テイラー渦の表計算^{*1}

Taylor Vortices in a Spreadsheet

森 下 悦 生^{*2}
Etsuo MORISHITA

Key Words: Aerodynamics, Vortex, Spreadsheet

Abstract: The Taylor vortices were reproduced in a spreadsheet. Spreadsheets are used extensively in scientific and engineering calculations these days. The cells in a spreadsheet can be regarded as the grids in Computational Fluid Dynamics (CFD). Furthermore, the cells have the iteration function, and are able to represent the physical characters of the flow field for example. The axi-symmetric laminar incompressible Navier-Stokes equations were solved to investigate the Taylor-Couette flow. The calculation procedures were briefly introduced and the computational results were in reasonable agreement with the experimental ones.

1. はじめに

表計算ソフト¹⁾はほとんどのパソコンに標準的に装備されており、近年は計算機能も拡充されているため、科学技術計算にも幅広く用いられている²⁻⁶⁾。筆者は、表計算の各種機能を流体力学に適用することを試みて、解析解、数値解、データ処理などに有効であることを確認している⁷⁻¹¹⁾。流体力学分野への適用のなかでとりわけ興味深いのは、ナビエ・ストークス方程式などの差分解が、比較的容易に得られる場合があることである。これは、表計算のセルが数値流体力学でいう格子に相当し、セル自身に支配方程式の差分形を貼り付けて、物理空間としての性質を付与できるからである。本報告では、二重円筒間に遠心力不安定により発生するテイラー渦を表計算で数値解析する手法の概要について紹介し、あわせて既存の実験結果との対応がよいことを示す。

2. 支配方程式

円筒軸周りの軸対称流れ場の支配方程式は¹²⁾、円周方向変化がないものとして、

連続の式：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

運動量：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (4)$$

ここで、 t ：時間、 r ：半径方向座標、 z ：軸方向座標、 u ：周方向速度、 v ：半径方向速度、 w ：軸方向速度、 p ：静圧、 ν ：動粘性係数、であり、またラプラシアンは

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5)$$

第(1)式から、 r - z 面内での流れ関数が次式のように導入でき、連続の式は自動的に満たされる(符号を文献13)とは逆に定義した)。

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = rv, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -rw \quad (6)$$

したがって、 r - z 面内での渦度 ζ は

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (7)$$

第(3)、(4)式より圧力を消去すれば¹³⁾

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(v\zeta) + \frac{\partial}{\partial z}(w\zeta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u^2}{\partial z} = \nu \left(\nabla^2 \zeta - \frac{\zeta}{r^2} \right) \quad (8)$$

圧力については

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = -(\nabla \mathbf{u})^t : (\nabla \mathbf{u}) = 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2 \left(\frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r^2} \right) \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{u}=(u, v, w)$ 、 $\nabla \mathbf{u}=\text{grad } \mathbf{u}$ 、 t ：転置、 $:$ ：二重積、である(定義は文献14)に従う)。

計算は第(7)、(8)式を用い、通常の流れ関数-渦度法¹⁵⁾の手順に従う。速度場は第(6)式より (v, w) が求まり、さらに第(2)式によって u を求める。速度場が得られると、第(9)式から圧力場が計算できる。

3. 表計算

3.1 計算手順 表計算を用いて、内円筒回転のテイラー渦の計算を行う例を示す。支配方程式は ρ 、 U_i 、 R_i で無次元化しておく。第1図は入力条件の部分を表す。セルC2の値を0に指定すると、表全体の必要な部分を0とし

^{*1} © 2001 日本航空宇宙学会

平成13年1月19日原稿受理

^{*2} 東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻

(323)

もので、必ずしも実験と対応するものではないが、文献17)の $Ta/Ta_c=1.15$ 近傍の無次元1波長はほぼ $2d$ で、正方形ロール・セルが形成されるのは妥当ではある。速度ベクトルで表現すると第5図(a)のような渦運動が明らかになる(座標は d で無次元化)。環状流路中央 $r=(R_i+R_o)/2$ に沿った、面内速度 v, w の z 軸方向分布を第5図(b)に示す。この条件では、速度 v, w の大きさは内円筒の周速に対して数%の程度であることが分かる。

テイラー渦が発生すると、周方向速度分布 u は第6図のような軸方向に周期的な分布を有するようになる。第5図(a)と合わせて考えると、周方向速度 u の大きい部分

第5図 面内速度分布 $R_o/R_i=1.18, L/d=5, Ta/Ta_c=1.15$
(a) 速度ベクトル (v, w), (b) 速度 (v, w) 軸方向分布 [$r=0.5$].

で、面内外向きの流れがあり、逆に内向きの流れがある部分では周方向速度 u は小さめとなる。これは第(3)式で u^2/r による遠心力効果と見なせる。第7図に u の半径方向分布を示す(図中SFD: Spreadsheet Fluid Dynamics, 表計算流体力学⁷⁻¹¹)。テイラー渦の外向き流れの部分($z=3$)、渦芯部分($z=2.5$)、内向き流れの部分($z=2$)について、Wereley & Lueptow¹⁶⁾の測定値と比較、対応は極めてよい(他の位置でもほぼ一致している)。

第8図に圧力分布を示す。外円筒に面内流れが衝突する部分の圧力が高くなり、内円筒から流れが外に向かう部分は低い圧力となっている。流れが再び内円筒に衝突する部分では、圧力は内円筒の表面では相対的に高い圧力となる。

Wereley & Lueptow¹⁶⁾の論文では、 $R_i/R_o=0.844$ と記

第8図 圧力分布 p
 $R_o/R_i=1.18$, $L/d=5$, $Ta/Ta_c=1.15$.

周方向速度 u

圧力 p

第9図 テイラー実験内円筒回転 解析解 (th) と表計算 (SFD) の比較

$R_i/R_o=1.028$, $L/d=5$, $Ta/Ta_c=0.73$, 周方向速度 u , 圧力 p .

第10図 テイラー実験内円筒回転との比較
 トルク係数 C_M , $R_o/R_i=1.028$.

述されているが、同文献第1図から $R_i/R_o=8.9/10.5=0.848$ と解釈して計算した。同文献は $Re \equiv R_i \omega d / \nu = 122$ の実験であるが、本計算では線形安定理論の $Ta_c = \sqrt{1708} = 41.3$ を基準として採用しており、 $Ta/Ta_c=1.15$ を実験と合わせたため、 $Re \equiv R_i \omega d / \nu = 112$ となり、実験より8%低い値を用いた計算となっている。

3.3 Taylorとの比較 第9図はTaylorの実験条件¹⁸⁾で、内円筒回転の場合の、テイラー渦発生前のクーエット流の周方向速度分布と圧力の理論値と計算値を比較したものである。

Taylorの実験は $R_o/R_i=1.028$ ($R_i/R_o=0.973$), $AR=L/d=767$ の条件で行われた¹⁸⁾。内円筒回転の場合について、トルク係数 C_M を比較したものを第10図に示す。速度こう配は一次精度で計算されている。テイラー渦の発

生する近傍での両者の一致はよいが、テイラー数の大きいところで表計算の値が大きめである。これは格子の粗さ、実験におけるテイラー渦のうねりなどが理由として考えられる。

4. ま と め

表計算による内円筒回転テイラー渦の解法について概要を報告した。所定の計算領域を軸方向境界については、対称境界条件(すべり条件)で解き、これはテイラー渦のピッチを指定するような条件となる。速度分布、圧力分布、トルクの値などが計算できる。周方向速度分布についてはWereley & Lueptowの測定値と比較し、 $Ta/Ta_c=1.15$, $R_o/R_i=1.18$ ($R_i/R_o=0.848$) の条件で良好な一致をみた。Taylorの実験の $R_o/R_i=1.028$ ($R_i/R_o=0.973$) における場合もトルクを比較、傾向は一致するが、テイラー数の大きなところで表計算の値は大きめであった。

参 考 文 献

- 1) Walkenbach, J.: Excel 97 Bible, IDG Books Worldwide, Inc., Foster City, CA, 1996.
- 2) Misner, C. and Cooney, P.: Spreadsheet Physics, Addison-Wesley, Reading, MA, 1991.
- 3) Gottfried, B. S.: Spreadsheet Tools for Engineers, McGraw-Hill, New York, 1996.
- 4) Filby, G., ed.: Spreadsheets in Science and Engineering, Springer, Berlin, 1998.
- 5) 長谷川勝也: Excel で学ぶ統計学入門, 第2巻 線形代数・微積分編, 技術評論社, 東京, 1998.
- 6) 木村欽一: エクセルで解く線形・非線形方程式の数値計算, 丸善, 東京, 1999.
- 7) 森下悦生, 田中秀明: 表計算流体力学—プログラム言語を用いないCFDと計算例, 日本航空宇宙学会第29期年会講演会講演集, 1998, pp. 58-59.
- 8) Morishita, E.: Spreadsheet Fluid Dynamics, J. Aircraft, **36** (1999), pp. 720-723.
- 9) Morishita, E.: Spreadsheet Fluid Dynamics for Aeronautical Course Problems, AIAA Paper 2000-0804, 38th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, 2000.
- 10) 森下悦生: Excel で学ぶ流体力学, 丸善, 東京, 2000.
- 11) Morishita, E.: Spreadsheet Fluid Dynamics of a Blunt Body Problem, AIAA Paper 2001-0871, 38th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, 2001.
- 12) Acheson, D. J.: Elementary Fluid Dynamics, Clarendon Press, Oxford, 1990, p. 42.
- 13) Jain, A. C.: Numerical Solutions of Navier-Stokes Equations for the Structure of a Tailing Vortex, NASA TM X-73361, 1977.
- 14) Warsi, Z. U. A.: Fluid Dynamics Theoretical and Computational Approach, CRC Press, Boca Raton, 1999, p. 71.
- 15) 水野明哲: 流れの数値解析入門, 朝倉書店, 東京, 1992, pp. 40-41.
- 16) Wereley, S. T. and Lueptow, R. M.: Azimuthal Velocity in Supercritical Circular Couette Flow, Exp. Fluids, **18** (1994), pp. 1-9.
- 17) Burkhalter, J. E. and Koschmieder, E. L.: Steady Supercritical Taylor Vortices after Sudden Starts, Phys. Fluids, **17** (1974), pp. 1929-1935.
- 18) Taylor, G. I.: Fluid Friction between Rotating Cylinders I-Torque Measurements, Proc. Royal Soc. London, Series A, Vol. 157, 1936, pp. 546-564.