質量付加と加熱をとまなう断面積一定のダクトにおける
圧縮性内部流れのモデル^{*1}Compressible Internal Flow Model with Mass and Heat
Additions in a Constant Area Duct榎 谷 賢 士^{*2}・山 口 裕^{*2}・宮 里 義 昭^{*3}・松 尾 一 泰^{*4}

Masashi KASHITANI, Yutaka YAMAGUCHI, Yoshiaki MIYAZATO and Kazuyasu MATSUO

Key Words: Compressible Flow, Boundary Layer, Mass and Heat Additions, Choking, Flow Model

Abstract: The present paper describes a one-dimensional model for a compressible internal flow with mass and heat additions in a constant area duct taking account of the upstream boundary layer. The conservation equations across a control volume are treated one-dimensionally by assuming an appropriate mean flow. This model can estimate the maximum amount of the mass flow rate on the flow choking for a given upstream free Mach number and boundary layer thickness. As the result, a parallel injection can add more amount of mass flow rate than normal injection in the present analytical condition. The characteristics of the flow such as the down stream Mach number, static pressure and total pressure distributions are analyzed with the boundary layer thickness for given upstream condition. Also, the analytical result of the present model shows better agreement with the previous experimental data on the mass and heat additional flows in constant area duct.

1. ま え が き

高い比インパルスをもち、極超音速飛行エンジンとして有効と考えられているスクラムジェットエンジンは、燃料の付加と燃焼による加熱を超音速で行わなければならない、燃焼器における燃料の混合促進をはじめ、高効率の空気取入口とノズル、各エンジン構造部の冷却など、エンジン成否の重要な要素について、これまで議論が重ねられている¹⁻³⁾。特に、エンジン内部流れにおいて、燃料の付加や燃焼により加熱された主流と、機体から生じた厚い境界層との干渉により起こる流れの閉塞は、エンジン性能の著しい低下やエンジン不始動の危険性をもたらすことが指摘されており⁴⁾、質量付加と加熱をとまなう流れ場の境界層の影響を理解することは、極めて重要である。

加熱による流れの閉塞つまり熱閉塞に関する実験は、当量比をパラメータとし流れ場の可視化や壁面静圧測定を行い、熱閉塞が起こる過程などについて議論⁵⁻⁸⁾がなされている。しかし、質量付加による流れの閉塞に関する実験は、これまで熱閉塞の実験の一部分として行われた程度である。一方、理論解析による研究では、複合閉塞の存在を提唱し、エンジンに流入する非一様流を高速と低速の二流管で代表するモデルにより、複合閉塞と熱閉塞の関係など現象の詳細が

解析されている^{9, 10)}。また、数値流体力学による研究¹¹⁻¹³⁾では、熱閉塞が起こる過渡状態や流れの二次元および三次元性について明らかにされている。このように、理論解析や数値計算によって熱閉塞に関する研究が進められているが、質量付加による流れの閉塞については、これまで非粘性一次元解析¹⁴⁻¹⁷⁾が行われた程度で、主流に対する質量付加の方向や、流れの閉塞と境界層の関係など詳細については、未だ不明な点が多い。

本研究では、境界層によって断面にわたり非一様な速度や密度分布を有し、質量付加と加熱をとまなう断面積一定管内圧縮性流れについて、一次元的に取り扱えるモデルを提案し、質量付加をとまなう流れ場の解析を中心に、これまでの実験データと比較検討する。

2. 解 析 モ デ ル

2.1 流れの平均化 流路断面積 A にわたり流速 u や密度 ρ が一様でない流れを一次元的に取り扱うため、平均密度 $\bar{\rho}$ を通常の圧縮性流体力学に関するテキスト^{18, 19)}に記載されているように、次式で定義する。

$$\bar{\rho} \equiv \int \rho u dA / \int u dA \quad (1)$$

また、温度 T 、音速 a 、流速 u に対して、平均温度 $\bar{T}$ 、平均音速 $\bar{a}$ 、平均流速 $\bar{u}$ を断面を通る質量の重みつき平均値²⁰⁾として以下のように定義する。

$$\bar{T} \equiv \int T \rho u dA / \int \rho u dA \quad (2)$$

*1 © 2003 日本航空宇宙学会

平成 15 年 2 月 4 日原稿受理

*2 防衛大学校システム工学群航空宇宙工学科

*3 九州大学大学院総合理工学研究院環境エネルギー工学専攻

*4 北九州市立大学国際環境工学部環境機械システム工学科

第1図 質量付加と加熱をともなう管内流れの検査体積

$$\bar{a} \equiv \left(\int a^2 \rho u dA / \int \rho u dA \right)^{1/2} \quad (3)$$

$$\bar{u} \equiv \left(\int \rho u^3 dA / \int \rho u dA \right)^{1/2} \quad (4)$$

流路断面にわたって静圧 p と全温度 T_0 を一定と仮定すると、上式の平均化により、完全気体の状態方程式、等エントロピーの関係式、エネルギー式は、それぞれ、 $\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}$ 、 $\bar{p}/\bar{\rho}^\gamma = \text{一定}$ 、 $C_p \bar{T} + \bar{u}^2/2 = \text{一定}$ となる。ただし、 R は気体定数、 γ は比熱比、 C_p は定圧比熱である。また、このような平均化により、質量と運動量について以下に定義する修正係数 σ と ξ を導入できる。

$$\sigma \equiv \bar{\rho} \bar{u} A / \int \rho u dA \quad (5)$$

$$\xi \equiv \int \rho u^2 dA / \bar{u} \int \rho u dA \quad (6)$$

σ と ξ を使えば、非一様な断面を通過する流れの保存則を、一次元の形で記述することが可能である。

ここで、後述の第1図に示す断面1の境界層厚さを δ_1 で示し、主流の諸量に添字 e を付け、壁から流れに垂直方向の距離を y として、次式で示す積分式 $H_{j,k,l}$ を導入する。

$$H_{j,k,l} \equiv \int_0^1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_{1e}} \right)^j \left(\frac{u_1}{u_{1e}} \right)^k \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^l d \left(\frac{y}{\delta_1} \right) \quad (7)$$

上式(7)と流路半値幅 h を用いると、平行平板流れの断面1の修正係数 σ_1 と ξ_1 は次式で表される。

$$\sigma_1 = \frac{1}{1 + \frac{\delta_1}{h} (H_{0,1,0} - 1)} \left[\frac{1 + \frac{\delta_1}{h} (H_{1,3,0} - 1)}{1 + \frac{\delta_1}{h} (H_{1,1,0} - 1)} \right]^{1/2} \quad (8)$$

$$\xi_1 = \frac{1 + \frac{\delta_1}{h} (H_{1,3,0} - 1)}{\left[\left\{ 1 + \frac{\delta_1}{h} (H_{1,1,0} - 1) \right\} \left\{ 1 + \frac{\delta_1}{h} (H_{1,3,0} - 1) \right\} \right]^{1/2}} \quad (9)$$

なお、円管の修正係数は、流路半値幅 h を半径 r として導

出可能である。また、断面にわたって静圧と全温度が一定の仮定より、断面1の主流マッハ数を M_{1e} とすると、主流と境界層内の密度比 ρ_1/ρ_{1e} と速度比 u_1/u_{1e} について、以下の関係が成立し²¹⁾、

$$\frac{\rho_1}{\rho_{1e}} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{1e}^2 \left\{ 1 - \left(\frac{u_1}{u_{1e}} \right)^2 \right\}} \quad (10)$$

式(7)の積分式と式(10)の関係式を用いると、式(8)、(9)の σ_1 と ξ_1 を求めることが可能である。

2.2 流れの保存則 流れの保存則を記述するにあたり、 x, y 座標に対して第1図に示すような検査体積を考える。主流に対して質量付加と加熱が行われる直前、直後断面1、断面2とし、検査体積壁面の摩擦を無視して、完全気体の定常な断熱流れを仮定する。断面1については厚さ δ_1 の境界層を考慮し、主流と境界層内の速度比 u_1/u_{1e} を、次式に示すように $1/n$ 乗指数法則に従うと仮定する。

$$\frac{u_1}{u_{1e}} = \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^{1/n} \quad (0 \leq y \leq \delta_1) \quad (11)$$

また、検査体積内の y 方向の各断面内で静圧と全温度は一定と仮定する。ここで、断面2の速度分布は現在よく分かっていないが、下流の速度分布を一樣と仮定した超音速内部流れに発生する擬似衝撃波のモデル²²⁾ は、実験結果を定量的に予測可能であることが報告されているため、本解析でも断面2の速度分布を一樣と仮定する。

次に、質量付加は断面積 S の管路から、一樣流速 u_s 、密度 ρ_s 、全温度 T_{0s} 、 x 軸に対して角度 θ で検査体積へ流入すると仮定する。このとき検査体積へ加える質量流量は $\Delta m = \rho_s u_s S$ となり、 x 軸方向の速度成分は $u_s \cos \theta$ となるから、質量付加によって検査体積に加える x 方向の運動量は $\Delta m u_s \cos \theta$ となる。ここで、 $\theta = 0^\circ$ なら断面1の流れに平行な質量付加、 $\theta = 90^\circ$ なら垂直な質量付加を意味する。

以上の仮定から、断面1の質量流量は平均値と修正係数を用いて表すと $\dot{m} = \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 A / \sigma$ となり、破線で囲む検査体積について質量、運動量、エネルギーの保存則を考えると以下のように表される。

$$\int \rho_1 u_1 dA + \rho_s u_s S = \rho_2 u_2 A \quad (12)$$

$$\int (p_1 + \rho_1 u_1^2) dA + \rho_s u_s^2 S \cos \theta = (p_2 + \rho_2 u_2^2) A \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int \left(C_{p1} T_1 + \frac{u_1^2}{2} + q \right) \rho_1 u_1 dA + C_{ps} T_{0s} \rho_s u_s S \\ = \left(C_{p2} T_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) \rho_2 u_2 A \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、添字 1, 2 は断面 1, 2 における状態、添字 s は検査体積内へ加える流れの状態、添字 0 はよどみ状態をそれぞれ示す。また、状態方程式は次式で表される。

$$p = \rho R T \quad (15)$$

2.3 流れの関係式 本節では、式 (12) ~ (15) の基礎方程式に 2.1 節で定義した平均量 (本解析では平行平板流れを考える) σ_1 と ξ_1 を用いて保存則を整理する。今、各断面で比熱比 γ および定圧比熱 C_p は同じと仮定し、式 (13) を p_2/p_1 について整理すると

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \frac{\gamma \bar{M}_1^2}{\sigma_1} \left(\xi_1 + N \sqrt{\frac{T_s}{\bar{T}_1}} \frac{M_s \cos \theta}{\bar{M}_1} \right)}{1 + \gamma \bar{M}_2^2} \quad (16)$$

ただし、 $\bar{M}_1 = \bar{u}_1/\bar{a}_1$ は断面 1 の平均マッハ数、 M_2 は断面 2 のマッハ数、 M_s は検査体積へ加える流れのマッハ数を表す。また、断面 1 と断面 S の質量流量比を $N \equiv \Delta m/\dot{m} = \sigma_1 \rho_s u_s S / (\rho_1 u_1 A)$ とする。なお、静温度比 $T_s/\bar{T}_1$ と全温度比 T_{0s}/T_{01} は等エントロピーの関係より、 $T_s/\bar{T}_1 = \{2 + (\gamma - 1)\bar{M}_1^2\} / \{2 + (\gamma - 1)M_s^2\} (T_{0s}/T_{01})$ で表される。次に、加熱量と断面 1 の全エンタルピーの比を $Q \equiv q/C_p T_{01}$ として、式 (14) より断面 2 の静温度 T_2 と断面 1 の平均静温度 $\bar{T}_1$ の比 $T_2/\bar{T}_1$ について次式が求まる。

$$\frac{T_2}{\bar{T}_1} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{M}_1^2\right) \left(1 + Q + \frac{T_{0s}}{T_{01}} N\right)}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{M}_1^2\right) (1 + N)} \quad (17)$$

ここで、断面 1 の主流マッハ数 M_{1e} と平均マッハ数 $\bar{M}_1$ の関係は、積分式 (7) を用いると次式で示される。

$$M_{1e}^2 = \frac{2\bar{M}_1^2}{\left\{1 + \frac{\delta_1}{h} (H_{0,1,0} - 1)\right\}^2 \sigma_1^2 \{2 + (\gamma - 1)\bar{M}_1^2\} - (\gamma - 1)\bar{M}_1^2} \quad (18)$$

一方、式 (12) より、次式が求まるから

$$\left(\frac{T_2}{\bar{T}_1}\right)^{1/2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{M_2}{\bar{M}_1} \sigma_1 \frac{1}{1 + N} \quad (19)$$

上式 (19) に式 (17) を代入し整理すると、断面 2 の静圧 p_2 と断面 1 の静圧 p_1 の比 p_2/p_1 は次式で示される。

$$\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)\bar{M}_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{T_{0s}}{T_{01}} N + Q}{1 + N} \frac{\bar{M}_1}{M_2} \frac{1}{\sigma_1}} (1 + N) \quad (20)$$

また、式 (19) に式 (16) と式 (17) を代入し、等エントロピーの関係 $T_{01}/\bar{T}_1 = 1 + (\gamma - 1)\bar{M}_1^2/2$ と $T_{0s}/T_s = 1 + (\gamma - 1)M_s^2/2$ を用いて整理すると、断面 2 におけるマッハ数 M_2 は陽的に求められ、次式で示される。

$$M_2^2 = \frac{1 - 2\gamma\Omega \pm \sqrt{1 - 2\Omega(\gamma + 1)}}{2\gamma^2\Omega - (\gamma - 1)} \quad (21)$$

ここで、 $+$ は $M_2 > 1$ 、 $-$ は $M_2 < 1$ の解を示し、 Ω は次式の通りである。

$$\Omega = \frac{(1 + N) \left(1 + Q + \frac{T_{0s}}{T_{01}} N\right) \left(\bar{M}_1^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{M}_1^4\right)}{\left\{\sigma + \gamma \bar{M}_1^2 \left(\xi_1 + N \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)\bar{M}_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_s^2}} \sqrt{\frac{T_{0s}}{T_{01}}} \frac{M_s \cos \theta}{\bar{M}_1}\right)\right\}^2} \quad (22)$$

今、流れが閉塞する条件は、式 (21) の判別式 $D = 0$ より、以下の関係が求まる。

$$Q = \frac{\left\{\sigma_1 + \gamma \bar{M}_1^2 \left(\xi_1 + N \frac{M_s \cos \theta}{\bar{M}_1} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)\bar{M}_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_s^2}} \sqrt{\frac{T_{0s}}{T_{01}}}\right)\right\}^2}{\bar{M}_1^2 (1 + N) (\gamma + 1) \{2 + (\gamma - 1)\bar{M}_1^2\}} - N \frac{T_{0s}}{T_{01}} - 1 \quad (23)$$

上式 (23) は質量付加と加熱を考慮した流れの閉塞に関する関係式で、マッハ数 $\bar{M}_1$ 、全温度 T_{01} の流れに対して、マッハ数 M_s 、全温度 T_{0s} 、質量流量比 N の流れが断面 S から断面 1 の流れ方向に対して角度 θ で検査体積に加わるとき、加え得る最大熱量が求められる。なお、 $\sigma_1 = 1$ 、 $\xi_1 = 1$ 、 $N = 0$ なら、レイリー流れ²³⁾ の関係式より導出される最大加熱量となる。

次に、 $Q = 0$ 、 $T_{0s} = T_{01}$ として式 (23) を N について整理すると次式を得る。

$$N = \frac{\sigma_1 + \gamma \bar{M}_1^2 \xi_1 - \sqrt{\bar{M}_1^2 \{2 + (\gamma - 1)\bar{M}_1^2\} (\gamma + 1)}}{\bar{M}_1 \sqrt{2 + (\gamma - 1)\bar{M}_1^2} \left\{ \sqrt{\gamma + 1} - \frac{\gamma M_s \cos \theta}{\sqrt{2 + (\gamma - 1)M_s^2}} \right\}} \quad (24)$$

上式 (24) は、質量付加による流れの閉塞に関する関係式で、 θ を変化させることにより断面 1 の流れに対する質量付加の方向を考慮することが可能である。

また、断面 1 の主流における全圧 p_{01e} と断面 2 の全圧 p_{02} の比は以下のように示される。

$$\frac{p_{02}}{p_{01e}} = \left\{ \frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_{1e}^2} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \frac{p_2}{p_1} \quad (25)$$

以上より質量付加と加熱をとまう、境界層の影響を考慮した流れの閉塞に関する解析が可能となる。

3. 計算例および実験結果との比較

3.1 質量付加と流れの閉塞 平行平板流れが閉塞する最大質量付加 (断面 1 と断面 S の質量流量比) N と主流マッハ数 M_{1e} の関係を、主流に対する流路半幅 h で無次元化した境界層厚さ δ_1/h をパラメータとして、質量付加の方向が $\theta = 90^\circ$ と 0° の場合について式 (24) より求め、第 2 図 (a), (b) に示す。本解析では、断面 1 の全温度

第2図 流れが閉塞する最大質量付加

T_{01} と検査体積へ加える流れの全温度 T_{0s} は等しく、比熱比 $\gamma = 1.4$ 、境界層の速度分布は指数 $n = 7$ 、 $\theta = 0^\circ$ のとき検査体積へ加える流れのマッハ数は $M_s = 1.0$ として計算した。なお、質量付加の方向が $\theta = 90^\circ$ のとき、式 (13) の運動量の式に質量付加の運動量は影響しない。また、超音速流れでは質量付加や加熱による逆圧力勾配によって流れのはく離が考えられる。そこで、Arens ら²⁴⁾ による超音速ノズル内の乱流境界層のはく離基準圧力比 p_{sp}/p_1 より導出される、質量付加による流れのはく離に関する質量流量比 N と M_{1e} の関係を同時に示す。 p_{sp}/p_1 は以下の式 (26) で示される。

$$\begin{aligned} \frac{p_{sp}}{p_1} = & \left\{ \frac{\gamma+1}{2} M_{1e}^2 \left(\frac{u_1^*}{u_{1e}} \right)^2 \right\}^{\gamma/(\gamma-1)} \\ & \times \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{1e}^2 \left\{ 1 - \left(\frac{u_1^*}{u_{1e}} \right)^2 \right\} \right]^{-1} \\ & \times \left[\frac{M_{1e}^2}{2} \left\{ (\gamma+1) \left(\frac{u_1^*}{u_{1e}} \right)^2 - \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma+1} \right\} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right]^{1/(\gamma-1)} \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、 u_1^* は境界層内の特性速度、 u_{1e} は断面 1 の主流速度で実験的に $u_1^*/u_{1e} = 0.56$ と与えられる。式 (26) および、圧力係数 $C_{press} = (p_{sp} - p_1)/q_{1e} = 2(p_{sp}/p_1 - 1)/(\gamma M_{1e}^2)$ の関係と、修正係数 $\sigma_1 = 1$ 、 $\xi_1 = 1$ とした式 (20) より、はく離に関する M_{1e} と N の関係が求められる。なお、 q_{1e} は断面 1 の主流の動圧を示す。

第 2 図 (a)、(b) より、主流マッハ数 M_{1e} の流れに、垂直または平行に質量流量を加えると流れは閉塞する。質量付加の方向が $\theta = 90^\circ$ の結果である第 2 図 (a) より、いずれの δ_1/h でも流れが閉塞する最大質量付加 N は、主流マッハ数 $M_{1e} = 0.5$ から M_{1e} の増加とともに急激に減少し $M_{1e} = 1.0$ から 1.15 で最小となる。その後 M_{1e} の増加とともに N も増加する。また、 $\delta_1/h = 1.0$ の最小値 $M_{1e} = 1.15$ より小さい範囲で、 M_{1e} が同じなら δ_1/h が大きくなると N は大きくなる。一方、 $M_{1e} = 1.15$ より大きい範囲で、 M_{1e} が同じなら δ_1/h が大きくなると N は小さくなる。また、求められた N より多くの質量流量を検査体積に加えると、流れの条件は崩れ上流の状態が変化する。次に、境界層厚さを考慮しない非粘性解析の結果¹⁴⁾ は、いずれのマッハ数でも流れが閉塞する前にはく離することが示されている。しかし、本モデルによる計算結果と Arens らによるはく離基準線の比較より、 M_{1e} が 1.96 以下で δ_1/h が大きくなると、はく離基準線が最大質量付加 N より大きくなる場合があり、 δ_1/h の影響で流れがはく離する前に閉塞すると考えられる。なお、はく離基準線の開始点は、式 (20) に下流マッハ数 $M_2 = 1.0$ の条件を代入して求められ、 $M_{1e} = 1.37$ 、 $N = 0.030$ である。

質量付加の方向が $\theta = 0^\circ$ 、つまり断面 1 の流れに対して平行に質量流量を加えたときの結果を第 2 図 (b) に示す。図より N は M_{1e} の増加とともに、第 2 図 (a) の $\theta = 90^\circ$ の結果より急激に減少し $M_{1e} = 1.0$ から 1.15 の範囲で最小となる。このとき、境界層厚さが $\delta_1/h = 1.0$ なら N の最小値は 0.017 となり、 $\theta = 90^\circ$ の最小値 0.007 より大きい。その後、 M_{1e} の増加とともに N も急激に増加している。このように、 M_{1e} に対する N と δ_1/h の関係は $\theta = 90^\circ$ の場合と同様の傾向であるが、 M_{1e} と δ_1/h が同じなら、 $\theta = 0^\circ$ は $\theta = 90^\circ$ より N の値が大きく、より多くの質量流量を検査体積に加えることが可能である。流れのはく離についても $\theta = 90^\circ$ と同様の傾向で δ_1/h の影響により、 M_{1e} に対して流れがはく離する前に、質量付加によって流れが閉塞する場合が考えられる。また、はく離基準より求まる質量付加 N は、第 2 図 (a) に示す $\theta = 90^\circ$ の計算結果よりいずれの M_{1e} でも大きい。第 2 図 (b) のはく離開始点は、 $M_{1e} = 1.34$ 、 $N = 0.064$ である。

3.2 流れの諸量 ($\theta = 90^\circ$ の場合) 本モデルにより検査体積に加える流れの方向が $\theta = 90^\circ$ のとき、流れの諸量と境界層厚さ δ_1/h の関係を、主流マッハ数が $M_{1e} = 0.5$ および $M_{1e} = 3.0$ について計算し、第 3 図 (a) ~ (c) および第 4 図 (a) ~ (c) に示す。本解析では各断面の定圧比熱 C_p は一定、比熱比 $\gamma = 1.4$ 、上流境界層の速度分布指数 $n = 7$ 、断面 1 の全温度 T_{01} と検査体積に加える流れの全温度 T_{0s}

(a) 下流マッハ数

(b) 静圧比

(c) 全圧比

第 3 図 質量付加をともなう流れの諸量と境界層厚さの関係 ($M_{1e} = 0.5$, $\theta = 90^\circ$)

の比 $T_{01}/T_{0s} = 1.0$ として計算を行った．なお，垂直に質量流量を加える場合， $\theta = 90^\circ$ より式 (13) の運動量の式に質量付加の運動量は影響しない．各図の横軸は，いずれも上流境界層厚さ δ_1 と平板高さ h の比 δ_1/h である．縦軸はそれぞれ下流のマッハ数 M_2 ，下流の静圧 p_2 と上流の静圧 p_1 の比 p_2/p_1 ，下流の全圧 p_{02} と上流の主流全圧 p_{01e} の比 p_{02}/p_{01e} である．いずれの計算も断面 1 と断面 S の質量流量比 N をパラメータとしてある．

第 3 図 (a) より δ_1/h の増加とともに M_2 は単調に減少し， N の増加とともにその割合は大きくなる．第 2 図 (a) より $\delta_1/h = 0$ なら $N = 0.23$ で流れは閉塞する．また，質量流量を加えない $N = 0$ の場合，上流境界層厚さ δ_1/h の影響で，下流のマッハ数 M_2 は 0.5 から 0.44 まで減少す

(a) 下流マッハ数

(b) 静圧比

(c) 全圧比

第 4 図 質量付加をともなう流れの諸量と境界層厚さの関係 ($M_{1e} = 3.0$, $\theta = 90^\circ$)

る．次に，第 3 図 (b) の静圧比 p_2/p_1 について， $N = 0$ のとき， δ_1/h に対して p_2/p_1 はほぼ一定であるが， N を大きくすると p_2/p_1 は小さくなる．また，いずれの N でも p_2/p_1 は $\delta_1/h = 0$ のとき最も小さく， δ_1/h の増加とともに増加する．第 3 図 (c) より， p_{02}/p_{01e} は δ_1/h の増加とともに $N = 0, 0.05, 0.1, 0.15$ で単調に減少する．一方， $N = 0.2$ のとき p_{02}/p_{01e} は δ_1/h の増加とともに若干ではあるが増加したのち減少する．これは，第 3 図 (a)，(b) および式 (25) より δ_1/h による M_2 の減少と， p_2/p_1 の増加の影響である．

次に $M_{1e} = 3.0$ の計算結果である，第 4 図 (a)～(c) について考える．第 4 図 (a) より M_2 は δ_1/h ，および N の増加とともに単調に減少し， $N = 0.2$ のとき， $\delta_1/h = 0.74$

(a) 下流マッハ数

(b) 静圧比

(c) 全圧比

第5図 質量付加をともなう流れの諸量と境界層厚さの関係 ($M_{1e} = 0.5$, $M_s = 1.0$, $\theta = 0^\circ$)

(a) 下流マッハ数

(b) 静圧比

(c) 全圧比

第6図 質量付加をともなう流れの諸量と境界層厚さの関係 ($M_{1e} = 3.0$, $M_s = 1.0$, $\theta = 0^\circ$)

で流れは閉塞する。第4図(b)より p_2/p_1 は、第3図(b)と同様 $N = 0$ のときほぼ一定である。また、 $N = 0.2$ を見ると、 δ_1/h の増加により p_2/p_1 は単調に減少した後、流れが閉塞する直前で急激に大きくなる。最後に第3図(c)より、 p_{02}/p_{01e} は δ_1/h の増加とともに減少し、 $N = 0$ でその割合は最も大きい。

以上より、 $M_{1e} = 0.5$ および $M_{1e} = 3.0$ いずれの場合も、 M_2 は、 N と δ_1/h のどちらの影響も強く受ける。また、 p_2/p_1 は N が大きいほど δ_1/h の影響を受け、 p_{02}/p_{01e} は N が小さいほど δ_1/h の影響を受ける。

3.3 流れの諸量 ($\theta = 0^\circ$ の場合) 検査体積に加える流れの方向が $\theta = 0^\circ$ のとき、 $M_{1e} = 0.5$ と $M_{1e} = 3.0$ について解析を行い、第5図(a)~(c)および第6図(a)~(c)

に示す。計算条件は第3, 4図と同じで、検査体積へ加える流れのマッハ数は $M_s = 1.0$ とした。また、各図の座標は第3, 4図と同じで、 N をパラメータとして δ_1/h に対し M_2 , p_2/p_1 , p_{02}/p_{01e} の計算結果である。

第5図(a)には $M_{1e} = 0.5$ の M_2 の解析結果を示す。図より M_2 は定性的に第3図(a)と同様の傾向であり、いずれの N でも δ_1/h の増加とともに M_2 は単調に減少する。また、第3図(a)の $\theta = 90^\circ$ の結果と比較して、 δ_1/h と M_2 が同じなら、およそ2倍程度の質量流量を検査体積に加えることが可能である。次に第5図(b)よりいずれの δ_1/h でも p_2/p_1 に対する N の影響は $\theta = 90^\circ$ の場合より小さい。このことから、垂直に質量流量を加える場合より、多くの質量流量を検査体積に加えることが可能である

(a) 加熱をとまう流れ

(b) 質量付加をとまう流れ

第 7 図 静圧比に関する本モデルによる計算値と実験結果との比較

ことが分かる．第 5 図 (c) より， p_{02}/p_{01e} は， δ_1/h の増加とともに単調に減少する．また， $\delta_1/h = 0$ ， $N = 0.49$ で流れが閉塞するとき $p_{02}/p_{01e} = 1.11$ となり， $p_{02}/p_{01e} = 1.0$ より大きい．これは，式 (13) に示されるように，検査体積へ加える流れの運動量が影響している．

最後に $M_{1e} = 3.0$ ， $\theta = 0^\circ$ の結果について考察する．第 6 図 (a) より δ_1/h ，および N の増加とともに M_2 は単調に減少し，第 2 図 (b) から流れが閉塞する最大質量付加は， $\delta_1/h = 0$ のとき $N = 0.57$ で， $M_{1e} = 0.5$ の結果と同様 $\theta = 90^\circ$ のおよそ 2 倍程度の質量流量を検査体積に加えることが可能である．第 6 図 (b)，(c) の p_2/p_1 および p_{02}/p_{01e} は定性的に第 4 図 (b)，(c) と同様の傾向である．

以上より，検査体積に加える流れのマッハ数 $M_s = 1.0$ として，質量付加の方向 θ 以外を同じ条件で計算すると， $\theta = 0^\circ$ の計算結果は， $\theta = 90^\circ$ の結果と定性的に同様の傾向である．このとき， $\theta = 0^\circ$ は $\theta = 90^\circ$ より多くの質量流量を検査体積に加えることが可能である．

3.4 実験結果との比較 本節では断面積一定の測定部の流れに対して平行な質量付加と加熱をとまう従来の実験結果⁸⁾ と，本モデルによる計算結果を比較検討する．前述のように境界層が質量付加や加熱をとまう流れに及ぼす影響について，系統的な実験はこれまで行われていない．

そこで，実験条件より，Tucker の方法²¹⁾ によって境界層厚さ δ_1/h を見積もり，加熱量 Q と質量流量比 N に対する上流静圧 p_1 と下流静圧 p_2 の比 p_2/p_1 を，本解析結果との比較で第 7 図 (a)，(b) に示す．なお， N は当量比より， Q は燃焼効率より下流の全温度を算出し加熱のみが行われたと仮定して求めた．第 7 図 (a) の実線は，主流マッハ数 $M_{1e} = 2.5$ と 3.8 について実験条件より求めた δ_1/h を代入し，検査体積に対して加熱が行われたときの本モデルによる計算結果を示す．また，第 7 図 (b) の実線は同様に質量付加が行われたときの計算結果を示す．計算では比熱比 γ を一定とし，各断面の定圧比熱 C_p の違いを考慮して計算した．実験点 p_2/p_1 は，測定部の流れに対して質量付加や加熱が行われ壁面静圧が一定と考えられる値の平均値を示し，平均値からのずれも示す．

本モデルによる計算の妥当性については，より多くの実験結果との比較が必要と考えられるが，第 7 図 (a) より， $M_{1e} = 3.8$ ， $N = 0$ の場合， Q について p_2/p_1 の実験結果と本解析は比較的良好に一致し， Q の増加とともに p_2/p_1 も大きくなる．また， $M_{1e} = 2.5$ ， $N = 0$ の実験結果は変動が大きく，計算結果は実験値よりやや小さい．一方，第 7 図 (b) の $M_{1e} = 2.5$ ， 3.8 で $Q = 0$ の場合，いずれのマッハ数でも本モデルより求められた p_2/p_1 の増加の割合は， N の増加とともにしだいに小さくなる．また， $Q = 0$ の本モデルによる計算結果は，実験値と定量的によく一致している．

4. 結 論

境界層によって断面にわたり非一様な速度や密度分布を有し，質量付加や加熱をとまう断面積一定管内圧縮性流れについて，一次元的に取り扱えるモデルを提案し，これまでの実験データと比較検討を行った．その結果を要約すると以下の通りである．

(1) 本解析モデルによって，上流境界層の影響を考慮した質量付加と加熱をとまう下流のマッハ数 M_2 は，式 (18) で与えられ，上流静圧 p_1 と下流静圧 p_2 の比 p_2/p_1 は式 (20) より導出できる．また，上流の主流における全圧 p_{01e} と下流の全圧 p_{02} の比 p_{01e}/p_{02} は式 (25) で表される．検査体積に質量流量を加えたとき，流れが閉塞する最大質量付加 N は式 (24) で表され，本解析では検査体積へ加える流れの方向を考慮することが可能である．

(2) 主流に対して垂直および平行に質量流量を加えたとき，流れが閉塞する最大質量付加 N は， M_{1e} の増加とともに急激に減少し最小となった後， M_{1e} の増加とともに増加する．また，境界層厚さ δ_1/h の最小値より小さい範囲では， M_{1e} が同じなら δ_1/h が大きくなると N は大きくなる．一方，最小値より大きい範囲では， M_{1e} が同じなら δ_1/h が大きくなると N は小さくなる．

(3) 本モデルによる計算から，主流に対して垂直および平行どちらに質量流量を加えても，境界層厚さ δ_1/h の影響で流れがはく離する前に閉塞する場合がある．

(4) 垂直質量付加 ($\theta = 90^\circ$) と平行質量付加 ($\theta = 0^\circ$)

について, $M_{1e} = 0.5$ と $M_{1e} = 3.0$ いずれの場合も, M_2 は N と δ_1/h どちらの影響も強く受け, p_2/p_1 は N が大きいほど δ_1/h の影響を, p_{02}/p_{01e} は N が小さいほど δ_1/h の影響を受ける. また, 検査体積に加える流れのマッハ数 $M_s = 1.0$ として, 質量付加の方向 θ 以外を同じ条件で計算すると, 流れが閉塞するまで $\theta = 0^\circ$ は $\theta = 90^\circ$ より多くの質量流量を検査体積に加えることが可能である.

(5) 本モデルによる計算結果は, 質量付加および加熱をともなう流れについて従来の実験結果と比較的よく一致する. 特に, 質量付加をともなう流れの解析結果は, 定量的にも実験結果と良く一致する.

参 考 文 献

- 1) J. L. ケルブロック: ジェットエンジン概論, 梶昭次郎訳, 東京大学出版会, 東京, 1993, pp. 395-445.
- 2) Curran, E. T., Heiser, W. H. and Pratt, D. T.: Fluid Phenomena in Scramjet Combustion Systems, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **28** (1996), pp. 323-360.
- 3) Ferri, A.: Review of SCRAMJET Propulsion Technology, *J. Aircraft*, **5** (1968), pp. 3-10.
- 4) Lewis, M. J. and Hastings, D. E.: The Influence of Flow Non-Uniformities in Air-Breathing Hypersonic Propulsion Systems, *AIAA Paper 87-2079*, 1987.
- 5) Yoon, Y., Donbar, J. M., Huh, H. and Driscoll, J. F.: Measured Supersonic Flame Properties: Heat-Release Patterns, Pressure Losses, Thermal Choking Limits, *J. Propul. Power*, **12** (1996), pp. 718-723.
- 6) McIntyre, T. J., Houwing, A. F. P., Palma, P. C., Rabbath, P. A. B. and Fox, J. S.: Optical and Pressure Measurements in Shock Tunnel Testing of a Model Scramjet Combustor, *J. Propul. Power*, **13** (1997), pp. 388-394.
- 7) O'Byrne, S., Doolan, M., Olsen, S. R. and Houwing, A. F. P.: Analysis of Transient Thermal Choking Processes in a Model Scramjet Engine, *J. Propul. Power*, **16** (2000), pp. 808-814.
- 8) O'Byrne, S., Doolan, M., Olsen, S. R. and Houwing, A. F. P.: Measurement and Imaging of Supersonic Combustion in a Model Scramjet Engine, *ISSW21 Paper 2890*, 1997.
- 9) 佐藤哲也, 梶昭次郎: スクラムジェットエンジンの複合閉塞による不始動遷移に関する数値解析 (第1報), *日本航空宇宙学会誌*, **41** (1993), pp. 27-35.
- 10) 佐藤哲也, 梶昭次郎: スクラムジェットエンジンの複合閉塞による不始動遷移に関する数値解析 (第2報), *日本航空宇宙学会誌*, **41** (1993), pp. 36-42.
- 11) Kim, J. and Namba, M.: Thermal Choking in Three-Dimensional Scramjet Engine Models, *Trans. Jpn. Soc. Aeronaut. Space Sci.*, **41** (1998), pp. 155-162.
- 12) McDaniel, K. S. and Edwards, J. R.: Three-Dimensional Simulation of Thermal Choking in a Model Scramjet Combustor, *AIAA Paper 2001-0382*, 2001.
- 13) McDaniel, K. S. and Edwards, J. R.: Simulation of Thermal Choking in a Model Scramjet Combustor, *AIAA Paper 99-3411*, 1999.
- 14) Heiser, W. H., McClure, W. B. and Wood, C. W.: Simulating Heat Addition via Mass Addition in Constant Area Compressible Flows, *AIAA J.*, **33** (1994), pp. 167-171.
- 15) Heiser, W. H., McClure, W. B. and Wood, C. W.: Simulating Heat Addition via Mass Addition in Variable Area Compressible Flows, *AIAA J.*, **34** (1995), pp. 1076-1078.
- 16) Zucrow, M. J.: *Gas Dynamics*, John Wiley, New York, 1967, pp. 462-473.
- 17) Shapiro, A. H. and Hawthorne, W. R.: The Mechanics and Thermodynamics of Steady One-Dimensional Gas Flow, *J. Appl. Mech.*, **14** (1947), pp. 317-366.
- 18) 生井武文, 松尾一泰: 圧縮性の流体力学, 理工学社, 東京, 1977, p. 51.
- 19) Ward-Smith, A. J.: *Internal Fluid Flow*, Clarendon Press, Oxford, 1980, p. 67.
- 20) 鳥住保博: 管内圧縮性流れの一次元的取扱い手法, *日本機械学会論文集 B 編*, **58** (1992), pp. 1650-1653.
- 21) Tucker, M.: Approximate Calculation of Turbulent Boundary-Layer Development in Compressible Flow, *NACA Tech. Note 2337*, 1951.
- 22) 宮里義昭, 松尾一泰: 断面積一定の管内における疑似衝撃波の一次元モデル, *日本機械学会論文集 B 編*, **61** (1995), pp. 4359-4365.
- 23) 松尾一泰: 圧縮性流体力学, 理工学社, 東京, 1994, pp. 178-182.
- 24) Herbert, M. V. and Herd, R. J.: Boundary-Layer Separation in Supersonic Propelling Nozzles, *ARC, R&M 3421*, 1964.