固有構造の存在範囲を指定したロバスト飛行制御系の設計^{*1} Robust Flight Control Design with Eigenstructure Assignment

得 竹 浩^{*2}
Hiroshi TOKUTAKE

Key Words: Flight Control, Robust Control, Eigenstructure Assignment

Abstract: Although the H_∞ control method is powerful tool to design robust controller, it is difficult to attain the performances in time domain. A new design method of H_∞ state feedback controller is proposed which guarantees the robust stability and assigns eigenstructure in the desired regions. The time responses can be shaped with assigning appropriate eigenstructure. Conditions of robust stability and closed-loop eigenstructure assignments are solved in LMI form with one nonlinear constraint. This method is validated with numerical example of flight control design.

記 号

- $\mathbb{R}$: 実数体
 $\mathbb{C}$: 複素数体
 $\in$: 属す
 $\triangleq$: 定義する
 $|a|$: $a \in \mathbb{C}$ の絶対値
 $\|x\|$: $x \in \mathbb{C}^n$ のユークリッド 2-ノルム
 $\|P(s)\|_\infty$: H_∞ ノルム, $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[P(j\omega)]$
 I_n : $n \times n$ の単位行列
 $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$: i 番目の対角要素が a_i である $n \times n$ の対角行列
 $\text{Re}(A)$: A の実部
 $\text{Im}(A)$: A の虚部
 $\bar{\sigma}(A)$: A の最大特異値
 $\underline{\sigma}(A)$: A の最小特異値
 $A > 0$: A は正定行列である
 $x \# y$: $x, y \in \mathbb{C}^n$ が平行でない
 $x = ky$ を満たす $k \in \mathbb{C}$ が存在しない
 $x \perp y$: 直交, $x^*y = 0$
 $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$: $C(sI - A)^{-1}B + D$
 $\square$: 証明の終わり

1. は じ め に

H_∞ 制御は、周波数領域で評価した擾乱に対してロバストなコントローラを設計できる¹⁾。一方、時間領域の性能が要求される制御対象も多い。たとえば、航空機は運動の各モードが固有構造、すなわち固有値および固有ベクトルで特徴付けられ、閉ループ系もそのような特徴を持つことが望まれている²⁾。また日本工業規格には、操縦性や飛行

特性の観点から各モードの根の存在すべき領域が定められている¹⁰⁾。

H_∞ コントローラは航空機の制御にとっても有用であり応用例もあるが⁸⁾、このような時間領域の要求を明示的に満たすことは難しい。閉ループ極の存在範囲を指定する LMI (線形行列不等式) 条件とあわせて、 H_∞ ノルムの LMI 条件を解いて閉ループ極を指定された領域に配置するコントローラの設計方法は、文献 4) など述べている。しかしその設計法では閉ループ固有ベクトルを指定できず、またすべての固有値を同じ領域内に配置してしまう。したがってモードごとの固有値の条件を満たすことは難しく、航空機の制御には適さない。なぜなら、たとえば航空機の縦運動の制御に適用した場合、短周期根と長周期根を同じ領域に配置することになり、不必要に飛行特性を変えるおそれがあるからである。文献 5) では、閉ループ固有構造の一部を厳密に配置し、あまった自由度でロバスト安定性を確保する方法が述べられているが、時間応答を整形するためにはすべての固有構造を指定したい。文献 9) では閉ループ固有構造を指定するコントローラと航空機への応用が述べられているが、その方法ではロバスト安定性を確保することが難しい。

そこで本稿では、目標固有構造をできるだけ達成するロバスト安定化コントローラの設計法を提案する。まず目標固有構造と達成された閉ループ固有構造の差を、モードごとにスカラー値で評価し、その値に対する制限を LMI 条件式に書き下す。そして LMI 条件式で表されたロバスト安定化条件をそれと同時に解くことで目標を達成する。これらの条件は、一つの非線形拘束式およびモードごとに二つの LMI 条件式に書き下すことができる。そしてその解法を提案し、飛行制御系設計に適用する。

2. 設 計 の 方 針

2.1 設計目標 制御対象として、第 1 図のような不確かさを考慮したシステムを考える。 $P(s)$ は一般化プラン

^{*1} © 2001 日本航空宇宙学会
平成 12 年 10 月 2 日原稿受理
^{*2} 大阪府立大学大学院工学研究科

第1図 一般化プラント

トと呼ばれ次のような状態方程式で表される.

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (1.1)$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \quad (1.2)$$

ここで,

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

であり, (A, B_2) は可安定とする. また x : 状態量, u : 制御入力, w : 外乱, z : 制御量を意味する. このプラントに対し状態フィードバック

$$u = Fx \quad (2)$$

を用いて以下のような要求を満たすコントローラを設計する.

- ・目標閉ループ固有構造をできるだけ達成する.
- ・周波数領域で大きさが評価された外乱に対して安定性を保証する.

なお本稿において固有構造とは, 固有値および固有ベクトルを意味する. 固有構造を指定すると状態方程式の A 行列が一意に定まり, 時間応答も決定される. また飛行性の基準として固有値の位置やモード比を指定することが要求されている^{10,11)}. したがって固有構造を指定することにより時間応答を調節し, 飛行性の基準を満たすことができる. また H_∞ 制御器を利用して, 外乱に対するロバスト安定性を確保する.

2.2 固有構造の評価 目標固有構造をできるだけ達成することを要求としてあげたが, 達成された実際の閉ループ固有構造と目標との差を, 設計者が設計パラメータとして与えたい. そのため固有構造の差を以下のように評価する (第2図).

目標固有構造を持つ行列を $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 一般化プラント (1) 式に対して状態フィードバック (2) 式を用いて達成された閉ループ A 行列を $A + B_2 F \triangleq A_{cl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とする. A_d の固有値, 固有ベクトルをそれぞれ λ_i, v_i ($i=1, \dots, n$), それに対応する A_{cl} の固有値, 固有ベクトルを $\hat{\lambda}_i, \hat{v}_i$ ($i=1, \dots, n$) とする. ただし $\|v_i\|=1$ と正規化しておく. このとき $|\hat{\lambda}_i - \lambda_i|$ を固有値の差として評価し, モードごとに与えた目標固有値 λ_i ($i=1, \dots, n$) および $\delta_i \in \mathbb{R}$ ($i=1, \dots, n$) について

$$|\hat{\lambda}_i - \lambda_i| < \delta_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

を満たすコントローラを設計する. これは複素平面上で, 目標固有値 λ_i を中心とした半径 δ_i の円内に閉ループ固有値が存在する条件である.

固有値

固有ベクトル

第2図 固有構造の評価

また

$$k_i = \frac{1}{v_i^* \hat{v}_i} \in \mathbb{C}$$

$$b_i = k_i \hat{v}_i - v_i \in \mathbb{C}^n$$

を用いると

$$k_i \hat{v}_i = v_i + b_i \quad (4)$$

が満たされる. また $b_i \perp v_i$ である. このとき $\|b_i\|$ を固有ベクトルの差として評価し, モードごとに与えた目標固有ベクトル v_i ($i=1, \dots, n$) および $q_i \in \mathbb{R}$ ($i=1, \dots, n$) について

$$\|b_i\| < q_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (5)$$

を満たすコントローラを設計する. これは目標固有ベクトル $\hat{v}_i$ となす角が $\cos^{-1}(1/\sqrt{1+q_i^2})$ より小さい領域に, v_i が存在する条件である. ただし $a, b \in \mathbb{C}^n$ のなす角を $\cos^{-1}(a^* b / \|a\| \|b\|)$ とする.

またロバスト安定性として $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1/\gamma$ の外乱に対して安定性を確保することを考える. ここで $\Delta(s)$ は第1図中の不確かさを表すブロックである. 制御対象 (1) 式に対して (2) 式の状態フィードバックを用いたときの, 外乱 w から制御量 z への伝達関数は

$$T_{zw} = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2 F & B_1 \\ \hline C_1 + D_{12} F & D_{11} \end{array} \right] \quad (6)$$

であり, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ であれば, スモールゲイン定理より $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1/\gamma$ の外乱に対して安定性を保証できる²⁾. また静的なフィードバックコントローラでは, 全域通過特性を持つ外乱に対して安定性を保証することになり, 得られる結果が保守的になってしまう. さらに閉ループ系は -40 dB/dec のロールオフを持つことが望まれる. そこでロールオフについての条件も目標に加える. 以上のことより設計目標を以下のように設定する.

目標1 与えられた A_d および δ_i, q_i ($i=1, \dots, n$) について, 閉ループ A 行列が (3) および (5) 式を満たす.

目標2 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ を満たす.

目標3 閉ループ系が -40 dB/dec のロールオフを持つ.

3. コントローラの構成

3.1 方法 [目標1], [目標2]の条件をLMI条件式に書き下し, それらを連立させて解くことで解を得る. [目標1]の固有構造の条件についてを3.2節で, [目標2]

のロバスト安定化条件についてを3.3節で述べる。また、求めたコントローラに重み関数を付加して[目標3]のロールオフについての条件を達成する方法を、3.4節で述べる。

3.2 固有構造に対する制限 閉ループ固有構造に対する条件をLMI拘束条件に書き下すための定理を導く。

まず以下のように変数を定義する。

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の右固有ベクトル, それに対応した左固有ベクトル, 固有値をそれぞれ v_i, w_i^*, λ_i ($i=1, \dots, n$) とおく。 $V=[v_1, \dots, v_n]$, $W=[w_1, \dots, w_n]$, $V_i=[v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$, $W_i=[w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n]$ とし, それぞれ $\|v_i\|=1$, $W^*V=I$ と正規化されているとする。ただし A は重複固有値を持たないとする。

ここで変動 ΔA を考え, $A+\Delta A$ の i 番目の右固有ベクトル, 固有値がそれぞれ $v_i+a_i, \lambda_i+\Delta\lambda_i$ になったとする。一般性を失うことなく $v_i \perp a_i$, $a_i = \sum_{j \neq i} a_{ij} v_j = V_i a_i$ とおける。ただし $a_i = [a_{i1}, \dots, a_{i,i-1}, a_{i,i+1}, \dots, a_{in}]^T$ である。

さらに変動を受けた固有値について, 次の条件を満たす変数 p_i ($i=1, \dots, n$) を定義する。

$$p_i \leq \min_{j \neq i} |\lambda_i + \Delta\lambda_i - \lambda_j|$$

p_i は変動を受けた固有値 $\lambda_i + \Delta\lambda_i$ と, その他の変動を受ける前の固有値 λ_j との距離の最小値の下界であるが, $|\Delta\lambda_i| < \delta_i$ を満たす δ_i が与えられると, 条件を満たす p_i を求めることができる。 A の固有値 λ_i ($i=1, \dots, n$) について, $l_i = \min_{j \neq i} |\lambda_i - \lambda_j|$ (λ_i が実根のとき), $l_i = \min_{j \neq i, k} |\lambda_i - \lambda_j|$ (λ_i と λ_k が共役な複素根のとき) とする。このとき,

(a) λ_i が複素根かつ $|\text{Im}(\lambda_i)| > \delta_i$ のとき

$$p_i = \min(l_i - \delta_i, 2|\text{Im}(\lambda_i)| - \delta_i) \quad (7.1)$$

(b) λ_i が複素根かつ $|\text{Im}(\lambda_i)| < \delta_i$ のとき

$$p_i = \min(l_i - \delta_i, |\text{Im}(\lambda_i)|) \quad (7.2)$$

(c) λ_i が実根のとき

$$p_i = l_i - \delta_i \quad (7.3)$$

となる (第3図)。

定理1 $\|W_i^* \Delta A v_i\| < \varepsilon_{1i}$, $\|W_i^* \Delta A V\| < \varepsilon_{2i}$, $\varepsilon_{3i} = [\sum_{j \neq i} \varepsilon_{2j}^2]^{1/2}$ ($i=1, \dots, n$) とする。このとき,

$$r_i = \frac{\varepsilon_{1i}}{p_i - \varepsilon_{3i}} > 0 \quad (8)$$

$$\delta_i = \varepsilon_{2i} \sqrt{1 + r_i^2} \quad (9)$$

を満たす r_i と δ_i について

$$\|a_i\| < r_i, \quad |\Delta\lambda_i| < \delta_i \quad (10)$$

が成り立つ。

[証明]

$$\hat{\lambda}_i = \lambda_i + \Delta\lambda_i$$

とおくと,

$$(A + \Delta A)(v_i + a_i) = \hat{\lambda}_i(v_i + a_i) \quad (11)$$

左から w_j^* ($j \neq i$) をかけて整理すると

$$w_j^*[\hat{\lambda}_i I - (A + \Delta A)]a_i = w_j^* \Delta A v_i \quad (12)$$

となる。 j を1から n まで ($j \neq i$) 変化させて(12)式を縦に並べてまとめると, $a_i = V_i a_i$ より

$$W_i^*[\hat{\lambda}_i I - (A + \Delta A)]V_i a_i = E_i \quad (13)$$

(a) λ_i が複素根かつ $|\text{Im}(\lambda_i)| > \delta_i$ のとき

(b) λ_i が複素根かつ $|\text{Im}(\lambda_i)| < \delta_i$ のとき

(c) λ_i が実根のとき

第3図 p_i の計算

を得る。ただし $E_i = W_i^* \Delta A v_i$ である。これから

$$\|a_i\| \leq \frac{\|E_i\|}{\min_{a_i} \{ \|W_i^*[\hat{\lambda}_i I - (A + \Delta A)]V_i a_i\| / \|a_i\| \}} \quad (14)$$

また

$$\begin{aligned} & \min_{a_i} \{ \|W_i^*[\hat{\lambda}_i I - (A + \Delta A)]V_i a_i\| / \|a_i\| \} \\ & \geq \min_{a_i} \{ \|W_i^*[\hat{\lambda}_i I - A]V_i a_i\| / \|a_i\| \} - \bar{\sigma}(W_i^* \Delta A V_i) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \xi_i & \triangleq W_i^*[\hat{\lambda}_i I - A]V_i a_i \\ & = W_i^*[\hat{\lambda}_i V_i - V_i \Lambda_i]a_i \\ & = [\hat{\lambda}_i I - \Lambda_i]a_i \\ & = \hat{\Lambda}_i a_i \end{aligned}$$

である。ここで $\Lambda_i = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n)$, $\hat{\Lambda}_i = \text{diag}(\hat{\lambda}_i - \lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i - \lambda_{i-1}, \hat{\lambda}_i - \lambda_{i+1}, \dots, \hat{\lambda}_i - \lambda_n)$ であり, 根軌跡の連続性から $\underline{\sigma}(\hat{\Lambda}_i) \geq p_i$ が成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned} \|\xi_i\| & = \|\hat{\Lambda}_i a_i\| \\ & \geq \underline{\sigma}(\hat{\Lambda}_i) \|a_i\| \\ & \geq p_i \|a_i\| \end{aligned} \quad (16)$$

一方

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}(W_i^* \Delta A V_i) \\ & \leq \bar{\sigma}(W_i^* \Delta A V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} w_1^* \Delta A V \\ \vdots \\ w_{i-1}^* \Delta A V \\ w_{i+1}^* \Delta A V \\ \vdots \\ w_n^* \Delta A V \end{bmatrix} \right) \\
&\leq \sqrt{|w_1^* \Delta A V|^2 + \cdots + |w_n^* \Delta A V|^2} \\
&< \left[\sum_{j \neq i}^n \varepsilon_{2j}^2 \right]^{1/2} = \varepsilon_{3i}
\end{aligned}$$

が成り立つ. これと $\|E_i\| < \varepsilon_{1i}$ および (14), (15), (16) 式より,

$$\|\alpha_i\| < \frac{\varepsilon_{1i}}{p_i - \varepsilon_{3i}} = r_i \quad (17)$$

また (11) 式の左から w_i^* をかけて $w_i^* a_i = 0$ に注意して整理すると

$$\begin{aligned}
\Delta \lambda_i &= w_i^* \Delta A (v_i + a_i) \\
&= w_i^* \Delta A \tilde{a}_i
\end{aligned} \quad (18)$$

ここで,

$$\tilde{a}_i = [a_{i1}, \dots, a_{ii-1}, 1, a_{ii+1}, \dots, a_{in}]^T$$

さらに, r_i は (10) 式を満たす任意の値とし,

$$\|\tilde{a}_i\| \leq \sqrt{1 + r_i^2}, \quad \|w_i^* \Delta A V\| < \varepsilon_{2i}$$

より,

$$|\Delta \lambda_i| < \varepsilon_{2i} \sqrt{1 + r_i^2} = \delta_i \quad \square$$

この定理は, 行列 A に変動 ΔA が加わったとき, 固有構造の変化が ΔA に関するノルム条件で評価できることを表している. しかし固有値の差は (3) 式で評価されているが, 固有ベクトルについては (5) 式で評価されたものではない. そこで (5) 式で評価される固有ベクトルの差 q_i と定理 1 で評価される差 r_i を関連付ける, 次の補題を用意する.

補題 1 $a_i = V_i \alpha_i$ および $k_i(v_i + a_i) = v_i + b_i, v_i \perp b_i$ とする. このとき $1 - \|v_i^* V_i\| r_i > 0$ および $\|\alpha_i\| < r_i$ ならば,

$$\|b_i\| < \frac{1}{1 - \|v_i^* V_i\| r_i} [\underline{\sigma}(W_i^* W_i)]^{-1/2} r_i \triangleq q_i \quad (19)$$

が満たされる.

[証明] $v_i \perp b_i$ より,

$$\begin{aligned}
b_i &= W_i \beta_i \\
\beta_i &= [\beta_{i1}, \dots, \beta_{ii-1}, \beta_{ii+1}, \dots, \beta_{in}]^T \\
k_i(v_i + V_i \alpha_i) &= v_i + W_i \beta_i
\end{aligned}$$

が成り立つ. 上式の左から v_i^* をかけ, $\|v_i\| = 1$ を用いると

$$k_i = \frac{1}{1 + v_i^* V_i \alpha_i}$$

また, 左から W_i^* をかけると

$$\begin{aligned}
W_i^* W_i \beta_i &= k_i \alpha_i \\
&= \frac{1}{1 + v_i^* V_i \alpha_i} \alpha_i
\end{aligned}$$

したがって

$$\beta_i = \frac{(W_i^* W_i)^{-1}}{1 + v_i^* V_i \alpha_i} \alpha_i$$

および

$$\begin{aligned}
\|b_i\|^2 &= \beta_i^* W_i^* W_i \beta_i \\
&= \left| \frac{1}{1 + v_i^* V_i \alpha_i} \right|^2 \alpha_i^* (W_i^* W_i)^{-1} \alpha_i
\end{aligned}$$

$\|\alpha_i\| < r_i$ より,

$$\begin{aligned}
\|b_i\| &< \frac{1}{1 - \|v_i^* V_i\| r_i} [\bar{\sigma}((W_i^* W_i)^{-1})]^{1/2} r_i \\
&= \frac{1}{1 - \|v_i^* V_i\| r_i} [\underline{\sigma}(W_i^* W_i)]^{-1/2} r_i
\end{aligned}$$

が成り立つ. $\square$

さらに (19) 式より

$$r_i = \frac{q_i}{\underline{\sigma}(W_i^* W_i)^{-1/2} + \|v_i^* V_i\| q_i} \quad (20)$$

を得る.

ここで定理 1 の ΔA についてのノルム条件を, 閉ループ系に満足させることを考える. (1) 式の制御対象に (2) 式のコントローラを用いた場合, 閉ループ A 行列は $A_{cl} = A + B_2 F$ となる. 目標固有構造を持つ行列 A_d と A_{cl} との差を ΔA と考えると, 定理 1 のノルム条件は

$$\|W_i^* (A - A_d + B_2 F) v_i\| < \varepsilon_{1i} \quad (21)$$

$$\|w_i^* (A - A_d + B_2 F) V\| < \varepsilon_{2i} \quad (22)$$

となり, フィードバックゲイン F についての条件となる. $\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}$ は固有構造についての条件から求まるパラメータである. (8), (9) 式から

$$\varepsilon_{1i} = r_i (p_i - \varepsilon_{3i}) \quad (23)$$

$$\varepsilon_{2i} = \frac{\delta_i}{\sqrt{1 + r_i^2}} \quad (24)$$

を得る. r_i, δ_i を与えて $\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}$ を求めるにはこれらの式と $\varepsilon_{3i} = [\sum_{j \neq i}^n \varepsilon_{2j}^2]^{1/2}$ を用いれば良い.

(21), (22) 式のフィードバックゲイン F についての条件式を LMI 条件式に書き下すため, 次の補題を用意する.

補題 2 $\bar{\sigma}(\tilde{W}^* (A - A_d + B_2 F) \tilde{V}) < \varepsilon$ が満たされる必要十分条件は, 決定変数 F に関する次の線形行列不等式

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon^2 I & Q^T(F) \\ Q(F) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

が成り立つことである. ただし,

$$Q = \begin{bmatrix} R_R \\ R_I \end{bmatrix}$$

$$R_R = [W_R^T \quad W_I^T] \begin{bmatrix} \tilde{A} + B_2 F & 0 \\ 0 & \tilde{A} + B_2 F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ V_I \end{bmatrix}$$

$$R_I = [W_R^T \quad W_I^T] \begin{bmatrix} \tilde{A} + B_2 F & 0 \\ 0 & -(\tilde{A} + B_2 F) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_I \\ V_R \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = A - A_d$$

$$W_R = \text{Re}(\tilde{W}), \quad W_I = \text{Im}(\tilde{W})$$

$$V_R = \text{Re}(\tilde{V}), \quad V_I = \text{Im}(\tilde{V})$$

[証明] $\bar{\sigma}(\tilde{W}^* (\tilde{A} + B_2 F) \tilde{V}) < \varepsilon$ の必要十分条件は,

$$\varepsilon^2 I - \tilde{V}^* (\tilde{A} + B_2 F)^T \tilde{W} \tilde{W}^* (\tilde{A} + B_2 F) \tilde{V} > 0$$

が解 F を持つことである. 上式左辺は共役対称行列であり, その虚部は正定性に影響しない. そこで実部のみを評価する.

$$\text{Re}[\tilde{W}^* (\tilde{A} + B_2 F) \tilde{V}] = R_R$$

$$\text{Im}[\tilde{W}^*(\tilde{A}+B_2F)\tilde{V}]=R_I$$

より,

$$\begin{aligned} \text{Re}[\tilde{V}^*(\tilde{A}+B_2F)^T\tilde{W}\tilde{W}^*(\tilde{A}+B_2F)\tilde{V}] \\ = [R_R^T \quad R_I^T] \begin{bmatrix} R_R \\ R_I \end{bmatrix} \\ = Q^T Q \end{aligned}$$

と変形し, Schur complement を適用することで(25)式を得る. $\square$

この補題を用いて(21), (22)式の条件を課すには, (25)式中の $(\tilde{W}, \tilde{V}, \varepsilon)$ をそれぞれ $(W_i, v_i, \varepsilon_{1i}), (w_i, V, \varepsilon_{2i})$ とおけばよい.

3.3 ロバスト安定化条件 [目標2]のロバスト安定化条件を, LMI 拘束条件で表す. そのため文献3)によるよく知られたコントローラのパラメータ変換を用いると, 以下の定理を得る.

定理2 (1)式について状態フィードバックコントローラ(2)式を用いる. このとき閉ループ伝達関数(6)式が

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (26)$$

を満たす必要十分条件は, 決定変数 X, Y に関する次の線形行列不等式

$$\begin{bmatrix} AX+XA^T+B_2Y+Y^TB_2^T & Y^TD_{12}^T+XC_1^T & B_1 \\ C_1X+D_{12}Y & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

が解 $X>0$ および Y を持つことである. またそのとき(26)式を満たすコントローラは

$$F=YX^{-1} \quad (28)$$

で与えられる.

[証明] (6)式が $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ を満たす必要十分条件は, 有界実補題より

$$\begin{bmatrix} (A+B_2F)X+X(A+B_2F)^T & X(C_1+D_{12}F)^T & B_1 \\ (C_1+D_{12}F)X & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

が解 $X>0$ を持つことである. 上式において変数変換 $FX=Y$ を行くと(27), (28)式を得る. $\square$

3.4 ロールオフの達成 [目的3]を満足させるため, 重み関数を用いて -40 dB/dec のロールオフを達成する方法を提案する.

まず(1)式の一般化プラントに対して, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ および固有構造の条件を満足させるフィードバックゲイン F を求める. そして重み関数 $W(s)$ を導入し, $W(s)F$ をコントローラとする (第4図). このとき静的な状態フィードバックのみの場合と, 重み関数 $W(s)$ を挿入したときのそれぞれの相補感度関数に対して以下の関係式が成り立つ.

ループゲインが十分小さい周波数帯, すなわち $\bar{\sigma}(FP) \ll 1$ において

$$\bar{\sigma}((I-WFP)^{-1}WFP) \leq \bar{\sigma}(W)\bar{\sigma}((I-FP)^{-1}FP) \quad (29)$$

航空機の運動は厳密にプロパーな伝達関数で表されるので, 高周波数域では $\bar{\sigma}(FP) \ll 1$ となる. ここで, 重み関

第4図 重みを付加したコントローラ

数 $W(s)$ として積分構造を持つ

$$W(s) = \frac{1}{Ts+1} \times I_m \quad (30)$$

を採用する. ただし $T \ll 1$ とする. このとき, 重み関数による固有構造の変化は小さく, あらたに付加されたモードの減衰は大きいことが示せる. またクロスオーバー周波数などを調節することで, -40 dB/dec のロールオフを達成しさらにループ整形を行える.

さらに(30)式のような重み関数は, 低周波数域で $W(s) \simeq I$ となり,

$$\bar{\sigma}((I-WFP)^{-1}WFP) \simeq \bar{\sigma}((I-FP)^{-1}FP)$$

がいえる. したがって重み関数を挿入しても閉ループ伝達関数の H_∞ ノルムを大きく増加させることはない.

4. 計 算 方 法

4.1 凸問題への帰着 以上の準備のもとで, 閉ループ固有構造の存在範囲を指定した H_∞ コントローラの設計方法を示す.

1. 目標固有値 λ_i , 目標固有ベクトル v_i ($\|v_i\|=1, i=1, \dots, n$) を決定し,

$$A_d = [v_1, \dots, v_n] \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) [v_1, \dots, v_n]^{-1} \quad (31)$$

を求める. この A_d は目標固有構造を持つ行列である. ただし複素数の固有値については共役な固有値, 固有ベクトルを, また重複固有値はないように選ぶ.

2. (3), (5)式で表される, 固有値, 固有ベクトルを配置したい領域の大きさ δ_i, q_i を, またロバスト安定化条件を与える(26)式の γ を決める. (7)式から p_i を, (20)式から r_i を求める ($i=1, \dots, n$).

3. (23), (24)式から $\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}$ を求める ($i=1, \dots, n$).

4. (28)式の拘束のもと, (21), (22), (27)式を同時に満たす $X>0$ および Y, F を求める. 解がない場合は, ステップ2へ戻り条件をゆるめる.

5. (30)式の重み関数を導入し, $W(s)F$ をコントローラとして採用する.

ステップ4において(21), (22), (27)式はLMI条件式になっているが, (28)式は非凸な拘束である. そこでこれを解くために以下のように問題を設定する.

$$\sigma_{\text{opt}} = \min_{(X,Y,F) \in C} \bar{\sigma}(FX-Y) \quad (32)$$

$$C = \{X, Y, F : \Phi(X, Y, F) > 0\} \quad (33)$$

σ_{opt} を与える X, Y, F を求める.

ただし, $\Phi(X, Y, F) > 0$ は(21), (22), (27)式および $X>0$ をまとめたものである. (32)式も非凸な関数であるが, 決定変数 X, F のうちどちらかを固定すれば凸問題と

なる．そこで座標降下法⁹⁾を用いてステップ4を以下のように書き換える．

アルゴリズム

- (i) 初期化： $k=0, (X_0, Y_0, F_0 \in C_c)$
- (ii) $\min\{\bar{\sigma}(F_k X - Y)\} : (X, Y, F_k) \in C_c$ を与える $X = X_{k+1}, Y$ を見つける．
- (iii) $\min\{\bar{\sigma}(F X_{k+1} - Y)\} : (X_{k+1}, Y, F) \in C_c$ を与える $Y = Y_{k+1}, F = F_{k+1}$ を見つける．
- (iv) $\bar{\sigma}(F_{k+1} X_{k+1} - Y_{k+1}) < \varepsilon_{\text{tol}}$ であれば終了．そうでなければ $k=k+1$ においてステップ(ii)へ戻る．

ここで、 C_c は C に含まれる閉集合である．このアルゴリズムでは $X_0, Y_0, F_0 \in C_c$ である初期値を選んでいるので、各最適化凸問題には解が必ず存在する．また、各ステップにおいて $\bar{\sigma}(F X - Y)$ の値は増加することはない．このアルゴリズムでは目標関数が0に収束し、かつそのとき大域的最適解を与える保証はないが、簡単に局所的な最適解を求めることができる．

4.2 設計条件の調節方法 前章の設計手順において、目標固有構造や固有構造の存在範囲条件 q_i, δ_i 、ロバスト安定性についてのパラメータ γ を任意に与えると、コントローラが求まらない場合があり設計条件をゆるめる必要がある．各LMIの直接のパラメータである γ や $\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}$ を十分大きな値にすれば必ず解は存在する．そのための設計条件の調節方法は次のとおりである．

ある q_i, δ_i, γ を与えて解が得られなかったとする．そのとき γ を十分大きくしてロバスト安定化条件を弱めると、(27)式の解領域が大きくなる．一方固有構造に対する条件を弱めるには、あるスカラー $g > 1$ を用いて、新しい設計パラメータを次のように設定すれば良い．

$\tilde{r}_i = \sqrt{g} r_i$ となるよう(20)式を用いて q_i を大きくする．

$$\tilde{\delta}_i = g \delta_i$$

$\tilde{l}_i = g l_i$ もしくは $|\text{Im}(\tilde{\lambda}_i)| = g |\text{Im}(\lambda_i)|$ となるよう目標固有値を移動する．

すると新たなLMIのパラメータ $\tilde{\varepsilon}_{1i}, \tilde{\varepsilon}_{2i}$ は(7), (23), (24)式などから、

$$\tilde{\varepsilon}_{2i} = \frac{g \delta_i}{\sqrt{1 + g r_i^2}} > \sqrt{g} \varepsilon_{2i}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{3i} \geq \left[\sum_{j=1}^n g \varepsilon_{2j}^2 \right]^{1/2} = \sqrt{g} \varepsilon_{3i}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{1i} \geq \sqrt{g} r_i (g p_i - \sqrt{g} \varepsilon_{3i}) > g \varepsilon_{1i}$$

となり、 g を大きくすることで(21), (22)式の解の存在範囲を大きくすることができる．このようにある設計条件について解が求まらないときは、ロバスト安定性の制約を表す γ と、固有構造の変動の制約を表す g のトレードオフを考えて、 γ と g を調節することでコントローラを求めれば良い．

5. 飛行制御系設計への適用

提案した設計方法を航空機の飛行制御に適用する．対象は高度33000 ftで巡航飛行中のDC-8¹²⁾の縦運動とする．

(1)式の各行列の値および状態変数は以下のようになる．

$$A = \begin{bmatrix} -0.0140 & 1.0802 & -9.8000 & 0 \\ -0.0003 & -0.8060 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ -0.0025 & -8.8098 & 0 & -1.3443 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = [0 \quad -0.0420 \quad 0 \quad -4.5724]^T$$

$$x = [u[\text{m/s}] \quad \alpha[\text{rad}] \quad \theta[\text{rad}] \quad q[\text{rad/s}]]^T$$

ここで、 u : X 軸方向速度擾乱、 α : 迎角、 θ : 姿勢角、 q : ピッチ角速度、また入力 δ_e : エレベータ舵角である．制御対象の固有構造を第1表に示す．入力側の乗法的摂動に対する相補感度関数の H_∞ ノルムを低減し、高周波数域での相補感度関数のロールオフを -40 dB/dec とすることをロバスト安定性の目標とする．したがって、

$$B_1 = B_2, \quad C_1 = 0, \quad D_{11} = 0, \quad D_{12} = I$$

となる．また固有構造に対する目標を第2表に示す．制御対象は1入力の4次のシステムであるため、状態フィードバックで達成できる固有構造には制限がある．そこで目標固有構造として、状態フィードバックで厳密に達成可能なものから任意に選んだ⁹⁾．また厳密に目標固有構造を達成する状態フィードバックコントローラを採用した場合、相補感度関数の H_∞ ノルムは3.92となる．

さらに第2表にあるように、固有値について $|\Delta \lambda_i| < 0.05, 0.1$ (短周期, 長周期モード)、固有ベクトルについて $\|b_i\| < 0.05, 0.1$ (短周期, 長周期モード) という条件を課す．ここで $\Delta \lambda_i$ は目標固有値と閉ループ固有値の距離、 b_i は(4)式で表される固有ベクトルの差を表すベクトルである．またロバスト安定化条件として $\|T_{2u}\|_\infty < 3.1$ を課した．これらの条件のもとでコントローラを設計した結果、

$$F = [-0.011 \quad -1.597 \quad 0.271 \quad -0.014]$$

を得た．なお $\varepsilon_{\text{tol}} = 0.01$ で計算したところ、5回の反復の後収束した．このコントローラを用いたときの閉ループ固有構造および相補感度関数の H_∞ ノルムは設計条件を満たしている(第3表)．また相補感度関数の特異値プロットを第5図に示す．このままではロールオフについての要求を満たさないので、(30)式の形の重み関数を付加する．時定数は、低周波数域に影響を及ぼさないように $T = 1/120$

第1表 制御対象

固有値
$-1.076 \pm 2.956i, -0.006 \pm 0.024i$
固有ベクトル
$[1.000, 0.228 \pm 0.308i, 0.134 \pm 0.336i, 0.848 \pm 0.756i]^T$
$[1.000, -0.0003, -0.001 \pm 0.002i, 0.0001]^T$

第2表 設計仕様

目標固有値
$-0.800 \pm 1.500i, -0.150 \pm 0.300i$
目標固有ベクトル
$[1.000, 0.186 \pm 0.120i, 0.101 \pm 0.166i, 0.169 \pm 0.284i]^T$
$[1.000, 0.015 \pm 0.008i, 0.013 \pm 0.030i, 0.007 \pm 0.009i]^T$
$\delta_{1,2}$
0.050
$\delta_{3,4}$
0.100
$q_{1,2}$
0.050
$q_{3,4}$
0.100
γ
3.1

第3表 設計結果

閉ループ固有値				
$-0.818 \pm 1.513i, -0.198 \pm 0.285i$				
閉ループ固有ベクトル				
$[1.000, 0.189 \mp 0.121i, 0.103 \mp 0.168i, 0.170 \pm 0.293i]^T$				
$[1.000, 0.014 \pm 0.014i, 0.020 \mp 0.028i, 0.004 \pm 0.011i]^T$				
$ \Delta\lambda_{1,2} $	$ \Delta\lambda_{3,4} $	$\ b_{1,2}\ $	$\ b_{3,4}\ $	γ
0.022	0.050	0.008	0.009	3.061

第5図 相補感度関数

第4表 重みを付加

閉ループ固有値				
$-0.843 \pm 1.487i, -0.198 \pm 0.287i, -120.080$				
閉ループ短周期, 長周期固有ベクトル				
$[1.000, 0.192 \mp 0.118i, 0.106 \mp 0.165i, 0.156 \pm 0.296i]^T$				
$[1.000, 0.0145 \pm 0.014i, 0.020 \mp 0.028i, 0.004 \pm 0.011i]^T$				
$ \Delta\lambda_{1,2} $	$ \Delta\lambda_{3,4} $	$\ b_{1,2}\ $	$\ b_{3,4}\ $	γ
0.045	0.050	0.017	0.009	3.098

とした. この重みを付加したコントローラを用いたとき, 目標固有構造との差は $|\Delta\lambda_i| = 0.045, 0.050, \|b_i\| = 0.017, 0.009$, 相補感度関数の H_∞ ノルムは $\|T_{zw}\|_\infty = 3.098$ となり, 設計条件を満たしている (第4表). ただし固有値の変化を表すパラメータ $|\Delta\lambda_i|$ は短周期, 長周期根に相当するものを比較し, 固有ベクトルの変化を表すパラメータ $\|b_i\|$ はプラントの状態変数に対応する要素のみを比較して求めた. 表中の固有ベクトルもプラントの状態変数に対応する要素のみを記してある. またロールオフについての要求も満たしている (第5図).

6. おわりに

ロバスト安定化条件および, 各モードごとの閉ループ固有構造の存在範囲条件を同時に満たす, 状態フィードバック H_∞ コントローラの設計方法を示した. この設計方法では, 固有構造の存在範囲条件を閉ループ A 行列に関する

ノルム条件に帰着させている. またそのノルム条件を LMI 拘束条件に書きなおし, 状態フィードバック H_∞ コントローラについての LMI 条件式と連立させることで解を得た. 求めたコントローラにより配置された閉ループ固有値は, 目標位置を中心とする円内に, また閉ループ固有ベクトルは, 目標固有ベクトルとなす角度がある値以下の領域内に存在する. それらの領域の位置や大きさは, モードごとに設計パラメータとして与えることができる. さらに重み関数を付加してロールオフを調節する方法も示した.

提案した設計方法では, 非線形拘束条件 (28) 式を考慮する必要がある. そこで座標降下法を用いる計算方法を提案し, 航空機の縦運動のコントローラに適用した. その結果, 閉ループ固有構造が指定した範囲内に配置されていることが確認できた. また本設計法を出力フィードバックへ拡張することは今後の課題である.

最後に, 本研究を進めるにあたり貴重な助言をくださった, 奈良先端科学技術大学院大学の佐藤淳助手に感謝いたします.

参考文献

- Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A.: State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, IEEE Trans. Auto. Contr., **34** (1989), pp. 831-847.
- Zohu, K., Doyle, J. C. and Glover, K.: Robust and Optimal Control, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996, pp. 217-221.
- Khargonekar, P. P. and Rotea, M. A.: Mixed H_2/H_∞ Control: A Convex Optimization Approach, IEEE Trans. Auto. Contr., **36** (1991), pp. 824-837.
- Chilali, M. and Gahinet, P.: H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, IEEE Trans. Auto. Contr., **41** (1996), pp. 358-367.
- 佐藤 淳, 穂高一条, 杉本謙二: 安定余裕を指定した部分極配置—多項式 ILQ 設計法の拡張, システム/制御/情報, **13** (2000), pp. 30-37.
- 岩崎徹也: LMI と制御, 昭晃堂, 東京, 1997, pp. 163-164.
- Magni, J. F., Bennani, S. and Terlouw, J.: Robust Flight Control, Springer, New York, 1997.
- Hyde, R. A.: H_∞ Aerospace Control Design, Springer, New York, 1995.
- Andry, A. N., Jr, Shapiro, E. Y. and Chung, J. C.: Eigenstructure Assignment for Linear Systems, IEEE Trans. Aero. Elec. Syst., **19** (1983), pp. 711-729.
- 飛行機の飛行性 JIS W 0402, 日本規格協会, 1992.
- 加藤寛一郎, 大屋明男, 柄沢研治: 航空機力学入門, 東京大学出版会, 東京, 1982, pp. 181-215.
- McRuer, D., Ashkenas, I. and Graham, D.: Aircraft Dynamics and Automatic Control, Princeton Univ. Press, Princeton, 1973, pp. 711-717.