弾性ロケット及びランチャーの発射時の三次元動的解析^{*1}

Three Dimensional Analysis of Elastic Rocket and Launcher at Launching

竹 内 伸 介^{*2}
Shinsuke TAKEUCHI

Key Words : Launcher, Elastic Vibration, Trajectory Dispersion

Abstract : In this paper, a three-dimensional analysis of launching dynamics of a sounding rocket is investigated. In the analysis, the elastic vibration of the vehicle and launcher is considered. To estimate a trajectory dispersion including the effect of elasticity of the vehicle and launcher, a three-dimensional numerical simulation of a launch is performed. The accuracy of the numerical simulation is discussed and it is concluded that the simulation can estimate the maximum value of the trajectory dispersion properly. After that, the maximum value is estimated for the actual sounding rocket and the value is shown to be within the safety margin for this particular case.

記 号

A : ランチャーレールの単位長さあたりの捻れ角
 b : ロケット中心軸から上段翼端までの距離
 C_{Na} : ロケットの単位長さあたりの法線力係数傾斜
 $\vec{C}_{ji}$: $\vec{C}_{ji} = [[\mu_R(\vec{\eta}_{Ri} \times \vec{\eta}_{Rj})]]_R / m$, 式(28)参照
 $D_{iX}, D_{iY}, D_{iZ}, D_{i\Phi}$: i 番目接触部でのロケットとランチャーの X, Y, Z 方向及び X 軸周りに相対変位
 $D_{iX}^*, D_{iY}^*, D_{iZ}^*, D_{i\Phi}^*$: i 番目接触部でのランチャーの X, Y, Z 方向及び X 軸周りに弾性変形量
 $d_{iX}, d_{iY}, d_{iZ}, d_{iX}, d_{iY}, d_{iZ}$: i 番目接触部でのロケットの X, Y, Z, x, y, z 方向弾性変形量
 E : (X, Y, Z) から (x, y, z) への座標変換行列
 g : 重力加速度
 I_{ij} : $i, j = x, y, z$, ロケットの慣性乗積
 J : ロケットの曲げ剛性
 K_i, K_i^* : i 番目接触部に導入するバネ定数
 m, m_L : ロケット及びランチャーの質量
 N_R, N_L : ロケット及びランチャーの低次元化モデルの次数
 p, q, r : ロケット重心周りに剛体回転角速度の x, y, z 軸周りに成分
 $R_{iX}, R_{iY}, R_{iZ}, R_{i\Phi}, R_{i\Theta}, R_{i\Psi}$: i 番目接触部でロケットがランチャーに及ぼす X, Y, Z 方向の力と各軸周りのモーメント, 第3図参照
 $r_{iX}, r_{iY}, r_{iZ}, r_{i\Phi}, r_{i\Theta}, r_{i\Psi}$: i 番目接触部でランチャーがロケットに及ぼす x, y, z 方向の力と各軸周りのモーメント

S_D : 法線力係数傾斜に対する基準断面積
 T : ロケットの推力
 v, v_x, v_y, v_z : ロケット重心速さとその x, y, z 成分
 $\vec{w}$: (x, y, z) 座標系で見たロケットの弾性変形
 X, Y, Z : 静止座標系
 x, y, z : ロケットに固定された座標系
 X_{CG}, Y_{CG}, Z_{CG} : ロケット重心位置の X, Y, Z 成分
 $X_{CG0}, Y_{CG0}, Z_{CG0}$: ロケット重心位置の初期値
 X_{RCGi} : i 番目接触部でロケットがランチャーと接触しなくなる時の重心の X 座標
 x_1, x_2, x_T : 力 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, T$ 作用点の x 座標, 第3図参照
 α_y, α_z : xy, xz 平面内の機体中心軸接線方向に対する気流の流入角
 $\Delta\psi, \Delta\theta$: 方位角, 迎角方向軌道分散量
 ζ_{Ri}, ζ_{Li} : ロケット及びランチャーの i 次モード減衰比
 $\eta_{RiX}, \eta_{RiY}, \eta_{RiZ}, \eta_{Ri\Phi}, \eta_{Ri\Theta}, \eta_{Ri\Psi}$: ロケットの i 次モード形状の x, y, z 方向及び各軸周りに成分
 $\eta_{LiX}, \eta_{LiY}, \eta_{LiZ}, \eta_{Li\Phi}, \eta_{Li\Theta}, \eta_{Li\Psi}$: ランチャーの i 次モード形状の X, Y, Z 方向及び各軸周りに成分
 ξ_{Ri}, ξ_{Li} : ロケット及びランチャーの i 次モード変位
 ω_{Ri}, ω_{Li} : ロケット及びランチャーの i 次モード角振動数
 Θ_{Li} : X 軸と水平面のなす角度
 Φ, Θ, Ψ : (x, y, z) 座標系の向きを表すオイラー角
 ρ_a : 空気密度
 μ_i : i 番目接触部の摩擦係数
 μ_R, μ_L : ロケット及びランチャーを構成する梁の線密度
 $[[\dots]]_R, [[\dots]]_L$: ロケット及びランチャーを構成する梁の中心軸に沿った積分

^{*1} © 2001 日本航空宇宙学会
平成 12 年 11 月 27 日原稿受理

^{*2} 東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻

1. はじめに

多くの観測ロケット及び宇宙科学研究所の M-V 型に代表される一部の衛星打ち上げロケットでは、ロケットが一定の速度を得るまで支持するランチャーと呼ばれる発射台が使用されている。発射にランチャーを用いる場合、ロケットとランチャーの相互干渉によって生じる弾性振動による荷重や軌道分散について考慮する必要がある。多くの場合ランチャーはある鉛直面に対して対称であり、ロケットは同じ鉛直面に対して対称な直線のレールを用いて発射される。この場合ランチャーの中心線とロケットの重心が同一の鉛直面内となるため、理想的な状況では鉛直面外方向の力は作用せず、発射時の運動もその鉛直面内の運動が支配的となる。そこで従来の研究では、「発射時のロケット及びランチャーの運動は発射方向を含む鉛直面内に拘束された二次元問題である」としてこの運動の解析を行っており、またその解法で十分な結果が得られている^{1,2)}。

しかし一部のロケットにおいてはロケットとランチャーが特殊な形状をしており大きな鉛直面外方向の力が作用するため、三次元問題として解析を行う必要がある。本論文の目的は、そのような例外に対する三次元問題の解法を提案することである。本論文でモデルとして扱う Viper と呼ばれる観測ロケットはその例外の一つである。Viper ロケット及びランチャーを第1図に示す。

Viper は第1図に示す2段式ロケットである。Viper の発射には同図に示す螺旋状レールを持ったランチャーを用いる。なお以降レール中心軸とは螺旋状レールの螺旋の中心軸を指すものとする。螺旋状レールの断面を第2図に示す。なお同図には、ロケットからレールに及ぼされる力が太矢印で示されている。(2.3.5節参照) レール内面には上段部の翼をはめ込む切欠があり、発射時には翼はレールに沿って運動するようになっている。下段部モーター最後部は他の部分より径が大きく、その部分もレール内面と接

触する。このとき下段部の翼はそれぞれレールの間に位置し、レールと干渉しないようになっている。またレール最後部には落下防止用金具があり、発射前のロケット後端を支える。発射時には上段の翼が螺旋状のレールに沿って運動するため、ロケットにスピンの与えられる。逆にこの反力がレールに作用し、ランチャーは鉛直面外にも変形する。またロケット自身もスピンするため機体側でもピッチ、ヨーのカップリングが生ずる。このため三次元問題として運動の解析を行う必要がある。

実際の Viper の打ち上げにおいてレーダー捕捉に失敗した例があり、そのときロケットとランチャーの弾性変形により予期した以上の軌道分散が生じた可能性が考えられた。そこで本論文ではロケットとランチャーの弾性変形を含む発射時の運動の解析を三次元で行い、弾性変形に起因する軌道分散量の推定を行う。

2. 数値シミュレーション

2.1 数学モデル 参考文献1, 2)には、モード法により低次元化したモデルを用いて、1節で述べた二次元問題としての発射時の運動を精度良く予測できることが示されている。本論文でも同様にモード法を用いて低次元化を行う。固有振動モードの導出には、ロケットは1本、ランチャーは5本の梁で構成された第3図に示す数学モデルを用いる。

ロケットがランチャーから離脱するまでは、ロケット及びランチャーは互いに接触しており、互いに力を及ぼしあっている。本論文ではこの接触部分は仮想的な質量を持たないバネで近似し、力はそのバネを介して伝達されるとする。またこのバネは機体に固定されており、バネを介した力及びモーメントはレール中心軸及び機体中心軸上に作用すると仮定する。

2.2 座標系定義 解析には、地上に固定された静止座標系 (X, Y, Z) と、ロケットに固定された動座標系 (x, y, z) を用いる。両者はともに直交座標系とする。第3図に数学モデル及び座標系を示す。なお本論文ではロケットの

第1図 Viper ロケット及びランチャー

第2図 前後部接触点の断面図

飛距離が短いため、地球が球であることの影響や地球の公転/自転の影響は無視して解析を行う。

座標系 (X, Y, Z) の原点は、ランチャーが弾性変形していない状態のレール中心軸上の、ある代表点にとる。原点からロケットを発射する方向を正として X 軸をとる。 Z 軸は鉛直面内に重力の Z 方向成分が負となるようにとる。 Y 軸は座標系が右手系となるようにとる。

座標系 (x, y, z) の原点はロケットの重心にとる。機体中心軸に沿って前方が正になるように x 軸をとる。 z 軸は、ロケット発射前の釣合状態で z 軸が鉛直面内に含まれ、かつ、重力の z 方向成分が負となるようにとる。 y 軸は座標系が右手系となるようにとる。このとき、ロケットは軸対称なので、 x, y, z 軸は慣性主軸と一致する。また、発射前のロケットとランチャーの釣合状態におけるロケットの重心位置を $(X_{CG0}, Y_{CG0}, Z_{CG0})$ とする。

両座標系の相対的な関係は、原点の相対位置とオイラー角を用いて表す。オイラー角 (Φ, Θ, Ψ) は、 Z 軸周りの角度 Ψ 、 Y 軸周りの角度 Θ 、 X 軸周りの角度 Φ の順にとる。このとき、 $\Theta = \pi/2$ が特異点となるが、実際の発射時にはピッチ、ヨー方向の角度変化 Θ, Ψ は小さいので、取り扱いの障害とはならない。

2.3 運動方程式 ロケットの剛体自由度は固有振動数が 0 の振動モードとして扱うことも可能であるが、現実の物理量としての理解を容易にするために、剛体自由度は弾性振動モードとは別に運動方程式を立てる。剛体自由度で決まる重心位置及び姿勢に、弾性振動モードによる変形を加えて、ロケットの弾性変形を含めた運動を表現する。

また、ロケット固定の座標系 (x, y, z) が静止座標に対して角速度 $\dot{\omega} = (p, q, r)$ で回転している場合、 (x, y, z) 座標系での見かけの時間微分を $\delta/\delta t \equiv (\dot{})$ とすると、あるベクトル量 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ に対する時間微分が

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\delta\vec{v}}{\delta t} + \dot{\omega} \times \vec{v} \quad (1)$$

となることを考慮して運動方程式を導く。

第3図 数学モデル及び座標系

2.3.1 ロケット剛体自由度の運動方程式 ロケットに作用する力は、推力、重力、ランチャーとの接触による反力及び空気力と考える。ここでは推力は作用点における機軸の接線方向に、空気力は局所迎角に比例し x 軸に対して垂直に作用するとする。また、空気力の抗力成分は無視できるとする。 x, y, z 軸は慣性主軸であるので $I_{ij} = 0$ ($i, j = x, y, z; i \neq j$) を考慮し、 $\Theta, \Psi \ll 1$ と、弾性変形は微小であることを用いて式を簡略化すると、剛体自由度の運動方程式は次の式となる。

$$m(\dot{v}_x + qv_z - rv_y) = T - mg \sin(\Theta_{Li} - \Theta) + r_{1x} + r_{2x} \quad (2)$$

$$m(\dot{v}_y + rv_x - pv_z) = \left[\sum_{i=1}^{N_R} \eta_{Ri\psi}(x_T) \xi_{Ri} \right] T - mg \cos(\Theta_{Li} - \Theta) \sin \Phi + r_{1y} + r_{2y} + \frac{1}{2} \rho_a v^2 [[C_{Na}(x) S_D \alpha_y(x)]]_R \quad (3)$$

$$m(\dot{v}_z + pv_y - qv_x) = - \left[\sum_{i=1}^{N_R} \eta_{Ri\theta}(x_T) \xi_{Ri} \right] T - mg \cos(\Theta_{Li} - \Theta) \cos \Phi + r_{1z} + r_{2z} + \frac{1}{2} \rho_a v^2 [[C_{Na}(x) S_D \alpha_z(x)]]_R \quad (4)$$

$$I_{xx} \dot{p} + (I_{zz} - I_{yy}) q r = r_{1\phi} + r_{2\phi} \quad (5)$$

$$I_{yy} \dot{q} + (I_{xx} - I_{zz}) r p = r_{1\theta} + r_{2\theta} - x_1 r_{1z} - x_2 r_{2z} + x_T \left[\sum_{i=1}^{N_R} \eta_{Ri\theta}(x_T) \xi_{Ri} \right] T - \frac{1}{2} \rho_a v^2 [[C_{Na}(x) S_D \alpha_z(x)]]_R + \left[\sum_{i=1}^{N_R} \eta_{Riz}(x_T) \xi_{Ri} \right] T \quad (6)$$

$$I_{zz} \dot{r} + (I_{yy} - I_{xx}) p q = r_{1\psi} + r_{2\psi} + x_1 r_{1y} + x_2 r_{2y} + x_T \left[\sum_{i=1}^{N_R} \eta_{Ri\psi}(x_T) \xi_{Ri} \right] T + \frac{1}{2} \rho_a v^2 [[C_{Na}(x) S_D \alpha_y(x)]]_R - \left[\sum_{i=1}^{N_R} \eta_{Riy}(x_T) \xi_{Ri} \right] T \quad (7)$$

ここで $r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}, r_{i\phi}, r_{i\theta}, r_{i\psi}$ ($i=1, 2$) は、ランチャーとの接触による反力であり、次の式で表される。

$$(r_{ix}, r_{iy}, r_{iz})^t = -E(R_{ix}, R_{iy}, R_{iz})^t \quad (8)$$

$$(r_{i\phi}, r_{i\theta}, r_{i\psi})^t = -E(R_{i\phi}, R_{i\theta}, R_{i\psi})^t \quad (9)$$

ただし E はオイラー角 (Φ, Θ, Ψ) を用いて次の式で表される (X, Y, Z) 座標系から (x, y, z) 座標系への変換行列である。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \Psi & -\Theta \\ \Theta \sin \Phi - \Psi \cos \Phi & \cos \Phi & \sin \Phi \\ \Theta \cos \Phi + \Psi \sin \Phi & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (10)$$

また $\alpha_y(x), \alpha_z(x)$ はそれぞれ xy, xz 平面内での局所迎角であり、次のように表される。

$$\alpha_y(x) = -\tan^{-1} \left(\frac{v_y + x r}{v} + \sum_{j=1}^{N_R} \frac{\eta_{Rjy}(x) \dot{\xi}_{Rj}}{v} \right) + \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{Rj\psi}(x) \dot{\xi}_{Rj} \quad (11)$$

$$\alpha_z(x) = -\tan^{-1} \left(\frac{v_z - x q}{v} + \sum_{j=1}^{N_R} \frac{\eta_{Rjz}(x) \dot{\xi}_{Rj}}{v} \right) - \sum_{j=1}^{N_R} \eta_{Rj\theta}(x) \dot{\xi}_{Rj} \quad (12)$$

2.3.2 オイラー角及びロケット重心位置の時間微分
オイラー角の時間微分及びロケット重心位置の時間微分は次の式で表される.

$$\dot{\Phi} = p + q\Theta \sin \Phi + r\Theta \cos \Phi \quad (13)$$

$$\dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi \quad (14)$$

$$\dot{\Psi} = q \sin \Phi + r \cos \Phi \quad (15)$$

$$\dot{X}_{CG} = v_x + v_y(\Theta \sin \Phi - \Psi \cos \Phi) + v_z(\Theta \cos \Phi + \Psi \sin \Phi) \quad (16)$$

$$\dot{Y}_{CG} = v_x\Psi + v_y(\Theta \Psi \sin \Phi + \cos \Phi) + v_z(\Theta \Psi \cos \Phi - \sin \Phi) \quad (17)$$

$$\dot{Z}_{CG} = -v_x\Theta + v_y \sin \Phi + v_z \cos \Phi \quad (18)$$

2.3.3 ロケットの振動モードの運動方程式 ロケットの固有角振動数 ω_{Ri} , モード形状 η_{Rix} , η_{Riy} 等は, ロケットが静止した状態で求めたものである. この固有振動モードを用いて, 回転するロケットの弾性振動を表現する方程式を求める. そのためにまず, ロケットを表す梁の弾性変形 $\dot{w}$ の運動方程式を, 回転する (x, y, z) 座標系で記述した式を求める. 座標系 (x, y, z) が角速度 $\dot{\omega} = (p, q, r)$ で回転しているとき, 梁の弾性変形による運動エネルギー M と歪みエネルギー Π は次の式で表される.

$$M = \left[\left[\frac{1}{2} \mu_R (\dot{w} + \dot{\omega} \times w) \cdot (\dot{w} + \dot{\omega} \times w) \right] \right]_R \quad (19)$$

$$\Pi = \left[\left[\frac{1}{2} J \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right) \right] \right]_R \quad (20)$$

ただし J は梁の曲げ剛性であり, また, 梁は十分に細く梁の断面の回転慣性の項は無視できるとした. $L = M - \Pi$ で定義されるラグランジュ関数 L から変分原理を用いて $\dot{w}$ の運動方程式を導くと, 次の式が得られる.

$$\mu_R \{ \ddot{w} + \dot{\omega} \times \dot{w} + 2\dot{\omega} \times \dot{w} + \dot{\omega} \times (\dot{\omega} \times w) \} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(J \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right) = \vec{f} \quad (21)$$

ただし $\vec{f}$ は, 梁に作用する外力を (x, y, z) 座標系で記述した力である.

ここで弾性変形 $\dot{w}$ を固有振動モードを用いて次のように近似する.

$$\dot{w} = \sum_{i=1}^{N_R} \tilde{\eta}_{Ri} \xi_{Ri} \quad (22)$$

ただし, $\tilde{\eta}_{Ri}$ は次の式で表されるベクトルである.

$$\tilde{\eta}_{Ri} = (\eta_{Rix}, \eta_{Riy}, \eta_{Riz}) \quad (23)$$

式(22)を式(21)に代入して整理すると,

$$\sum_{i=1}^{N_R} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left(J \frac{d^2 \tilde{\eta}_{Ri}}{dx^2} \right) \xi_{Ri} + \tilde{\eta}_{Ri} \mu_R \ddot{\xi}_{Ri} + \mu_R \dot{\omega} \times \tilde{\eta}_{Ri} \xi_{Ri} + 2\mu_R \dot{\omega} \times \tilde{\eta}_{Ri} \dot{\xi}_{Ri} + \mu_R \dot{\omega} \times (\dot{\omega} \times \tilde{\eta}_{Ri}) \xi_{Ri} \right\} = \vec{f} \quad (24)$$

となる. 両辺と $\tilde{\eta}_{Rj}$ の内積をとって積分し, $\tilde{\eta}_{Ri}$ が

$$[[\mu_R \tilde{\eta}_{Rj} \cdot \tilde{\eta}_{Ri}]]_R = m \delta_{ij} \quad (25)$$

$$[[\tilde{\eta}_{Rj} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(J \frac{d^2 \tilde{\eta}_{Ri}}{dx^2} \right)]]_R = m \omega_{Rj}^2 \delta_{ij} \quad (26)$$

のように直交化していることを考慮すると,

$$m(\omega_{Rj}^2 \xi_{Rj} + \dot{\xi}_{Rj}) - m \dot{\omega} \cdot \dot{\omega} \xi_{Rj} = \sum_{i=1}^{N_R} (m \tilde{C}_{ij} \cdot \dot{\omega} \xi_{Ri} + 2m \tilde{C}_{ij} \cdot \dot{\omega} \dot{\xi}_{Ri}) + [[\tilde{\eta}_{Rj} \cdot \vec{f}]]_R \quad (27)$$

を得る. ここで δ_{ij} はクロネッカーの δ であり, $\tilde{C}_{ij}$ は

$$m \tilde{C}_{ij} = [[\mu_R (\tilde{\eta}_{Ri} \times \tilde{\eta}_{Rj})]]_R \quad (28)$$

と定義されるベクトルである. モード形状 $\tilde{\eta}_{Ri}$ は自由境界の条件で求めたモードを用いるので, 各振動モードは剛体変位を表す一様変位のモードと質量に関して直交している. そのため, 質量に比例する体積力である重力は各振動モードに影響を与えない. そこで外力 $\vec{f}$ としてランチャーとの接触による反力, 推力, 及び空気力を考慮し, さらにモード減衰 ζ_{Ri} を加えて式(27)を整理すると, ロケットの固有振動の運動方程式は次の式で表される.

$$m(\ddot{\xi}_{Ri} + 2\zeta_{Ri} \omega_{Ri} \dot{\xi}_{Ri} + \omega_{Ri}^2 \xi_{Ri}) = \sum_{j=1}^{N_R} (m \tilde{C}_{ji} \cdot \dot{\omega} \xi_{Rj} + 2m \tilde{C}_{ji} \cdot \dot{\omega} \dot{\xi}_{Rj}) + m \dot{\omega} \cdot \dot{\omega} \xi_{Ri} + \mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_{Ri}(x_1) + \mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_{Ri}(x_2) + T \left[\sum_{j=1}^{N_R} \eta_{Rj\psi}(x_T) \xi_{Rj} \right] \eta_{Riy}(x_T) - T \left[\sum_{j=1}^{N_R} \eta_{Rj\theta}(x_T) \xi_{Rj} \right] \eta_{Riz}(x_T) + \frac{1}{2} \rho_a v^2 [[C_{Na}(x) S_D \eta_{Riz}(x) a_z(x)]]_R + \frac{1}{2} \rho_a v^2 [[C_{Na}(x) S_D \eta_{Riy}(x) a_y(x)]]_R \quad (29)$$

ここで $\mathbf{r}_i$, $\boldsymbol{\eta}_{Ri}$ ($i=1, 2$) は, 次の式で定義される6次元のベクトルである.

$$\mathbf{r}_i = (r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}, r_{i\phi}, r_{i\theta}, r_{i\psi}) \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{Ri} = (\eta_{Rix}, \eta_{Riy}, \eta_{Riz}, \eta_{Ri\phi}, \eta_{Ri\theta}, \eta_{Ri\psi}) \quad (31)$$

2.3.4 ランチャーの振動モードの運動方程式 ランチャーに作用する力として重力及びロケットとの接触による反力を考える. このとき, ランチャーの弾性振動モードの運動方程式は次の式で表される.

$$m_L(\ddot{\xi}_{Li} + 2\zeta_{Li} \omega_{Li} \dot{\xi}_{Li} + \omega_{Li}^2 \xi_{Li}) = \mathbf{R}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_{Li}(x_1 + X_{CG} + X_{CG0}, 0, 0) + \mathbf{R}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_{Li}(x_2 + X_{CG} + X_{CG0}, 0, 0) - [[\mu_L \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta}_{Li}(X, Y, Z)]]_L \quad (32)$$

なお, ロケットの場合は一本の梁であるので各関数の引数には x のみを用いているが, ランチャーは三次元の構造物であるので, (32)式では関数の引数に X, Y, Z の3つを用いている. ここで, (32)式右辺第1,2項の $\boldsymbol{\eta}_{Li}$ の Y, Z 引数が0であるのはレール中心軸上のモード形状であることを示し, また, 第3項はランチャー全体にわたる積分であることを示している. ここで $\mathbf{R}_i$, $\boldsymbol{\eta}_{Li}$, $\mathbf{g}$ ($i=1, 2$) は, 次の式で定義される6次元のベクトルである.

$$\mathbf{R}_i = (R_{ix}, R_{iy}, R_{iz}, R_{i\phi}, R_{i\theta}, R_{i\psi}) \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{Li} = (\eta_{Lix}, \eta_{LiY}, \eta_{Liz}, \eta_{Li\phi}, \eta_{Li\theta}, \eta_{Li\psi}) \quad (34)$$

$$\mathbf{g} = (g \sin \theta_{Li}, g \cos \theta_{Li}, 0, 0, 0) \quad (35)$$

2.3.5 ロケットとランチャーの接触による反力 ロケットとランチャーの接点は1節で述べたように前後2カ所ある. 反力 $\mathbf{R}_i$ の添字 $i=1$ のときは前部接点で, 添字 $i=2$ のときは後部接点で発生する力であることを示す.

第2図上半に $\mathbf{R}_1$ が生じる前部接点のロケットとレールの断面, 及びその接点でレールに作用する力を示す. 特殊なレール断面形状のため, 翼とレールは, 翼面及び翼端面

で接触している．第2図左上のYZ面に含まれる力の合力は，レール中心軸に垂直なY,Z方向の力 R_{1Y}, R_{1Z} 及びレール中心軸周りのモーメント $R_{1\phi}$ で表すことができる．しかし実際の螺旋状レールはロケットの翼面に対して斜めに接触している（第2図右上参照）．発生する力はレールの面に垂直であるので，その分力としてレール中心軸に垂直な成分の他に平行な（X方向）成分が得られる．ここで計算の簡略化のため，X方向成分は4つの接点で等しく，Y,Z軸周りのモーメントを発生しないと仮定する．また，翼端面の接触による力の作用線はレール中心軸を通りレール中心軸周りのモーメントを発生しないと仮定する．このとき，翼面の接触により発生する力のX方向成分は $R_{1\phi}/b \cdot \tan Ab$ で与えられる．2.1節で述べたように，これらの力はバネを用いてモデル化する． R_{1Y}, R_{1Z} を与えるバネ定数を K_1 ， $R_{1\phi}$ を与えるバネ定数を K_1^* とする．

第2図下半に $\mathbf{R}_2$ が生じる後部接点のロケットとレールの断面，及びその接点でレールに作用する力を示す．これらの力の作用線も $\mathbf{R}_1$ の場合と同様にレール中心軸を通ると仮定すると，合力の成分として R_{2X}, R_{2Y}, R_{2Z} が得られる． R_{2Y}, R_{2Z} を与えるバネ定数を K_2 ， R_{2X} を与えるバネ定数を K_2^* とする．

以上の力以外に，各接点で発生するX方向の摩擦力（係数 μ_i ）を考慮する．それ以外の力 $\mathbf{R}_i$ ($i=1, 2$)の成分 $R_{2\phi}, R_{i\phi}, R_{i\psi}$ ($i=1, 2$)は0とする．以上の記述を整理すると， R_{1Y}, R_{1Z}, R_{1X} ($i=1, 2$)は下記の式(36)から(38)の式で表される．

$$R_{1Y} = K_1 D_{1Y} \quad (36)$$

$$R_{1Z} = K_1 D_{1Z} \quad (37)$$

$$R_{1X} = \frac{R_{1\phi}}{b} \tan Ab + \mu_1 \left(|R_{1Y}| + |R_{1Z}| + \left| \frac{R_{1\phi}}{b} \right| \right) \quad (38)$$

また，第2図に示したレール形状のため，実際にはレールに対して ϕ の正方向のトルクしか作用しないことを考慮すると， $R_{1\phi}$ は次のように場合分けされる．

$$R_{1\phi} = \begin{cases} K_1^* D_{1\phi} & D_{1\phi} \geq 0 \\ 0 & D_{1\phi} < 0 \end{cases} \quad (39)$$

同様に，第2図に示す形状のため，落下防止用金具による力はXの負方向にしか作用しないことを考慮すると， R_{2X} は次のように場合分けされる．

$$R_{2X} = \begin{cases} K_2^* D_{2X} + \mu_2 (|R_{2Y}| + |R_{2Z}|) & D_{2X} \leq 0 \\ \mu_2 (|R_{2Y}| + |R_{2Z}|) & D_{2X} > 0 \end{cases} \quad (40)$$

ここで $D_{1Y}, D_{1Z}, D_{1\phi}, D_{2X}$ はロケット，ランチャー間の相対変位量であり，次の式で表される．

$$D_{1Y} = Y_{CG} - Y_{CG0} + \psi X_i + d_{1Y} - D_{1Y}^* \quad (41)$$

$$D_{1Z} = Z_{CG} - Z_{CG0} - \theta X_i + d_{1Z} - D_{1Z}^* \quad (42)$$

$$D_{1\phi} = \phi - A(X_{CG} - X_{CG0}) - D_{1\phi}^* \quad (43)$$

$$D_{2X} = X_{CG} - X_{CG0} + d_{2X} - D_{2X}^* \quad (44)$$

ここで (d_{1X}, d_{1Y}, d_{1Z}) ($i=1, 2$)はロケットの弾性変形による変位量であり，次の式で表される．

$$(d_{1X}, d_{1Y}, d_{1Z})^t = E^{-1}(d_{1x}, d_{1y}, d_{1z})^t \quad (45)$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{N_k} \eta_{Rkj}(x_i) \xi_{Rk} \quad (j=x, y, z) \quad (46)$$

また D_{ij}^* ($i=1, 2, j=X, Y, Z, \phi$)はランチャーの弾性変形による変位量であり，次の式で表される．

$$D_{ij}^* = \sum_{k=1}^{N_L} \eta_{Lkj}(X_{CG0} + X_{CG} + x_i, 0, 0) \xi_{Lk} \quad (47)$$

ただし以上の力はロケットがランチャーから離脱するまで，即ち $X_{CG} < X_{RCGi}$ ($i=1, 2$)のときに限り発生するものである． $X_{CG} \geq X_{RCGi}$ ($i=1, 2$)のときは $\mathbf{R}_i=0$ ($i=1, 2$)である．なおViperでは，前後部の接点はほぼ同時にランチャーから離脱するように設計されており， $X_{RCG1}=2.50$ (m), $X_{RCG2}=2.46$ (m)である．

3. 計測データとの比較

3.1 実飛翔時のデータとの比較 2.3節に示した式(2)から(47)を数値積分することにより，シミュレーションを行う．数値シミュレーションに用いるロケットの固有振動モードは，ロケットの図面から密度と剛性を求めて計算した．ロケットの基本寸法と3次までの固有振動数及びモード形状を第4図に示す．ロケットは軸対称であるので，同一周波数に xy 面内と xz 面内で変形する2つのモードが存在する．またランチャーの固有振動モードは，図面に基づく値に振動試験を行って修正を加えたモードを用いた．ランチャーの螺旋状レール部の基本寸法と3次までの固有振動数及びモード形状（レール部のみ）を第5図に示す．ランチャーの場合は，1次モードと3次モードはレールがXY面内で変形するモード，2次モードはレールがXZ面内で変形するモードとなっている．

次に K_1, K_2, K_1^*, K_2^* であるが，これらは接触部に仮想的に導入されたバネのバネ定数であるので，厳密な値を決定することは困難である．ここでは接触部に関連する構造物のうち，最も剛性の低い構造物から決まるバネ定数が支配的であるとしてバネ定数を推定した． K_1 については，上段翼が取り付けられているアルミ製円筒（半径22.5(mm)，厚さ0.5(mm)，長さ80(mm)，両端固定）が母線に沿って一様な半径方向線荷重を受けた場合の力と変位の関係から $K_1=2.0 \times 10^6$ (N/m)とした．同様に K_2 についてはレールと接触している胴体最後部アルミ製円筒（半径57.5(mm)，厚さ1.0(mm)，長さ25(mm)，両端固定）が母線に沿って一様な半径方向線荷重を受けた場合の力と変位の関係から $K_2=5.0 \times 10^6$ (N/m)とした．また K_1^* については，4枚のアルミ製上段翼（厚さ2(mm)，平均翼弦60(mm)，翼部分の幅42(mm)）の曲げ剛性とロケットの中心軸から翼端までの距離65(mm)から $K_1^*=3.5 \times 10^3$ (Nm/rad)， K_2^* については，鋼製金具の寸法（厚さ15(mm)，幅15(mm)，長さ200(mm)）から $K_2^*=1.0 \times 10^6$ (N/m)とした．また，このシミュレーションでは60 (Hz)までの振動モード（ロケット側6モード，ランチャー側9モード）を用いた．

シミュレーションの精度を検証するため，Viper 2号機の打ち上げ時にランチャー上でY,Z方向加速度及び

第4図 ロケットの固有振動モード

第5図 ランチャーの固有振動モード

Y, Z 方向変位を実測した。加速度は抵抗線型加速度計, Y 方向変位は高速度ビデオカメラ, Z 方向変位は非接触光学変位計を用いて計測した。

第6~9図に計算値と実測値の比較を示す。なお実測データからは、カットオフ周波数 60 (Hz) のパワースフィルタを用いて、シミュレーションに含まれない高周波成分を除去してある。図中、 $t=0$ (s) がロケット点火時である。 $t=0.1$ (s) 付近で加速度の計算値が不連続に変化している部分があるが、これはロケットがランチャーから離脱する瞬間である。この瞬間に実測値は連続であるのに計算値が不連続となる理由は、本論文の計算ではモード法を用いて高次モードを省略しているため、計算では加速度が不連続となるということと、実測値に不連続性が含まれている場合にも、フィルタ処理のために不連続性が見え難くなるということであると考えられる。また、第7図のZ方向変位では、計測系の特性のため $t=0.17$ (s) 付近で実測データがとぎれている。同様に第6図のY方向変位では、計測系の特性のため 30 (Hz) 以上の振動は実測データに含まれていない。

3.2 計算精度の考察 一般に軌道分散を決定するパラ

第6図 ランチャー Y 方向変位の比較

第7図 ランチャー Z 方向変位の比較

第8図 ランチャー Y 方向加速度の比較

第9図 ランチャー Z 方向加速度の比較

メータは、ランチャーの振動、風の影響、機体のミスアライメント等、多岐にわたる。しかし本論文の目的はロケット及びランチャーの弾性が軌道分散に及ぼす影響の評価である。弾性の影響はロケット及びランチャーの変形及び振動として現れる。本解析によるランチャーの振動の計算結果と実測値との比較は第6~9図に示した。同図を見ると、振動の振幅に関しては実測値に近い値が得られているが、位相に関しては計算結果と実測値との差が大きい。

しかし、振動の位相は弾性のパラメータの影響を大きく受ける。実際に弾性のパラメータを変化させ試算を行うと、バネ定数 K_1 , K_2 , 特に K_1 の変化が振動位相に大きな影響を与えることが判明した。また同時に、 K_1 , K_2 の変化による振動振幅の変化は小さいことも判明した。

これは、 K_1 , K_2 の値を変化させ計算を行うことにより、ロケット及びランチャーの振動の振幅を保ったまま、位相を変化させて軌道分散を計算することが可能であることを示す。その計算から得られた軌道分散の最大値の評価を行えば、それは実際の打ち上げにおいて安全側の評価であ

る．そこでこのシミュレーションを用いて軌道分散の最大値を求める．

4. 軌道分散の推定

4.1 軌道分散の表現 軌道分散の評価は、剛体ランチャーを用いて剛体ロケットを打ち上げた場合の理想的な軌跡との比較により行う．すなわち、弾性を考慮して求めた軌跡と剛体ランチャーで剛体ロケットを打ち上げた場合の軌跡とが一致するランチャー角度を求め、弾性を考慮した場合としない場合とのランチャー角度の差を軌道分散量を表す指標とする．以後方位角方向の軌道分散量は $\Delta\psi$ ，上下角方向の軌道分散量は $\Delta\theta$ と表す．3.1 節の計算例の場合、この指標の値は、 $\Delta\psi=1.1$ (deg)， $\Delta\theta=0.077$ (deg) である．

4.2 軌道分散の推定及び評価 3.1 節で行った K_1 ， K_2 の値の推定は非常に概算的であり、推定精度はオーダーが一致する程度のもと考えられる．そこで K_1 及び K_2 の値を $1/\sqrt{10}$ から $\sqrt{10}$ 倍の間で1桁変化させて計算を行った．第10図及び第11図に方位角方向及び迎角方向の軌道分散の計算結果を示す．

第10図及び第11図を見ると、3.2 節で触れたように、バネ定数 K_1 の変化が軌道分散に大きな影響を与えることがわかる．これは、Viper では前後の接触部がほぼ同時にランチャーから離脱するように設計されているが、この場合、前部の接触点が打ち上げ中に通過する範囲のランチャーレールのモード変形の方が、後部の接触点が通過する範囲のランチャーレールのモード変形に比べて大きいいため、前部の接触点での振動の方が後部の接触点での振動よりもランチャー振動に与える影響が大きく、結果として軌道分散に与える影響も大きくなるためと考えられる．

第10図及び第11図の範囲では、方位角方向の軌道分散の絶対値の最大値は $\Delta\psi=1.46$ (deg)，また上下角方向の軌道分散の絶対値の最大値は $\Delta\theta=0.19$ (deg) である．Viper の風補正計算データからこれらの値を風速に換算すると、それぞれ約 1.5(m/s) 及び 0.6(m/s) 程度の風によって生じる値である．実際の打ち上げは風速 5~6(m) 程度の場合にも行われ、またレーダーの搜索も上下 ± 2 度、左右 ± 4 度の範囲にわたり行われるため、この値は実用上は問題のない値であると言える．

5. 結 論

螺旋状のランチャーレールから発射されるロケットとそのランチャーの運動について、ロケット及びランチャーの弾性を考慮した三次元の運動方程式を定式化し、数値計算結果と実際の打ち上げ時に計測されたデータの比較により数値計算の精度の検討を行った．その結果、本解析法を用いてランチャーの振動の振幅を推定することが可能であり、また特定のパラメータを変化させることにより軌道分

第10図 方位角方向の軌道分散

第11図 上下角方向の軌道分散

散の最大値を求めることが可能であることが判明した．そこで本解析法を用いて Viper ロケットの軌道分散の最大値の推定を行い、ロケット及びランチャーの弾性による軌道分散が実用上問題ない範囲の値であることを確認した．

本研究を進めるにあたり随時適切な助言を頂いた宇宙科学研究所の小野田教授、また実際の飛翔データの計測に協力して頂いた同じく宇宙研の市田助手、橋元技官、富沢技官、下瀬技官に紙面の最後を借りて感謝の意を表します．

参 考 文 献

- 1) Kishi, K., Onoda, J., Minesugi, K. and Nakamura, M.: Dynamic Loads on Mu-Series Satellite Launch Vehicles at Lift Off, AIAA Paper 94-1708, 1994.
- 2) Onoda, J.: The Dynamic Bending Load on a Satellite Launcher Due to Inclined Lift-off, Trans. Jpn. Soc. Aeronaut. Space Sci., **26** (1983), pp. 37-52.