拡張気体論モデルによる平面衝撃波問題の数値解析^{*1}

Numerical Study of Comprehensive Kinetic Model in Plane Shock Wave Problem

長 井 亮 一^{*2}・前 野 一 夫^{*3}・本 間 弘 樹^{*4}

Ryoichi NAGAI, Kazuo MAENO and Hiroki HONMA

Key Words: Numerical Analysis, Boltzmann Equation, Kinetic Model Equation, Shock Structure, Maxwell Molecules

Abstract: The comprehensive kinetic model equation for unsteady one-dimensional flow is numerically solved to obtain a converging solution for a plane shock structure problem. This model equation is proposed by Oguchi on the basis of the Grad's 13-moment approximation, and its collision term is expressed in an explicit function of the peculiar velocities. The problem is selected as a typical problem for surveying the applicability of the present model to gas dynamic problems. The numerical calculations are performed for Maxwell molecules. The free-stream Mach number range is from 1.05 to 2.0. The resultant shock wave profiles of the number density exhibit reasonable forms with monotonic change, and the resultant shock thickness values agree well with the corresponding Navier-Stokes values. The present results suggest us to open a way for the applicability of the present kinetic model to various gas dynamic problems in weakly rarefied conditions.

1. は じ め に

希薄気体力学，つまり流体を連続体と仮定することが困難な範囲の希薄な気体の流れを対象とする気体力学が航空宇宙工学の分野に登場して半世紀余を経過した。しかし，気体分子集団の解析の基礎となるボルツマン方程式は，現代の高度に発展したコンピュータの演算能力をもってしても，なおそれを厳密に処理することが困難であったため，多くの近似的手法や限定された数の分子に対する離散分子速度法や直接シミュレーション手法などが開発されてきた。ボルツマン方程式の困難さは，主としてその分子衝突積分項の複雑さに起因している。歴史的には，まず，衝突積分項を直接対象とする困難さを避け，物理的に有意なモーメント（数密度，平均速度ベクトル，温度，応力テンソル，熱流束ベクトルなど）について導かれるモーメント方程式を取り扱う，いわゆるモーメント法が用いられてきた。高次モーメント方程式として Burnett, Grad-13 moment¹⁾ などの方程式がよく知られている。次に，衝突積分項を単純化，モデル化することにより得られるモデル方程式を解いて，分子の速度分布関数（分子数密度の速度空間における確率分布）を直接対象とする手法が開発された。これには，BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) モデル²⁾ やその拡張である Shakov モデル³⁾ などがよく知られている。

本論文で用いられる拡張気体論モデル⁴⁻⁶⁾ は，小口によ

り提唱され，13 モーメント法で用いられた分布関数のエルミート展開形式をそのまま衝突項に適用し，高次項を省略した上で方程式のモデル化を行ったものである。このモデルは，分子間ポテンシャルに関して広い範囲の逆べき乗ポテンシャルに適用可能な点に特長がある。また従来のモデル方程式とは異なり，衝突項が数密度，温度，圧力，粘性応力，熱流束などの巨視的な物理量をパラメータとする熱速度の解析的関数で陽的に表現されている。このモデル方程式から全速度空間積分によって高次モーメント方程式を導くと，いわゆる Grad の 13 モーメント方程式が導かれる。一般に，高次のモーメント方程式では，対流項においてより高次の項を省略する必要があること，固体境界において粘性応力や熱流束などの高次モーメントの物理量に関する何らかの境界条件を与える必要があることなどの問題点がある。一方，本研究のようにモデル方程式の形で速度空間における解を求めることができれば，対流項における高次項の省略を伴わず，また，より自然な形で境界条件を与えることができ，実用上の観点からも適用範囲が広がるものと期待される。

本研究では，この拡張気体論モデル方程式の速度空間における数値解析の可能性を検討するため，従来の気体論においても典型的な例である 1 次元定常流中の衝撃波問題を取り上げる。まず，固体境界を含まない流れについて数値解の特性を調べることにした。このモデル方程式は，高次項の省略の仮定からも明らかのように，前提として平衡からのずれが比較的小さい流れの場合への適用を想定している。定常衝撃波問題においては，衝撃波上流のマッハ数が 1 に近いほど，衝撃波内部における平衡からのずれは小さ

*1 © 2003 日本航空宇宙学会

平成 15 年 1 月 10 日原稿受理

*2 千葉大学自然科学研究科人工システム科学専攻

*3 千葉大学工学部・自然科学研究科

*4 千葉大学名誉教授

い．本論文では，衝撃波内部の非平衡の度合いが比較的小さい上流マッハ数 1.05 から，非平衡の度合いがやや大きくなるとされる上流マッハ数 2 の間で数値計算を行い，解の特性について検討する．分子間力モデルについては，本論文では代表例としてマクスウェル分子についての解析のみを示す．数値解析では，非定常 1 次元モデル方程式を時間進行法により陰解法で解き，定常解へと収束させる方法を用いる．

2. 拡張気体論モデル方程式

拡張気体論モデル⁴⁻⁶⁾では，ボルツマン方程式の衝突項内の生成項および損失項における速度分布関数が Grad の 13 モーメント法において用いられた熱速度の級数展開の形で与えられるものと仮定している．すなわち，速度分布関数は以下のように表される．

$$F = F_0 \left[1 + \frac{p_{ij}}{2RTp} V_i V_j + \frac{q_i V_i}{5RTp} \left(\frac{V^2}{RT} - 5 \right) \right] \quad (1)$$

ここで， V_i は熱速度ベクトル成分， p は圧力， T は絶対温度， R は気体定数， p_{ij} は粘性応力テンソル成分， q_i は熱流束ベクトル成分である． V^2 ， $p_{ij} V_i V_j$ ， $q_i V_i$ は以下のように表される．

$$\begin{aligned} V^2 &= V_i V_i = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2, \\ p_{ij} V_i V_j &= p_{xx} V_x^2 + p_{xy} V_x V_y + \cdots + p_{zz} V_z^2, \\ q_i V_i &= q_x V_x + q_y V_y + q_z V_z \end{aligned}$$

F_0 は平衡速度分布関数で以下のように表される．

$$F_0 = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left(-\frac{V^2}{2RT} \right) \quad (2)$$

ただし， n は数密度である．

衝突項中の速度分布関数に (1) 式を適用する際，生成・損失項における分布関数同士の積によって生ずる高次の項は，非平衡度の低い流れへの適用を想定しているので省略できるものと仮定している．衝突項の積分に際しては，衝突積分内の速度空間方向について球面積分を行い，最終的に熱速度に関する解析関数の形に衝突項を導いている．気体分子は，任意の逆べき乗ポテンシャルを有する単原子分子とする．以上の仮定とプロセスにより結果として得られるモデル方程式は，特にマクスウェル分子に関して以下のような形で表される．

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} &= -\frac{n\nu}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left(-\frac{V^2}{2RT} \right) \\ &\times \left[\frac{3}{8pRT} p_{ij} V_i V_j + \frac{q_i V_i}{pT} \left(\frac{V^2}{5RT} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

ここで， v_i は分子速度ベクトル成分， x_i は直交座標成分である．また， ν は衝突頻度であり，マクスウェル分子では $\nu = 3p/(4\mu)$ で表される． μ は粘性係数である．

3. 数値計算

3.1 1 次元流モデル方程式と無次元化 本論文では，前節で得られたモデル方程式を 1 次元流れに適用した非定常 1 次元流モデル方程式を時間進行法で解いて，1 次元定常衝撃波の解へ収束させる方法を用いる．流れの方向を x 軸とし，それと直交する方向を y 軸， z 軸とする．本モデルでは，(3) 式に示すように衝突項の中に p_{ij} ， q_i などの巨視量の方向成分を含んでいるので，取り扱う問題によってどの項を省略するかを予め評価しておく必要がある．ここでは，1 次元流の仮定から

$$p_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad q_y = q_z = 0 \quad (4)$$

とする．粘性応力テンソルの対角成分については， $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = 0$ の関係を満たす必要があるので， x 軸と直交する対角成分 p_{yy} および p_{zz} を省略はできない．ここでは， y および z 方向に関して等方性の仮定を導入することにより，以下の関係式を用いている．

$$p_{yy} = p_{zz} = -1/2 p_{xx} \quad (5)$$

次に，モデル方程式の無次元化について述べる．速度を除く各物理量は基準平衡状態（ここでは衝撃波上流無限遠を基準とし，添字 1 で表す）の各物理量で無次元化され，速度に関する物理量は基準状態における最大確率熱速度で無次元化される．すなわち，

$$\begin{aligned} n/n_1 &\rightarrow n, \quad T/T_1 \rightarrow T, \quad p/p_1 \rightarrow p, \\ u/\sqrt{2RT_1} &\rightarrow u, \quad p_{xx}/p_1 \rightarrow p_{xx}, \\ q_x/(p_1 \sqrt{2RT_1}) &\rightarrow q_x, \quad F/\{n_1(2RT_1)^{-3/2}\} \rightarrow F, \\ v_x/\sqrt{2RT_1} &\rightarrow v_x, \quad V_i/\sqrt{2RT_1} \rightarrow V_i \quad (i = x, y, z) \end{aligned}$$

ここで u は x 方向の平均分子速度，すなわち流れの速度である．長さに関する量は，基準状態における剛体球分子の平均自由行程，

$$\lambda_1 = \frac{16\mu_1}{5n_1 m \sqrt{2\pi RT_1}} \quad (6)$$

により無次元化される．これを用いて，距離 x ，時間 t および衝突頻度 ν は，以下のように無次元化される．

$$\begin{aligned} x/\lambda_1 &\rightarrow \lambda_1, \quad t\sqrt{2RT_1}/\lambda_1 \rightarrow t, \\ \nu\lambda_1/\sqrt{2RT_1} &\rightarrow \nu \end{aligned}$$

マクスウェル分子に対するモデル方程式 (3) に 1 次元流の仮定 (4) および (5) 式を適用し，上記の無次元化を行うことにより以下の式を得る．

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} &= -\frac{n\nu}{(\pi T)^{3/2}} \exp \left(-\frac{V^2}{T} \right) \\ &\times \left[\frac{3p_{xx}}{4pT} \left\{ V_x^2 - \frac{1}{2} (V_y^2 + V_z^2) \right\} + \frac{q_x V_x}{pT} \left(\frac{2V^2}{5T} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

衝突項内に含まれる 5 個の巨視的な物理量 n, u, T, p_{xx} および q_x は、速度分布関数 F のモーメント式から以下のよう求められる。

$$n = \int F d\mathbf{v}, \quad nu = \int F v_x d\mathbf{v}, \quad \frac{3}{2}nT = \int F V^2 d\mathbf{v},$$

$$p_{xx} = 2 \int F V_x^2 d\mathbf{v} - p, \quad q_x = \int F V^2 V_x d\mathbf{v} \quad (8)$$

ここで、 $\int d\mathbf{v}$ は 3 次元速度空間にわたる積分を表す。圧力 p は、下記のように理想気体の状態方程式から求められる。

$$p = nT \quad (9)$$

また、マクスウェル分子に対する無次元衝突頻度は以下のようになる。

$$\nu = 32n/(15\sqrt{\pi}) \quad (10)$$

3.2 変換分子速度分布関数 1 次元流または 2 次元流に対してモデル方程式をそのまま解こうとすると、物理空間の次元は減るが、速度空間に関しては依然として 3 次元であるので、全体としては 4 次元または 5 次元空間となる。しかしながら、流れが関与する方向以外の速度空間について全速度空間にわたり積分を施して部分的なモーメントを求めておけば、速度空間も 1 次元または 2 次元に転換することができて、計算効率を大幅に向上することができる。この考え方により、下記により定義されるような変換速度分布関数 G および H を用いて BGK モデルや Shakov モデルに対する数値解析が従来行われてきている^{7, 8)}。

$$G = \int \int F dv_y dv_z, \quad H = \int \int (V_y^2 + V_z^2) F dv_y dv_z \quad (11)$$

ここで、 G のみならず H の導入を必要とする理由は、後に示すように熱に関する巨視的な物理量、すなわち温度および熱流束を求める際にそれらの値が必要とされるからである。本論文では計算効率の上から、主としてこの手法を適用して解析を行っている。ただし、現在のコンピュータの性能や容量をもってすれば、より高次元の計算を取り扱うことは十分に可能であり、3 次元流への拡張を考慮して、本論文では (7) 式をそのまま 4 次元空間で離散化して直接に解くことも試みている。

変換速度分布関数 G および H を用いたモデル方程式は、それぞれ、(7) 式の両辺をそのまま v_y および v_z の全速度空間で積分を実行すること、および (7) 式の両辺に $(V_y^2 + V_z^2)$ を乗じた後に同じ積分を実行することにより、以下のようになれる。

$$\frac{\partial G}{\partial t} + v_x \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{n\nu}{\sqrt{\pi}(T^{3/2})p} \exp\left(-\frac{V_x^2}{T}\right)$$

$$\times \left[\frac{3}{4}p_{xx}T \left(\frac{V_x^2}{T} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5}q_x V_x \left(\frac{V_x^2}{T} - \frac{3}{2}\right) \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v_x \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{n\nu}{\sqrt{\pi}Tp} \exp\left(-\frac{V_x^2}{T}\right)$$

$$\times \left[\frac{3}{4}p_{xx}T \left(\frac{V_x^2}{T} - 1\right) + \frac{2}{5}q_x V_x \left(\frac{V_x^2}{T} - \frac{1}{2}\right) \right] \quad (13)$$

本モデル方程式では衝突項が熱速度の陽関数で表されているので、上記の積分の後に G および H に関する方程式の衝突項は V_x のみの陽関数となる。巨視的な物理量を求めるためのモーメント式 (8) は、以下のように書き直される。

$$n = \int G dv_x, \quad nu = \int G v_x dv_x,$$

$$\frac{3}{2}nT = \int (GV_x^2 + H) dv_x, \quad p_{xx} = 2 \int GV_x^2 dv_x - p,$$

$$q_x = \int V_x (GV_x^2 + H) dv_x \quad (14)$$

3.3 計算スキーム 定常 1 次元流衝撃波構造問題では、一般的には流れの方向や衝撃波の位置は任意でよいが、計算の便宜上、流れの方向を x の正方向とし、衝撃波の中心位置を $x = 0$ 近傍とする。非定常方程式の初期条件も、定常収束解を求めるときには一般的に任意でよい。いくつかの初期条件による計算を試みたが、収束過程に顕著な差は認められなかった。そこで本論文では、 $x = 0$ の位置で不連続的に上流の平衡状態から下流の平衡状態に遷移する非粘性流から出発する、最も単純な初期条件の場合に対する解析のみを示す。境界条件としては、理論的には無限遠方の上流・下流において、衝撃波関係式から求められる平衡状態に対応する速度分布関数が与えられる。ここで、 F, G および H に対して平衡分布の無次元化式を示しておく。

$$F_0 = \frac{n}{(\pi T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{V^2}{T}\right),$$

$$G_0 = \frac{n}{(\pi T)^{1/2}} \exp\left(-\frac{V_x^2}{T}\right), \quad H_0 = TG_0$$

なお本論文では、無限遠境界の物理空間座標 x を有限境界の計算空間座標 ξ に置き換える変数変換を導入しており、 x と ξ の関係には以下の式を用いる。

$$x = A \tan\left(B \frac{\pi}{2} \xi\right) \quad (-1 < \xi < 1) \quad (15)$$

ここで A および B は任意のパラメータで、衝撃波内部に十分な格子点が配置され、かつ遠方領域を十分にカバーできることを念頭において、適切な値が設定される。実際の計算では、境界条件は $B\xi = \pm 1$ ではなく、やや内側の格子点において設定される。

速度空間における計算領域は、熱速度 V_i の絶対値が全ての座標において最大確率熱速度の 4 倍に達しうるまでの範囲とする。本論文のマッハ数範囲では、具体的には、無次元表示で以下のように書ける。

$$-4(T_2)^{1/2} < V_i < 4(T_2)^{1/2}$$

ここで、無限遠下流の平衡物理量に添え字 2 をつけて表している．これらの両端境界の間を等間隔に分割して離散化する．ただし、格子点が分子速度 0 のごく近傍に位置することを避けるため、分割したのち $v_i = 0$ が格子点間の中点に来るように格子点の位置を全体として少しシフトさせる．

計算の手順は次の通りである．変換速度分布関数 G および H を用いる場合を例として示す．

- 1) 初期条件を $n, p, T, u, p_{xx}, q_{xx}, G, H$ に与える．
- 2) $v_x =$ 一定の各速度空間格子点毎に、(12) および (13) 式を後述の陰解法で解き、 $G(\xi, v_x)$ および $H(\xi, v_x)$ を求める．
- 3) (9) 式および (14) 式を用いて、 $n, p, T, u, p_{xx}, q_{xx}, G, H$ を求める．
- 4) 2) と 3) の結果を初期条件として、同じ過程を解が収束するまで繰り返す．

速度分布関数 F について直接解く場合には、2) において、3 次元速度空間格子点 (v_x, v_y, v_z) ごとに (7) 式を解いて、 $F(\xi, v_x, v_y, v_z)$ を求める．

モデル方程式の数値解法としては、本論文では、BGK タイプのモデル方程式にすでに適用されている⁷⁾ Beam-Warming の陰的差分スキームを用いている．例として、変換速度分布関数 G に関する (12) 式についてのスキームを以下に示す (12) 式の左辺を $(n+1)$ 時間ステップ、右辺を n 時間ステップでそれぞれ差分化すると、以下のように表される．

$$G^{n+1} - G^n + \Delta t v_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} G^{n+1} = \Delta t \Pi^n + O(\Delta t^2) \quad (16)$$

ここで、 v_ξ は ξ 方向の速度成分で、 $v_\xi = v_x(dx/d\xi)$ である．また、 Π は衝突項を表す．空間微分 $\partial/\partial \xi$ には、中心差分が用いられる．(16) 式の両辺から $\Delta t v_\xi \partial G^n / \partial \xi$ を引くと

$$\begin{aligned} & \left[1 + \Delta t v_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \Delta G \\ &= -\Delta t \left[v_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} G^n - \Pi^n \right] + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (17)$$

が得られる．ただし

$$\Delta G = G^{n+1} - G^n \quad (18)$$

である．(17) 式は、 ξ 方向の各格子点における ΔG を未知量とする連立方程式である． $\partial/\partial \xi$ を中心差分にとると、対角三項方程式となり、消去法により解を求めることができる． ΔG が求まると、 $n+1$ 時間ステップの解 G^{n+1} は (18) 式から求められる．解が $\Delta G \rightarrow 0$ により収束に向かうとき、右辺において定常解 $[v_\xi (\partial G^n / \partial \xi) - \Pi^n] \rightarrow 0$ が得られていることになる．必要な場合、(17) 式の右辺に 4 次の散逸項を置く． H および F についても同様なスキームで計算している．

第 1 図 最大数密度勾配 σ_1 の収束過程

第 2 図 数密度変動率 σ_2 の最大値の減衰過程

4. 結果 と 考 察

ここでは、主に変換分子速度分布関数 G, H を取り扱う (12), (13) 式を用いた数値解析の結果について論じる．本論文では、前述したように初期条件として与える衝撃波の上流マッハ数 $M_1 = 1.05 \sim 2.0$ について数値解を示す．物理空間座標 ξ の格子点数 101 ~ 1001、および速度空間座標 v_x の格子点数 30 ~ 201 の間で格子の数をいくつか組み合わせて計算が行われたが、数密度などの巨視的物理量の分布形状については最終的な結果に相違はなかったため、ここでは、 ξ 空間の格子点数 501、 v_x 空間の格子点数 30 についての結果のみを示す．

はじめに、定常解への収束過程を二つの収束パラメータ σ_1 および σ_2 について示す．まず第 1 図に衝撃波面内部の密度勾配の最大値 $\sigma_1 = [dn/dx]_{\max}$ が、 $M_1 = 1.05, 1.2, 1.5, 2.0$ の場合について、時間ステップを横軸として示されている．いずれの場合も、 σ_1 の値がほぼ一定値に収束していることがわかる．ほぼ収束に達するまでのステップ数はマッハ数により異なり、 $M_1 = 1.05$ では約 5 千ステップ、1.2 では約千ステップ、1.5 および 2.0 では約 5 百ステップ程度である．しかしながら、このときにも数密度などの巨

(a) $M_1 = 1.05$ (20,000step) (b) $M_1 = 1.2$ (10,000step)第 3 図 $M_1 = 1.05$ および 1.2 における変換速度分布関数 G

視的な物理量の空間分布には顕著なノイズ状の歪みがまだ残っており、さらに計算を続行することでこの歪みは消えて行く。歪みが消えるまで、 $M_1 = 1.05$ で 2 万ステップ、1.2 で 1 万ステップ、1.5 で 2 千ステップ、2.0 で 5 千ステップまでの計算を行う必要があるため、一応この時間ステップをもって収束と見なす。次に、第 2 図に数密度変動率の最大値 $\sigma_2 = [\Delta n/n \Delta t]_{\max}$ の減衰過程を、第 1 図と同一の上流マッハ数について示す。このとき、 Δn は各時間ステップ Δt における数密度 n の変化量を表す。いずれのマッハ数においても σ_2 は時間ステップと共に減少し、数密度が収束に向かう様子がわかる。

また、定常流へ収束した場合、質量・運動量・エネルギー流束がすべての空間座標において計算誤差の範囲内で保存されている必要がある。そこで、上に述べた収束判定の時間ステップにおいて、これらの各保存量に関して上下流平衡値からのずれの割合について調べた結果、空間内での各保存量からのずれの割合の最大値はマッハ数 M_1 と共に大きくなるが、 $M_1 = 2.0$ においてもその割合は 0.5% 以下であり、いずれの場合についても定常収束解は保存則をほぼ満たしていると考えてよい。

次には、速度分布関数とそのモーメント積分によって得られた巨視的物理量の計算結果の例を示す。第 3 図に、変換速度分布関数 G についての計算結果の例を示す。 $M_1 = 1.05$ および 1.2 の場合につき、物理空間内の各点に対して G を分子速度 v_x の関数として示している。図中では $x = \text{一定}$ または $\xi = \text{一定}$ の G の値を折れ線で結んでいる。 $M_1 = 1.05$ では、すべての v_x において速度分布関数 G が上流の平衡分布から下流の平衡分布までほぼ単調に移り変わっている。

(a) $M_1 = 1.05$ (20,000step) (b) $M_1 = 1.2$ (10,000step)第 4 図 $M_1 = 1.05$ および 1.2 における巨視量の計算結果 (密度, 温度, 平均速度)

しかしながら $M_1 = 1.2$ では、 $v_x = 0$ の近傍で G の分布に歪みが見られる。この歪みはマッハ数の増加と共に増大する。この歪みは $v_x = \text{一定}$ として $G(x)$ の解を求めるとき、衝突項の熱速度関数の特性により $v_x = 0$ の近傍では $G(x)$ が単調関数でなくなり極値が生ずることによる。この歪みの巨視的物理量に及ぼす影響については、順を追って示して行くこととする。第 4 図に、マクロな物理量としての数密度 n 、温度 T および平均速度 u についての計算結果の例を示す。図 (a) と (b) は $M_1 = 1.05$ および 1.2 の場合につき、それぞれ衝撃波上下流の平衡値を用いて 0~1 の間で変化するように基準化され、距離 x に対して示されている。どちらのマッハ数についても、衝撃波の構造としてはほぼ妥当な解が得られていることがわかる。第 3 図 (b) で示された G の分布の歪みの影響は第 4 図の n 、 T 、 u の分布にはほとんど現れない。また、第 4 図 (b) に示されている太めの点線は、速度分布関数 F に対する式 (7) を 4 次元空間で離散化し直接計算を行った解である。 G および H を用いた場合の結果と完全に一致する。収束性その他についてもほぼ一致したので、1 例としてこの図においてのみ示すこととした。

以降においては、主としてナビエーストックス (NS) 解 (マクスウェル分子) との比較を行っている。本モデル方程式から Grad の 13 モーメント方程式が導かれること、非平衡度の低い極限では NS 方程式に近づくことと予想されるなどの理論的背景⁵⁾ から、得られた結果が NS 解とどの程度一致し、どの程度ずれてくるか、ということが本論文において計算の結果を検討する上で一つの重要な論拠となる。

まず、数密度、粘性応力および熱流束の空間分布につい

 第5図 密度分布のNS解との比較 ($M_1 = 1.05$, $M_1 = 1.2$, $M_1 = 1.5$ および $M_1 = 2.0$)

第6図 粘性応力および熱流束分布のNS解との比較

てNS解との比較を示す．第5図に，数密度 n の x 方向分布が $M_1 = 1.05, 1.2, 1.5$ および 2.0 について，並べて図示されている．ただし，横軸は後に定義する衝撃波厚さ δ がほぼ一致するよう各マッハ数において縮尺が変えられている．実線が本モデル方程式の数値解，点線がNS解である．低いマッハ数では本モデルの解がNS解と比較的良好に一致しているが，マッハ数の増加に伴って衝撃波の上流側・下流側において二つの解の間でずれが生じていく様子がわかる．なお，いずれのマッハ数においても衝撃波内部の中央付近では，二つの解はほぼ一致しているように見える．上流側・下流側において数密度の緩やかな変化が比較的遠方にまで及んでいるのは，このあと第6図と第9図でも示すように，主として $v_x = 0$ 付近における速度分布関数の歪みの影響によるものと考えられる．第6図に，粘性応力 p_{xx} および熱流束 q_x の x 方向分布を示す．第5図と同様に， $M_1 = 1.05, 1.2, 1.5$ および 2.0 について並べて図示されている．縦軸は各マッハ数における本モデル解の最大値（絶対値）で基準化されており，横軸は各マッハ数における本モデル解の衝撃波厚さで基準化されている．実線が本モデルの解，点線がNS解である．第5図の数密度分布の場合と同様に，二つの解は衝撃波中央付近ではずれが比較的小さいが，上流側および下流側では高いマッハ数でずれが大きくなり遠方まで緩やかに変化が及んでいる．後者については，数密度分布のときと同様に $v_x = 0$ 付近における G の分布の歪みの影響と考えられる．

次に，衝撃波厚さ，および粘性応力・熱流束（絶対値）の最大値について，本モデルの解とNS解との比較を示す．こ

第7図 各マッハ数における衝撃波厚さの逆数のNS解との比較

第8図 粘性応力および熱流束（絶対値）の最大値のNS解との比較

こで，衝撃波の無次元厚さを δ とすると，その逆数は以下のように数密度勾配の最大値を用いて定義される．

$$\frac{1}{\delta} = \frac{(dn/dx)_{\max}}{n_2 - n_1} \quad (19)$$

第7図に，本計算で得られた衝撃波厚さをNS解と比較するため，衝撃波厚さの逆数 $1/\delta$ が $M_1 - 1$ に対して両対数で示されている．+印は，本モデルによる計算結果のサンプリングデータである．参考のため，剛体球分子のNS解およびErwinら⁹⁾によるDSMC解を図上で示す．これを

第 9 図 $M_1 = 1.2$ における粘性応力および熱流束分布の他解析との比較

見ると、本論文の拡張気体論モデルによる衝撃波厚さの解析結果は、マクスウェル分子について $M_1 = 1.05$ から 2.0 まで NS 解の結果とほぼ一致していることがわかる。第 8 図に、各マッハ数における粘性応力 p_{xx} および熱流束 q_x の絶対値の最大値を、NS 解との比較において $M_1 - 1$ に対して両対数で示す。 p_{xx} と $|q_x|$ のデータが図上で接近するので、区別するため p_{xx} については $2p_{xx}$ で示してある。+ 印は、サンプリングした計算データを示す。予測されたようにマッハ数 M_1 が小さいときには本モデルの解が NS 解と良く一致し、 M_1 の増加と共に本モデルの解が NS 解から少しずつ離れて行く様子がわかる。

近年、さまざまな手法によるボルツマン方程式の解析^{10, 11)}が行われて来ており、衝撃波の内部構造の解析も数多くなされてきている。ここでは最後に、衝撃波内部における粘性応力と熱流束の空間分布について、最近におけるボルツマン方程式の解析例との比較を示す。第 9 図に、 $M_1 = 1.2$ における p_{xx} および q_x の x 方向分布について二つのボルツマン方程式の解析例 (剛体球分子) との比較を示す。また、参考のためにマクスウェル分子および剛体球分子に対する NS 解も共に示してある。マクスウェル分子に対する本モデル方程式の解については、時間ステップで 2 千ステップと 1 万ステップにおける解を示している。他の解析例や NS 解と比較して、特に衝撃波中央部において p_{xx} , q_x 共にはば妥当な解が得られている。

5. 結 び

本論文では、Grad の 13 モーメント法で用いられた分布関数を基に構築された拡張気体論モデル方程式を定常 1 次元衝撃波問題に適用し、マクスウェル分子について上流マッハ数 $M_1 = 1.05 \sim 2.0$ に対する数値解を求めている。数値解析の結果を以下に要約して示す。

1) 上記のマッハ数範囲で、ほぼ収束と見なせる定常解を得ることができた。

2) 本解析で求められた解とナビエ・ストークス (NS) 解

との比較において、次の結果を得た。

a) $M_1 = 1.05$ 程度のマッハ数が 1 に近い、弱い衝撃波の場合には、得られたすべての巨視的物理量 (数密度、温度、速度、粘性応力、熱流束) の空間分布形状が NS 解とほぼ一致する。

b) 数密度の最大勾配から定義される衝撃波厚さは、上記のマッハ数範囲で NS 解とほぼ一致する。

c) 粘性応力および熱流束 (絶対値) の最大値は、マッハ数の増加と共に NS 解から少しずつ離れて行く。

d) マッハ数の増加と共に、衝撃波の上流側と下流側で数密度などの巨視量の変化が緩やかに遠方にまで及ぶ領域が拡大し、NS 解とのずれが広がる傾向が見られる。

3) 速度空間で分子速度 $v_x = 0$ 付近に現れる速度分布関数の歪みは、本モデル方程式の衝突項における熱速度の関数の特性によるものである。数密度分布などの巨視量に与える影響は、マッハ数が 1 に近い、弱い衝撃波ではほとんど現れない。上記 2-d) における巨視量の変化が遠方にまで及ぶ傾向は、この速度分布関数の歪みによるものである。本論文の解析の範囲内では、衝撃波中央部分への影響は小さいと考えられる。

本論文は、拡張気体論モデル方程式の速度空間数値解析を初めて試みた結果について述べている。定常 1 次元衝撃波構造問題に適用した結果、上流マッハ数 1.05 ~ 2.0 の範囲で、巨視的物理量分布に関して収束近似解が得られている。衝突項を熱速度の陽関数で近似したことによる速度分布関数の歪みの影響がマッハ数の増加とともに大きくなる傾向が見られるが、本論文の範囲内では巨視的物理量分布形状が NS 解と定性的に一致し、定量的にも極端に大きくずれないことがわかった。本モデル方程式は、平衡からのずれが比較的小さい流れへの適用を前提として衝突項に近似モデルを導入しているため、当初は収束解が得られる範囲としては上流マッハ数が 1 に近いごく狭いマッハ数領域に限られる可能性も予測していたが、非平衡の度合いがやや大きい上流マッハ数 2 の場合においても収束解が得られ

るばかりでなく, 衝撃波厚さなどについては NS 解に近い解が得られることがわかった. 以上を総合すると, 拡張気体論モデル方程式の速度空間解析を, 今後, 平衡からのずれが比較的低い希薄な低速内部流れなどのさまざまな工学上の問題に適用することは十分に可能であると考えられる.

本研究を行うにあたり, 小口伯郎宇宙科学研究所名誉教授ならびに櫻井 明東京電機大学名誉教授には拡張気体論モデルおよびその特性に関して多くの有益な御助言と御議論を頂きました. ここに記し, 感謝の意を表します.

参 考 文 献

- 1) Grad, H.: On the Kinetic Theory of Rarefied Gases, *Commun. Pure Appl. Math.*, **2** (1949), pp. 325–407.
- 2) Bhatnagar, P. L., Gross, E. P. and Krook, M.: A Model for Collision Processes in Gases, *Phys. Rev.*, **94** (1954), pp. 511–525.
- 3) Shakov, E. M.: Kinetic Model Equations and Numerical Results, *Proc. 14th Int. Symp. Rarefied Gas Dynamics*, 1984, pp. 137–148.
- 4) Oguchi, H. and Soga, T.: Computation of Rarefied Gas Flows at Near-Equilibrium State by Discrete-Velocity-Ordinate Method, *Proc. 20th Int. Symp. Rarefied Gas Dynamics*, 1997, pp. 285–290.
- 5) Oguchi, H.: Comprehensive Kinetic Model for Weakly Rarefied Gases, *Proc. 23th Int. Symp. Rarefied Gas Dynamics*, 2003, pp. 296–303.
- 6) Nagai, R., Maeno, K. and Honma, H.: Numerical Study of Comprehensive Kinetic Model in Plane Shock Wave Problem, *Proc. 23rd Int. Symp. Rarefied Gas Dynamics*, 2003, pp. 465–472.
- 7) Morinishi, K. and Oguchi, H.: A Computational Method and Its Application to Analyses of Rarefied Gas Flow, *Proc. 14th Int. Symp. Rarefied Gas Dynamics*, 1984, pp. 149–158.
- 8) Honma, H., Xu, D. Q. and Oguchi, H.: Kinetic Model Approach to the Shock Structure Problem: A Detailed Aspect, *Proc. 17th Int. Symp. Rarefied Gas Dynamics*, 1991, pp. 161–166.
- 9) Erwin, A. D., Muntz, E. P. and Pham-Van-Diep, G.: A Review of Detailed Comparisons between Experiments and DSMC Calculation in Non-Equilibrium Flows, *AIAA Paper* 89-1883, 1989.
- 10) Ohwada, T.: Structure of Normal Shock Waves: Direct Numerical Analysis of the Boltzmann Equation for Hard Spheres, *Phys. Fluids A*, **5** (1993), pp. 217–233.
- 11) Beylich, A. E.: Solving the Kinetic Equation for All Knudsen Numbers, *Phys. Fluids*, **12** (2000), pp. 444–465.