$ の静的空力発散速度は、空気力評価に線形のスレンダ翼理論に基づく空気の見掛けの質量を

$$m_{\text{air}} = (\pi/4)\rho_{\text{air}}b^2$$

と評価した静的空力発散速度と一致した。ただし、アスペクト比 $AR=0.25$ の弾性片は、理論の予測値より 2 割程低い静的空力発散速度を示した。これは、実験に用いた風洞の主流の比較的高い相対乱れ度 (1.2%) のため非線形揚力が働いたためと推測される。

初期迎え角 $\alpha_0=15^\circ$ の静的空力発散速度は、流れが側縁ではなく離してはく離渦を形造ることによる cross flow 効果による揚力増大^{4,5)}のため、線形理論の予測よりも低い静的空力発散速度を与える。非線形揚力の評価について

^{*1} © 2001 日本航空宇宙学会

平成 12 年 5 月 18 日原稿受理

^{*2} 岐阜工業高等専門学校機械工学科

は、公表されている矩形平板翼のデータ⁴⁾の内挿により論じた。

前述の研究が完了してから、弾性片を鉛直に支持したら重力による横挫屈^{6,7)}の影響で静的空力発散速度が低下する可能性がある指摘される方がいて、本研究が開始された。エネルギー法による近似解析が展開される。初期迎え角 $\alpha_0 = 0^\circ$ のアスペクト比 $AR = 0.25$ の弾性片の実験の示す静的空力発散速度が、理論の予測よりも低下したことを、本横挫屈を考慮した解析が説明するものではなかった。しかしながら、弾性片が自重による横挫屈発生条件に近づくと静的空力発散速度が低下するという興味深い結果がえられたのでここに報告する。

自重によるねじりを考えるのなら、空気力によるねじりの影響も考慮すべきだという意見もあると思われる。しかしながら、次に示す二つの理由により空気力によるねじりの影響は考慮しなかった。空気力によるねじりも考えると解析がもっと複雑となる。それは有効な解析を行うためには、自重によるねじりモード β_1 以外にも空気力によるねじりモード β_2 を仮定せねばならないから。もう一つの理由は、ねじりの空気力が静的弾性不安定に有効に作用するようになるのは、アスペクト比が大きくなったときで、もはやスレンダ翼理論の適用範囲を越え、揚力面理論を適用せねばならず、さらに複雑な問題となると推測されるから。

この自由-固定支持弾性片の静的空力発散の研究は、Stopped Rotor V/STOL 航空機のロータ停止飛行モードの際、前方を向いて停止したブレードには静的空力発散が、後方を向いて停止したブレードにはフラッタが発生すること⁸⁾を知って開始された。方位角 180° と 360° で停止したブレードの空力弾性上の問題、つまり前縁自由-後縁固定支持の弾性片の静的空力発散の問題と、前縁固定支持-後縁自由の弾性片のフラッタの問題⁹⁻¹¹⁾は、空気力評価にスレンダ翼理論が、弾性力評価に梁理論が用いられるため、最も単純な空気弾性の問題の一つである。また、その手法は、飛しょう体の空力弾性の問題¹²⁻²⁰⁾への発展が期待される。

2. 揚力による仕事 L_{air}

たわみ曲線として、Appendix A の式(A.8)を参考に
(A.8) $u = a[1 - \cos\{(\pi/2)(z/l)\}]$ (2.1)
を仮定する。以降式(A.8)を改めて式(2.1)と呼ぶことにする。ここで第1図に示すような問題を考える。

弾性片の $0 < z < l$ に作用する空気力

$$F_{air1} = -V^2 m_{air} d^2 u / dz^2 \quad (2.2)$$

と自由端 ($z=l$) に作用する空気力

$$F_{air2} = V^2 m_{air} \{du/dz(z=l)\} \quad (2.3)$$

を考慮し、たわみ曲線(2.1)を生むに要した空気力の仕事を評価する。

空気力 F_{air1} による仕事を L_{air1} とする。

$$L_{air1} = \int_0^l \int_0^a -V^2 m_{air} \frac{d^2 u}{dz^2} du dz$$

第1図 細長い弾性片の静的空力発散 (重力によるねじりを考えない場合)

$$= -V^2 m_{air} \int_0^l \int_0^a \frac{d^2 u}{dz^2} \cdot \frac{du}{dz} da dz$$

ここで、式(2.1)を用いると

$$\begin{aligned} L_{air1} &= -V^2 m_{air} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \int_0^l \int_0^a \cos\left(\frac{\pi}{2l}z\right) \\ &\quad \times \left\{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2l}z\right)\right\} a da dz \\ &= -\frac{a^2}{2} V^2 m_{air} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \int_0^l \cos\left(\frac{\pi}{2l}z\right) \\ &\quad \times \left\{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2l}z\right)\right\} dz \end{aligned}$$

L_{air1} として次の表現をうる。

$$L_{air1} = -V^2 m_{air} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \frac{a^2}{2} \left[\pi l - \frac{l}{2}\right] \quad (2.4)$$

自由端 ($z=l$) で作用する空気力 F_{air2} による仕事を L_{air2} とする。

$$L_{air2} = \int_0^a V^2 m_{air} a \left[\frac{du}{dz}(z=l) \right] da$$

式(2.1)を用いると

$$L_{air2} = V^2 m_{air} \left\{ \pi / (2l) \right\} \left\{ a^2 / 2 \right\} \quad (2.5)$$

空気力のなした仕事 L_{air} は

$$L_{air} = L_{air1} + L_{air2} = V^2 m_{air} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \quad (2.6)$$

3. 曲げのひずみエネルギー E_{bnd}

曲げのひずみエネルギー E_{bnd} は

$$E_{bnd} = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz \quad (3.1)$$

によって評価される。たわみ曲線として式(2.1)を用いる。式(3.1)、(2.1)より

$$E_{bnd} = \frac{EI}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 \int_0^l \cos^2\left(\frac{\pi}{2l}z\right) dz$$

よって次の表現をうる。

$$E_{bnd} = (EI/2) a^2 (\pi/2l)^4 (l/2) \quad (3.2)$$

3.1 空気力のなした仕事 L_{air} と曲げのひずみエネルギー E_{bnd} の等値 空気力のなした仕事は曲げのひずみエネルギーになったとする。

$$L_{air} = E_{bnd}$$

式(2.6)、(3.2)と上の関係より

$$V_{div} = (\pi/2)(1/l) \sqrt{EI/m_{air}} \quad (3.3)$$

この解は Appendix A の重力の影響を考慮しない場合の解析 微分方程式による解析の静的空力発散速度の結果である式(A.7)と一致する。それは仮定した曲げモード式(2.1)が直接微分方程式を解いた結果である式(A.8)と一

致するからである．自重による横挫屈の影響を考慮するためには，自重のした仕事とねじりのひずみエネルギーを評価せねばならない．なお， EI は曲げ剛性で，細長い矩形断面の場合

$$EI = (bh^3/12)E \quad (3.4)$$

m_{air} は空気の単位長さあたりの見掛けの質量で，細長い矩形断面の場合，線形のスレンダ翼理論によれば，

$$m_{\text{air}} = (\pi/4)\rho_{\text{air}}b^2 \quad (3.5)$$

4. 片持弾性片の横挫屈

エネルギー法で重力による横挫屈の影響を調べるためには，ねじり角 β の変形モードを仮定せねばならない．そのために横挫屈の基礎式⁶⁾を検討する (第2図参照)．

x 軸に平行な軸まわりのモーメント M_x は

$$M_x = (q/2)(l-z)^2$$

ここで， q は z 方向の単位長さあたりの重力． y 軸に平行な軸まわりのモーメント M_y は

$$M_y = M_{\text{air}}$$

ここで， M_{air} は空気力の作るモーメントである． z 軸に平行な軸まわりのモーメント M_z は

$$M_z = \int_z^l -q\{u(Z) - u(z)\}dZ$$

弾性片固定の ξ ， η ， ζ 座標を考える． x ， y ， z と ξ ， η ， ζ の方向余弦は第1表に示した．問題の性質から dv/dz は高次の微小量である．第1表を参考に， M_ξ ， M_η ， M_ζ を求める．微小変形を考えることとする．

$$\begin{aligned} M_\xi &= M_x + \beta M_{\text{air}} - (du/dz)M_z \\ &= \frac{q}{2}(l-z)^2 + \beta M_{\text{air}} + \frac{du}{dz} \int_z^l q\{u(Z) - u(z)\}dZ \end{aligned}$$

上式の右辺第3項は高次の微小量で無視できる．

$$M_\xi \approx (q/2)(l-z)^2 + \beta M_{\text{air}}$$

$$M_\eta = -\beta M_x + M_{\text{air}} - (dv/dz)M_z$$

上式の右辺第3項 dv/dz を含む項は微小量で無視できる．

$$M_\eta \approx -\beta M_x + M_{\text{air}} = -\beta \frac{q}{2}(l-z)^2 + M_{\text{air}}$$

第2図 記号と座標

第1表 x ， y ， z と ξ ， η ， ζ の方向余弦

	x	y	z
ξ	1	β	$-du/dz$
η	$-\beta$	1	$-dv/dz$
ζ	du/dz	dv/dz	1

さらに M_ζ については

$$M_\zeta = (du/dz)M_x + (dv/dz)M_{\text{air}} + M_z$$

上式の右辺第2項 dv/dz を含む項は微小量で無視できる．

$$M_\zeta \approx \frac{q}{2}(l-z)^2 \frac{du}{dz} - \int_z^l q\{u(Z) - u(z)\}dZ$$

B_1 ， B_2 を η ， ξ 軸まわりの曲げ剛性， C を ζ 軸まわりのねじり剛性とする，

$$B_1 \frac{d^2 u}{dz^2} = M_\eta = -\beta \frac{q}{2}(l-z)^2 + M_{\text{air}} \quad (4.1)$$

$$B_2 \frac{d^2 v}{dz^2} = -M_\xi = -\frac{q}{2}(l-z)^2 - \beta M_{\text{air}} \quad (4.2)$$

$$C \frac{d\beta}{dz} = M_\zeta = \frac{q}{2}(l-z)^2 \frac{du}{dz} - \int_z^l q\{u(Z) - u(z)\}dZ \quad (4.3)$$

式(4.1)，(4.2)，(4.3)が横挫屈を考慮した系の基礎式である．本研究ではこれらを直接解くかわりにエネルギー法を用いる．仮定すべきねじり曲線 $\beta(z)$ の決定に式(4.3)を利用するが，それについては Appendix B で記述する．

5. 自重の仕事 W_{grv}

z 点での曲げによる t 点の鉛直下方へのたわみを評価する (第3図参照)． mn を固定という見方をすると， mn 面の dz の微小要素の曲げによる $\xi\zeta$ 面で描く小さな弧の長さは

$$(dz/R)(t-z)$$

ところで

$$(1/R) \approx -d^2 u / dz^2$$

よりそれは

$$-(d^2 u / dz^2)(t-z)dz$$

それによる鉛直下方のたわみはねじり β によって生ぜさせられ

$$-\beta(z)(d^2 u / dz^2)(t-z)dz$$

t 点のたわみは

$$-\int_0^t \beta(z) \frac{d^2 u}{dz^2} (t-z)dz$$

たわみのモード式(2.1)を仮定すると，

$$d^2 u / dz^2 = a(\pi/2)^2 (1/l)^2 \cos[(\pi/2)(z/l)]$$

$\beta(z)$ は Appendix B の式(B.2)より評価できるから， t 点のたわみは評価可能である．自重の仕事 W_{grv} は以下のように評価される．

第3図 弾性片の変形

$$W_{\text{grv}} = - \int_0^l q \int_0^t \beta(z) \frac{d^2 u}{dz^2} (t-z) dz dt$$

変形して

$$W_{\text{grv}} = - \int_0^l q \{ I_1(t) + I_2(t) \} dt \quad (5.1)$$

ここで,

$$I_1(t) = \int_0^t \beta(z) \frac{d^2 u}{dz^2} dz \quad (5.2)$$

$$I_2(t) = \int_0^t \beta(z) \frac{d^2 u}{dz^2} (-z) dz \quad (5.3)$$

式(2.1), (B.2), (5.1), (5.2), (5.3)等を用いて計算の後次に次式をうる.

$$W_{\text{grv}} = - \frac{q^2 a^2}{C} l^3 \left\{ -\frac{\pi^2}{160} + \frac{3}{8} - \frac{2}{\pi} - \frac{49}{4} \cdot \frac{1}{\pi^2} + \frac{48}{\pi^3} \right\}$$

π も数値で評価して

$$W_{\text{grv}} = \frac{q^2 a^2 l^3}{C} (0.016415647) \quad (5.4)$$

なお, この W_{grv} の評価のため文献21)式2.635の1, 2, 3, 4と5を用いた.

ここで, C はねじり剛性で細長い矩形断面形の場合

$$C = \frac{bh^3}{3} \left(1 - 0.630 \frac{h}{b} \right) G \quad (5.5)$$

で評価される.

6. ねじりのひずみエネルギー E_{tor}

ねじりによるひずみエネルギー E_{tor} は

$$E_{\text{tor}} = \frac{C}{2} \int_0^l \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 dz \quad (6.1)$$

で評価される. Appendix B に示したように, 式(2.1)のたわみに対応する $d\beta/dz$ は式(B.1)で評価される. 文献21)式2.635の1, 2, 3と4等を用いて計算の後次に次の結果をうる.

$$E_{\text{tor}} = \frac{q^2 a^2 l^3}{2C} \left\{ \frac{\pi^2}{160} - \frac{3}{8} + \frac{2}{\pi} + \frac{49}{4} \cdot \frac{1}{\pi^2} - \frac{48}{\pi^3} \right\}$$

π も数値的に評価して

$$E_{\text{tor}} = \frac{q^2 a^2 l^3}{2C} \times 0.016415647 \quad (6.2)$$

をうる.

7. 静的不安定についての検討

空気力のした仕事と弾性片の自重がした仕事, 曲げのひずみエネルギーとねじりのひずみエネルギーの和に等しいと置いて, 静的空力発散速度を評価する.

$$L_{\text{air}} + W_{\text{grv}} = E_{\text{bnd}} + E_{\text{tor}} \quad (7.1)$$

式(7.1), (2.6), (3.2), (5.4), (6.2)より

$$\begin{aligned} V^2 m_{\text{air}} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{a^2}{2} + 0.016415647 \frac{q^2 a^2}{C} l^3 \\ = E l a^2 \frac{\pi^4}{64} \cdot \frac{1}{l^3} + 0.016415647 \frac{q^2 a^2}{2C} l^3 \end{aligned}$$

整理して

$$\frac{m_{\text{air}}}{l} V^2 = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^3} \left\{ 1 - 0.0053927 l^4 \frac{(ql)^2}{EIC} \right\}$$

ここで, 流速 V は静的空力発散速度 V_{div} のことであるから, 次の表現をうる.

$$V_{\text{div}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{l} \sqrt{\frac{EI}{m_{\text{air}}}} \sqrt{1 - 0.005393 l^4 \frac{(ql)^2}{EIC}} \quad (7.2)$$

ここで, ql は弾性片の重量で

$$ql = \rho g b h l \quad (7.3)$$

である.

7.1 本解析における横挫屈荷重 本近似解法の精度の吟味のため, 本解析法による空気力が作用しない場合の横挫屈荷重の評価を行う. そのため自重のした仕事, 曲げのひずみエネルギーとねじりのひずみエネルギーの和に等しいとする. つまり

$$W_{\text{grv}} = E_{\text{bnd}} + E_{\text{tor}}$$

式(3.2), (5.4), (6.2)と上記の関係より

$$(ql)^2 = 185.435 \frac{EIC}{l^4}$$

この ql は挫屈荷重 $(ql)_{\text{cr}}$ であるから

$$(ql)_{\text{cr}} = 13.62 \sqrt{\frac{EIC}{l^2}} \quad (7.4)$$

式(7.4)は横挫屈の生ずる挫屈荷重を与えるが, 厳密な解析による解が文献6)に紹介されていて

$$(ql)_{\text{cr}} = 12.85 \sqrt{\frac{EIC}{l^2}} \quad (7.5)$$

である. 式(7.4)と(7.5)を比較すると, 本近似解析の方が厳密解よりほぼ6%大きい値を示す.

式(7.2)と式(7.4)の比較から, 横挫屈を発生する荷重に近づくとき, 式(7.2)の右辺の平方根の中が小さくなり, 静的空力発散速度が低下することがわかる. 横挫屈が誘導する静的空力発散の出現である.

8. 結 論

前縁が自由端で後縁を固定支持とした細長い弾性片を流れに平行に置いた場合の静的空力発散をエネルギー法に基づく解析によって研究した. 弾性片の重力による初期たわみを防ぐため鉛直に立てた場合を考え, 自重による横挫屈の影響を検討した. 曲げのモードとして, 重力を考慮しないで, 空気力としてスレンダ翼理論を弾性力として梁理論を用いた解析からえられた静的空力発散モードを用いた. それに対応するねじりのモードを決定するため, 横挫屈の解析の基礎式を用いた. ねじりのモードは項の多い長い式となった.

エネルギー法による近似解析によって, 自重による横挫屈の影響を勘定に入れた静的空力発散速度の表現式がえられた. 鉛直に立てて支持された弾性片が横挫屈の出現する条件に近づくとき静的空力発散速度は低下する. 横挫屈が誘導する静的空力発散を定量的に予測した.

小川哲也および山田博行の諸兄の本研究への熱心な協力に深く感謝します.

参 考 文 献

- 1) Yamamoto, Y.: Aeroelastic Divergence of Front-Free-Aft-Fixed Elastic Strip Parallel to Uniform Flow, Trans. Jpn. Soc. Aero. Space Sci., **31** (1989), pp. 188-194.

- 2) Jones, R. T.: Properties of Low-Aspect-Ratio Pointed Wings at Speeds below and above the Speed of Sound, NACA Rep. 835, 1946, pp. 59-63.
- 3) Miles, J. W.: Slender Body Theory for Supersonic Unsteady Flow, J. Aeronaut. Sci., **19** (1952), pp. 280-281.
- 4) Lamer, J. E. and Gloss, B. B.: Subsonic Aerodynamic Characteristics of Interacting Lifting Surface with Separated Flow around Sharp Edges Predicted by a Vortex-Lattice Method, NASA TN D-7921, 1975, pp. 1-89.
- 5) Katz, J. and Plotkin, A.: Low-Speed Aerodynamics from Wing Theory to Panel Method, McGraw-Hill, New York, 1991.
- 6) チモシェンコ: 挫屈理論, コロナ社, 東京, 1953.
- 7) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M.: Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, Auckland, 1961.
- 8) Celniker, L., Carlson, R. M. and Donham, R. E.: Stopped and Slow Rotor Aircraft Configuration, National Aeronautics and Space Engineering and Manufacturing Meeting, 650805, 1965, pp. 1-8.
- 9) 山本雄三: 長手方向流れ内の一様片持棒の空力弾性問題, 岐阜高専紀要, **13** (1978), pp. 7-14.
- 10) 山本雄三: 一様流中の細長い片持弾性片のフラッタの解析, 日本航空宇宙学会誌, **30** (1982), pp. 79-83.
- 11) 山本雄三: 「一様流中の細長い片持弾性片のフラッタの解析」の訂正, 日本航空宇宙学会誌, **35** (1987), p. 276.
- 12) Hancock, G. J.: The Static Aeroelastic Deformation of Slender Configurations (Part I) Some Elementary Concepts of Static Deformation, Aeronaut. Q., **XII** (1961), pp. 293-308.
- 13) Hancock, G. J.: The Static Aeroelastic Deformation of Slender Configurations (Part II) Some Calculations on Slender Plate Aircraft, Including Non-Linear Aerodynamics, Aeronaut. Q., **XII** (1961), pp. 372-394.
- 14) Hancock, G. J.: The Static Aeroelasticity of Slender Configuration (Part III) Static Stability, Aeronaut. Q., **XIV** (1963), pp. 75-104.
- 15) Hancock, G. J.: The Static Aeroelastic Deformation of Slender Configurations (Part IV) Manoeuver Theory, Aeronaut. Q., **XIV** (1963), pp. 311-330.
- 16) 市川輝雄: 細長い翼胴結合体の空力弾性的不安定について, 日本航空学会誌, **8** (1960), pp. 1-6.
- 17) 市川輝雄: 翼胴結合体のフラッタについて (マッハ数の影響), 日本航空学会誌, **8** (1960), pp. 185-188.
- 18) 池田 健: ボディ・フラッタの近似解析 (第1報), 日本航空学会誌, **7** (1959), pp. 237-241.
- 19) 池田 健: ボディ・フラッタの近似解析 (第2報), 日本航空学会誌, **7** (1959), pp. 265-269.
- 20) 池田 健: ロケットのボディ・ダイバージェンスについて, 日本航空学会誌, **7** (1959), pp. 296-299.
- 21) Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M.: Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York, 1980, pp. 184-185.

Appendix A 重力の影響を考慮しない場合の解析 —微分方程式による解析—

弾性片の $0 < x < l$ に働く空気力はスレンダ翼理論^{2,3)}によれば,

$$F_{\text{air1}} = -V^2 m_{\text{air}} d^2 u / dz^2$$

弾性片の初期迎え角が零で, 弾性片に加わる力が空気力のみとすると, 梁理論により

$$EI d^4 u / dz^4 = F_{\text{air1}}$$

となり, 以上の関係より次の微分方程式をうる.

$$d^4 u / dz^4 + k^2 d^2 u / dz^2 = 0 \quad (\text{A. 1})$$

ここで

$$k^2 = V^2 m_{\text{air}} / EI \quad (\text{A. 2})$$

$z=0$ が固定端であることから, 境界条件は

$$z=0 \text{ で } u = du/dz = 0 \quad (\text{A. 3})$$

$z=l$ は自由端であるため, 曲げモーメントは働かない.

$$z=l \text{ で } d^2 u / dz^2 = 0 \quad (\text{A. 4})$$

$z=l$ で空気の見掛けの質量 m_{air} がステップ関数状に変化する. Jones²⁾によれば

$$\begin{aligned} \text{揚力 } l_t &= V \alpha (dm_{\text{air}} / dt) \\ &= V \alpha (d/dz)(dz/dt) m_{\text{air}} \\ &= -V^2 \{ du/dz(z=l) \} (d/dz) m_{\text{air}} \\ (\because \alpha &= du/dz(z=l), \quad dz/dt = -V) \end{aligned}$$

の関係があるので, $z=l$ での変化

$$(d/dz) m_{\text{air}}(z=l) = -\delta(z=l) m_{\text{air}}$$

に関連した荷重が加わる. ここで δ はディラックのデルタ関数. デルタ関数状の分布荷重は集中荷重であるため,

$$S = V^2 \{ du/dz(z=l) \} m_{\text{air}} = -EI d^3 u / dz^3$$

となり

$$z=l \text{ で } d^3 u / dz^3 = -k^2 du/dz \quad (\text{A. 5})$$

微分方程式(A. 1)の一般解は

$$u = A \cos kz + B \sin kz + Cz + D$$

境界条件式(A. 3), (A. 4), (A. 5)から $A=B=C=D=0$ 以外の解を有する条件は

$$\cos(kl) = 0 \quad (\text{A. 6})$$

となり,

$$kl = \pi/2, k = (3/2)\pi, \dots \quad (\text{A. 6})'$$

式(A. 6)の $k > 0$ の最も小さい根が最も低い静的空力発散速度を与える.

$$k_{\text{crit}} l = V l \sqrt{m_{\text{air}} / EI} = \pi/2$$

または

$$V_{\text{div}} = (\pi/2)(1/l) \sqrt{EI / m_{\text{air}}} \quad (\text{A. 7})$$

静的空力発散モードは

$$u = A(\cos kz - 1)$$

をうる. または

$$u_{\text{div}} = 1 - \cos \{ (\pi/2)(z/l) \}$$

自由端の変位を a とすると

$$u = a[1 - \cos \{ (\pi/2)(z/l) \}] \quad (\text{A. 8})$$

Appendix B 曲げの変形モード式(2.1)に対応する ねじりの変形モード β の決定

曲げの変形モードとして, 式(2.1)

$$u = a[1 - \cos \{ (\pi/2)(z/l) \}]$$

を採用する. 横挫屈の基礎の式(4.3)と式(2.1)より

$$\begin{aligned} C \frac{d\beta}{dz} &= \frac{q}{2}(l-z)^2 \frac{du}{dz} - q \int_z^l \{ u(t) - u(z) \} dt \\ &= \frac{q}{2}(l-z)^2 a \left(\frac{\pi}{2l} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2l} z \right) \\ &\quad - qa(l-z) \cos \left(\frac{\pi}{2l} z \right) + qa \left(\frac{2l}{\pi} \right) \left[1 - \sin \left(\frac{\pi}{2l} z \right) \right] \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dz} &= \frac{qa}{C} \left[\frac{1}{2}(l-z)^2 \left(\frac{\pi}{2l} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2l} z \right) \right. \\ &\quad \left. - (l-z) \cos \left(\frac{\pi}{2l} z \right) + \left(\frac{2l}{\pi} \right) \left\{ 1 - \sin \left(\frac{\pi}{2l} z \right) \right\} \right] \quad (\text{B. 1}) \end{aligned}$$

この式 (B. 1) の $d\beta/dz$ の表現は、本文中でねじりのひずみエネルギーの評価の際に利用した。式 (B. 1) の両辺を z で積分し、 $z=0$ で $\beta=0$ の境界条件を用いて積分定数を定めると、次に示す β の表現をうる。

$$\beta = \frac{qa}{C} \left[-\frac{1}{2}(l-z)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2l}z\right) + \frac{1}{2}l^2 + 3\left(\frac{2l}{\pi}\right)^2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2l}z\right) - 1 \right\} \right]$$

$$+ \left(\frac{2l}{\pi}\right)z - 2\left(\frac{2l}{\pi}\right)(l-z)\sin\left(\frac{\pi}{2l}z\right) \quad (\text{B. 2})$$

この式 (B. 2) の β の表現は本文中で自重のした仕事の評価に用いた。式 (B. 2) を求めるため、文献 21) の式 2.635 の 1, 2 と 3 を用いた。