多数機フォーメーションフライトのための
連続推力推進による燃料最小誘導則^{*1}Fuel-Optimal Continuous-Thrust Guidance Algorithms
for a Large Number of Formation Flying Spacecraft河原 吉 伸^{*2}・津 田 雄 一^{*3}・中須賀 真 一^{*2}

Yoshinobu KAWAHARA, Yuichi TSUDA and Shinichi NAKASUKA

Key Words: Fuel-Optimal Guidance, Continuous-Thrust, Formation Flight

Abstract: A continuous-thrust guidance algorithm suitable for a formation flying of a large number of spacecraft having electric propulsion systems are discussed. This algorithm generates continuous-thrust transfer trajectory between any two arbitrary states, which can be optimized in term of total fuel consumption for a formation changing. The algorithms are effective not only in term of fuel consumption but also in term of information quantity to be shared among member spacecraft. Moreover taking computational simplicity into consideration, a quasi-optimal continuous-thrust guidance algorithm are derived.

本稿で使用する記号

座標系

 Σ_i : 中心天体を原点に持つ慣性座標系 Σ_r : 参照軌道系に原点を持つ回転座標系 Σ_c : フォーメーション中心座標系

変数, 定数

 t : 時間 θ : true anomaly r_i : 座標系 Σ_i における位置 ($= [x_i, y_i, z_i]$) r_r : 座標系 Σ_r における位置 ($= [x_r, y_r, z_r]$) r : 式 (3) により変換された位置 y : 式 (5) により定義される状態量 ξ : 式 (20) により定義される状態量 u : 式 (10) により定義される制御入力 Φ : 推移行列. ただし, $\Phi^{-1} = [G_{6 \times 3}, H_{6 \times 3}]$ l : 随伴行列. ただし, $l^T = [p^T, q^T]$ P : primer vector (式 (18)) λ : 任意の 6 次元定ベクトル ν : 終端拘束条件に関する随伴変数 A : 線形運動方程式のシステム行列 (式 (6)) β : 線形運動方程式の入力係数 (式 (7)) s : (式 (8)) w : 線形運動方程式の制御ベクトル (式 (9)) T : 推力ベクトル T_m : 最大推力 b : 最大推力と衛星質量に比例する量 (式 (11)) e : 参照軌道の離心率 μ : 重力定数 $\times$ 中心天体の質量 (地球の場合 3.96×10^{14})

添え字, 微分記号

 $(\cdot)$: 時間 t に関する微分 $(\cdot)'$: true anomaly θ に関する微分 $(\cdot)_r$: Σ_r 座標系における量 $(\cdot)_c$: Σ_c 座標系における量 $(\cdot)_0$: 初期時刻における量 $(\cdot)_f$: 終端時刻における量

1. は じ め に

フォーメーションフライトは今後の深宇宙や地球軌道ミッションにとって非常に重要な技術の一つである。多数機のフォーメーションは冗長性・再構成能力・即応性を持ったシステムを構築でき、また多点同時観測を可能にしたり、大規模構造物の代替としても有望である。さらには各衛星が別々の機能を持ち、フォーメーション全体として一つのシステムとして機能する、“Virtual Orbital Platform”¹⁾などのアイデアも提案されている。こういったミッションを行う際にも、将来的にはフォーメーションを構成する衛星数は100機オーダーの多数機になる場合もあり、フォーメーション中の各衛星は自律分散的な誘導を行うことが予想される。このような多数機のフォーメーションを実現するには、各衛星の相対位置を適切に維持(隊形維持)したり、別のものに変更(隊形変更)したりするための軌道制御(フォーメーションフライト技術)が必須である。この際、誘導時のフォーメーション全体で共有する情報量や

*1 © 2004 日本航空宇宙学会

平成 15 年 7 月 31 日原稿受理

*2 東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻

*3 宇宙航空研究開発機構 (JAXA) 宇宙科学研究本部

計算コストをできるだけ小さくすることは、そのような多数機フォーメーションの実現を左右する要素であることは容易に想像がつく。

本稿では、このような理由から隊形変更時の情報量・計算量を考慮した、多数機のフォーメーションフライトに適した燃料最小連続推力誘導則について論じる。“連続推力”とは、例えば電気推進を軌道変更に利用する場合にあたる。まず少ない情報量を用いた任意の2点間の燃料最小連続推力軌道を求め、次にフォーメーション全体の大域的な燃料最小誘導則について述べる。さらにこの方法で問題となる計算時間を克服するため、フォーメーション位置を決める際にインパルス近似を用いる方法を提案する。

2. 参照軌道周りの線形運動方程式と推移行列²⁾

2.1 座標系の定義 フォーメーションフライトでは各衛星同士は近傍を飛行するので、フォーメーション重心運動を表す参照軌道周りに線形化された回転座標系を考えればよい。本稿では、参照軌道としてどんな円錐軌道でも扱えるようにする（円軌道については後の解析解を利用する）。

第1図に示すように、中心天体を原点にした慣性座標系を Σ_i 、そして参照軌道の上に原点を持つ回転座標系を Σ_r とし、 Σ_r の x 軸を中心天体から衛星の向き、 y 軸を衛星の進行方向、そして z 軸をそれらと右手系を成すようにとる。

2.2 運動方程式^{2,3)} まず中心天体周りの軌道の運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{\mathbf{R}}(t) = -\frac{\mu}{R(t)^3} \mathbf{R}(t) + \mathbf{f} \quad (1)$$

これを参照軌道周りに線形化する際に、独立変数を t (時間) から θ (true anomaly) へと変換し(式(2))を用いる。さらに式(3)の変換を施すと、見通しのよい式が得られる。

$$(\dot{\cdot}) = (\cdot)' \dot{\theta}; \quad (\ddot{\cdot}) = (\cdot)'' \dot{\theta}^2 + \dot{\theta} \dot{\theta}' (\cdot)' \quad (2)$$

$$\mathbf{r}(\theta) = (1 + e \cos \theta) \mathbf{r}_r(\theta) \quad (3)$$

これらを利用して次の線形化された運動方程式をえる。

$$\mathbf{y}'(\theta) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{y}(\theta) + \beta(\theta) \mathbf{w}(\theta) \quad (4)$$

第1図 座標系の定義

ここで、

$$\mathbf{y}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\theta) \\ \mathbf{r}'(\theta) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3/s(\theta) & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\beta(\theta) = b/s(\theta)^3 \quad (7)$$

$$s(\theta) = 1 + e \cos \theta \quad (8)$$

$$\mathbf{w}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{u}(\theta) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{u}(\theta) = \frac{\mathbf{T}(\theta)}{T_m} \quad (10)$$

b は最大推力 (T_m) と衛星質量 (m) に比例する量で次式で表される。

$$b = \frac{L^6 T_m}{\mu^4 m} \quad (11)$$

L は衛星の中心天体周りの角運動量 (定数)、 μ は (重力定数 $\times$ 中心天体の質量) である。ここでの導式では、推進による衛星質量の変化は初期衛星質量に比べ十分小さいと仮定している。

2.3 推移行列⁴⁾ 線形運動方程式 (4) には推移行列 (Φ) の解析解が存在し、 $\mathbf{y}$ は次式のように表せる。

$$\mathbf{y}(\theta) = \Phi(\theta) \left[\Phi(\theta_0)^{-1} \mathbf{y}_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \beta(\tau) \mathbf{H}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right] \quad (12)$$

$\mathbf{H}(\theta)$ は推移行列の逆行列の右半分からなる行列、つまり $\Phi^{-1} = [\mathbf{G}_{6 \times 3}, \mathbf{H}_{6 \times 3}]$ である。 Φ の解析解が求まることは重要で、それにより推移軌道における状態量は積分計算なしで即座に求まる。

3. 低推力推進による燃料最小誘導³⁻⁵⁾

低推力推進は、推進器の制約によって二つに分類される。一つは推進器がスラストの大きさを自由に变化させられない場合 (CEV; constant ejection velocity) であり、もう一つは推進器が限られた動力内でスラストの大きさを自由に变化させられる場合 (LP; limited power) である⁶⁾。

本研究では、LP に関する燃料最小誘導について考える。

3.1 燃料最小化問題とその評価関数 ここで考える誘導の目的は、任意の初期条件から指定時刻に指定した運動状態

$$\mathbf{y}(\theta_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\theta_0) \\ \mathbf{r}'(\theta_0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(\theta_f) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\theta_f) \\ \mathbf{r}'(\theta_f) \end{bmatrix} \quad (13)$$

を最小燃料により実現することである。つまり、衛星質量の時間変化 $\dot{m}(t)$ の積分値を最小化する。

衛星質量の時間変化は、推進器の電力などの動力 $P(t)$ を用いて次のように表せる。

$$\dot{m}(t) = -\frac{|T(t)|^2}{2P(t)} \quad (14)$$

上式からも分かるように、質量変化を最小にするには少なくとも P は最大であることが分かる。従って、その最大推力を $P_{\max}$ として、また独立変数を θ に変換して式 (14) を整理すると

$$m'(\theta) = -\frac{L^3}{2P_{\max}\mu^2} \frac{|T(\theta)|^2}{s(\theta)^2} \quad (15)$$

となる⁶⁾。ここで式 (10) で定義した制御入力 u を用いれば、評価関数として次式を得る。

$$J(u(\theta)) = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{u(\tau)^T u(\tau)}{s(\tau)^2} d\tau \quad (16)$$

ただし、 $|u| \leq 1$ である。

以上より、低推力推進による燃料最小誘導問題は微分方程式 (4) を満たしつつ、評価関数 (16) を最小にする制御入力 $u(\theta) (\leq 1)$ を求めることに帰着される。そのときの境界条件は、式 (13) で与えられる。

3.2 燃料最小誘導則 運動方程式 (4) の状態量に対する随伴変数を $l(\theta)$ とするとハミルトニアンは次のように求められる。

$$\begin{aligned} H = & l(\theta)^T A(\theta) y(\theta) \\ & + \frac{1}{2s(\theta)^2} \left[u(\theta)^T u(\theta) \right. \\ & \left. + 2s(\theta)^2 \beta(\theta) q(\theta)^T u(\theta) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

ここに q は随伴変数ベクトルの下半分、つまり $l(\theta)^T = [p(\theta)^T, q(\theta)^T]$ である。

次のようなベクトルを定義する。

$$\begin{aligned} P(\theta) &= s(\theta)^2 \beta(\theta) q(\theta) \\ &= s(\theta)^2 \beta(\theta) H(\theta)^T \lambda \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $l(\theta) = (\Phi(\theta)^{-1})^T \lambda$ の関係を用いた。 λ は 6 次元の定ベクトルである。式 (17) から分かるように P は制御入力 u の係数になっており、重要なベクトルで primer vector⁷⁾ と呼ばれるものである。

ポントリャーギンの原理を用いれば、燃料最小誘導則はこの P を用いて次のように導ける。

$$u(\theta) = \begin{cases} -P(\theta) & |P(\theta)| < 1 \\ -\frac{P(\theta)}{|P(\theta)|} & |P(\theta)| > 1 \end{cases} \quad (19)$$

この制御則で重要なことは、燃料最小となる制御入力 u が primer vector P 、つまり式 (18) より 6 次元定ベクトル λ のみで一意に決定されることである。

第 2 図 低推力燃料最小計算のアルゴリズム

3.3 低推力燃料最小計算アルゴリズム shooting method に基づいたオンボードにおける燃料最小計算のアルゴリズムを第 2 図に示す。計算の簡便さの理由から、次のような状態変数の変換を行っている。

$$\xi(\theta) = \Phi^{-1}(\theta) y(\theta) - \Phi^{-1}(\theta_0) y(\theta_0) \quad (20)$$

このとき、推移行列による解 (12) は次のようになる。

$$\xi(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \beta(\tau) R(\tau) u(\tau) d\tau \quad (21)$$

具体的には次のように行う。

- step 1 λ の初期推定値 λ_0 を与える
- step 2 λ_k を用いて初期状態量 $\xi_k(\theta_0)$ から燃料最小誘導則 (19) 及び推移行列による解 (21) を用いて終端状態量 $\xi_k(\theta_f)$ を計算する
- step 3 $\xi_k(\theta_f)$ と目標状態量 ξ_f との差 $F = \xi_k - \xi_f$ を計算し、その絶対値が許容誤差 (ϵ) 以内であれば計算を終了する。そうでなければ step 4 に進む
- step 4 次式により α 行列を計算する

$$\begin{aligned} [\alpha]_{ab} &= \frac{\partial F_a}{\partial \lambda_b} \\ &\simeq \frac{F_a(\lambda_1, \dots, \lambda_b + \Delta \lambda_b, \dots) - F_a(\lambda_1, \dots, \lambda_b, \dots)}{\Delta \lambda_b} \end{aligned} \quad (22)$$

- step 5 次式より λ の補正値 $\delta \lambda$ を求め、 λ_k に足して $k = k + 1$ として step 2 に戻る

$$\delta \lambda = -\alpha^{-1} F \quad (23)$$

4. フォーメーション全体の大域的な低推力燃料最小誘導

4.1 フォーメーション中心座標系 前章で導いた低推力燃料最小誘導は、境界条件が Σ_r について与えられていた。つまり境界時刻における位置と速度は、絶対座標で指定さ

第3図 フォーメーション中心座標系

れていた．しかしフォーメーションフライトの場合，フォーメーションの形，つまり各衛星間の相対位置のみが重要であり，必ずしもその絶対位置に制約を課す必要がないことも多い．従って，全体の隊形の絶対位置を自由することで消費燃料を減らす余地がある．

そこで，第3図に示すように隊形変更時のフォーメーションの重心位置を原点として Σ_r に平行な座標系を考え， Σ_c と置く．前章における誘導則は， Σ_c が Σ_r に常に一致していたと言える．

4.2 拘束条件及び評価関数 フォーメーションの形を指定することは，フォーメーション内の j 番目の衛星の Σ_c に関する終端拘束条件を次のようにしたことに等しい．

$$\mathbf{r}_c^j(\theta_f) = \mathbf{r}_f^j \quad (24)$$

このとき，初期時刻においては Σ_r と Σ_c は一致しているので，終端時刻におけるフォーメーション中心（ Σ_c の原点）の Σ_r に対する位置を $\mathbf{r}_*$ と置くと， Σ_r に関する終端拘束条件は次のようになる．

$$\mathbf{r}_r^j(\theta_f) = \mathbf{r}_f^j + \mathbf{r}_* \quad (25)$$

また，評価関数は次のようになる．

$$J = \sum_{j=0}^N \int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{\mathbf{u}_j(\tau)^T \mathbf{u}_j(\tau)}{s(\tau)^2} d\tau \quad (26)$$

4.3 燃料最小誘導則 j 番目の衛星に関するハミルトニアンは，前節のそれと同じように次のように求められる．

$$\begin{aligned} H_j = & \mathbf{l}_j(\theta)^T \mathbf{A}(\theta) \mathbf{y}_j(\theta) \\ & + \frac{1}{2s(\theta)^2} \left[\mathbf{u}_j(\theta)^T \mathbf{u}_j(\theta) \right. \\ & \left. + 2s(\theta)^2 \beta(\theta) \mathbf{q}_j(\theta)^T \mathbf{u}_j(\theta) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

従って燃料最小誘導も前章と同じように次のように書ける．

$$\mathbf{u}_j(\theta) = \begin{cases} -\mathbf{P}_j(\theta) & |\mathbf{P}_j(\theta)| < 1 \\ -\frac{\mathbf{P}_j(\theta)}{|\mathbf{P}_j(\theta)|} & |\mathbf{P}_j(\theta)| > 1 \end{cases} \quad (28)$$

ただし今考えるフォーメーション位置も自由度に入れた場合は，絶対位置指定の場合と異なり，終端拘束条件が (25)

第4図 フォーメーション全体の燃料最小計算アルゴリズム

のようになるため，変分法によれば次の随伴変数の終端条件が課せられる． ν は状態量の終端条件に関する随伴変数である．

$$\mathbf{p}_j(\theta_f) = \nu_{pj} + \frac{1}{N} (\nu_{p1} + \dots + \nu_{pN}) \quad (29)$$

$$\mathbf{q}_j(\theta_f) = \nu_{qj} \quad (30)$$

λ を用いて表せば次のようになる．

$$\mathbf{H}(\theta_f)^T \lambda_j = \nu_{pj} + \frac{1}{N} (\nu_{p1} + \dots + \nu_{pN}) \quad (31)$$

$$\mathbf{G}(\theta_f)^T \lambda_j = \nu_{qj} \quad (32)$$

4.4 計算アルゴリズム フォーメーション全体の相対位置指定誘導の燃料最小化アルゴリズムを第4図に示す．ここでも，shooting method を用いており，具体的には次のようになる．

step 1 すべての衛星 (j) について ν_j の初期値 ν_{j0} を与える

step 2 ν_{jk} を用いて，(31)(32) 式から λ_{jk} を求める

step 3 λ_{jk} を用いて，最小燃料誘導則 (28) 及び推移行列による解 (21) から終端状態量 $\xi_{jk}(\theta_f)$ を計算する

step 4 すべての j について， $\xi_{jk}(\theta_f)$ と目標状態量 ξ_{jf} の差 $\mathbf{F}_j = \xi_{jk}(\theta_f) - \xi_{jf}$ を計算し，その絶対値が許容誤差 (ϵ) 内であれば計算を終了する．そうでなければ step 5 に進む

step 5 次式により α 行列を計算する

$$\begin{aligned} [\alpha]_{ab} = & \frac{\partial F_a}{\partial \nu_b} \\ \simeq & \frac{F_a(\nu_1, \dots, \nu_b + \Delta \nu_b, \dots) - F_a(\nu_1, \dots, \nu_b, \dots)}{\Delta \nu_b} \end{aligned} \quad (33)$$

ただし， $\mathbf{F}^T = [\mathbf{F}_1^T, \dots, \mathbf{F}_N^T]$ ， $\boldsymbol{\nu}^T = [\nu_1^T, \dots, \nu_N^T]$

step 6 次式より ν_{jk} の補正值 $\delta\nu$ を求め、 ν_{jk} に足して $k = k + 1$ として step 2 に戻る

$$\delta\nu = \alpha^{-1} F \quad (34)$$

4.5 実用性から見た問題点 本節で求めた誘導則では、 α を求める際の積分計算の回数が衛星数の 2 乗に比例し、また収束も遅くオンボードでの計算には実用的ではない。というのは、最適化計算時にフォーメーション全体の位置をずらす度に燃料最小計算を行わなければならないために、2 重の最適化計算を行う必要があるからである。

5. 実用的なフォーメーション全体の大域的準燃料最小誘導

5.1 問題点の対策 4.5 節における問題点に対して、本稿では目標時刻におけるフォーメーションの位置 (つまり r^*) を求める際にインパルス近似を利用し、そしてその中心位置に対する目標隊形への移行誘導には 3 章の低推力誘導を行う準燃料最小誘導を提案する。

5.2 インパルス近似による最適なフォーメーション位置^{1, 8, 9)}

5.2.1 インパルス近似 推力による加速度を a とする時

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a dt \quad (35)$$

を一定に保ちつつ $t_2 \rightarrow t_1$, $a \rightarrow \infty$ とした極限をインパルス近似と言う。つまり、軌道変更が瞬間的に、かつ無限の加速度によって行われるとした最適解である。

5.2.2 2 インパルス軌道 インパルス軌道を考えるにあたり、 r に関する速度ベクトルを v とし、インパルスを加える前後の量をそれぞれ $(\cdot)^-$, $(\cdot)^+$ と表すこととすると、(12) 式より推移軌道においては次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} r_f \\ v_f^- \end{bmatrix} = \Phi(\theta_f) \Phi(\theta_0)^{-1} \begin{bmatrix} r_0 \\ v_0^+ \end{bmatrix} \quad (36)$$

(36) において未知量 v_f^- , v_0^+ について解くと次式を得る。

$$\begin{bmatrix} v_0^+ \\ v_f^- \end{bmatrix} = [H(\theta_0), -H(\theta_f)]^{-1} [-G(\theta_0), G(\theta_f)] \begin{bmatrix} r_0 \\ r_f \end{bmatrix} \quad (37)$$

従って、初期インパルス Δv_0 および終端インパルス Δv_f は、離心率 e 、初期時刻 θ_0 、終端時刻 θ_f 、そして目標状態量 y_f を指定すれば、(37) 及び次式により代数的に求めることができる。

$$\Delta v_0 = v_0^+ - v_0 \quad (38)$$

$$\Delta v_f = v_f - v_f^- \quad (39)$$

5.2.3 フォーメーション全体の総 Δv 最小化 インパルス軌道においては、燃料最小化問題の評価関数は総 Δv となる。

今、初期状態において Σ_c と Σ_r の原点が一致していると

すると、 Σ_c の Σ_r に対する状態量 $y^*(\theta) = [r^*(\theta), v^*(\theta)]$ について次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} y_f^{*-} &= \Phi(\theta_f) \Phi(\theta_0)^{-1} y_0^{*+} \\ &= \Phi(\theta_f) \Phi(\theta_0)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ v_0^{*+} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (40)$$

従って、フォーメーションを構成する各衛星 (j) の推移軌道における Σ_r での運動は次のように表せる。

$$y_{jf}^- + y_f^{*-} = \Phi(\theta_f) \Phi(\theta_0)^{-1} (y_{j0}^+ + y_0^{*+}) \quad (41)$$

よって、 j 番目の衛星が隊形変更に要する総 Δv は次のようになる。

$$\Delta v_j = |\Delta v_{j0} + v_0^{*+}| + |\Delta v_{jf} + v_f^{*-} - v_f^{*-}| \quad (42)$$

従って、フォーメーション全体の総 Δv は次のようになる。

$$J = \sum_{j=1}^N \Delta v_j = \sum_{j=1}^N |\Delta v_{j0} - c_0| + \sum_{j=1}^N |\Delta v_{jf} - c_f| \quad (43)$$

ここで、 c_0 および c_f は次のように定義している。

$$c_f = -v_f^{*+} + v_f^{*-} \quad (44)$$

$$c_0 = -v_0^{*+} \quad (45)$$

つまり、インパルス仮定におけるフォーメーション全体の燃料最小問題は (43) 式において J を最小にするような c_0 と c_f を求めることに帰着される。(44), (45) 式からわかるように、 c_0 と c_f は独立であるので別々に最小化すればよい。従って、最適性の必要条件は以下ようになる。

$$\left(\frac{\partial J}{\partial c_0} \right)^T = \sum_{j=1}^N \frac{-(\Delta v_{j0} - c_0)}{|\Delta v_{j0} - c_0|} = 0 \quad (46)$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial c_f} \right)^T = \sum_{j=1}^N \frac{-(\Delta v_{jf} - c_f)}{|\Delta v_{jf} - c_f|} = 0 \quad (47)$$

またこの方法では、最適化計算の段階で全衛星のインパルスを噴く時間を一致させなければならないので、事前に全衛星でその時間を申し合わせておきインパルスベクトルの情報を共有しておく必要がある。

5.3 燃料最小化アルゴリズム インパルス仮定をフォーメーション中心を求める際に利用する誘導則の計算は第 5 図のように行う。

5.2 節で述べた方法によりフォーメーションの中心位置を求める際には、共役勾配法を用いる。そしてこの計算により求めたフォーメーション中心に対する目標隊形への誘導には、拘束条件 (25) を満たすように 3 章の低推力燃料最小計算を行う。

具体的には次のように行う。

第5図 実用的なフォーメーション全体の準燃料最小化アルゴリズム

step1 各衛星 (j) について, 初期位置 (r_0) と終端位置 (r_f)

から (36) ~ (39) を用いて Δv_{j0} , Δv_{jf} を求める

step2 c_0 および c_f の初期推量を仮定する (c_{00} , c_{f0})

step3 (46), (47) を用いて, 評価関数 J の c_0 と c_f に関する勾配をそれぞれ求め, g_0 , h_0 とする

step4 c_0 と c_f それぞれについて, h_j の方向に評価関数 J の最小探索を行い, 最小となる c_0 と c_f における J の勾配を g_{j+1} とする. この時, 勾配が 0 となったら step6 に進む ((46), (47)).

step5 (48) 式により γ_j を求め, (49) 式により h_{j+1} を求めて step4 に戻る

$$\gamma_j = \frac{(g_{j+1} - g_j) \cdot g_{j+1}}{g_j \cdot g_j} \quad (48)$$

$$h_{j+1} = g_{j+1} + \gamma_j h_j \quad (49)$$

step6 (44) (45) から v_f^{+} , v_f^{-} を求め, それをもとに終端時刻におけるフォーメーションの中心位置 r_f^* を求める

step7 step6 で求めた r_f^* を Σ_c の原点として, (13) のように Σ_r における目標位置を定め, 3 章の衛星単機の燃料最小化アルゴリズムを用いて λ_j を計算する

6. シミュレーション結果及び考察

ここまでで, フォーメーションに対する 3 つの低推力誘導のアルゴリズムを挙げた. すなわち,

第1表 シミュレーション計算条件

参照軌道	$R_p = 2R_e, R_a = 10R_e \ (e = 0.67)$			
初期時刻	0			
終端時刻	1.2π			
衛星数	4			
最大推力	1 [mN]			
衛星重量	50 [kg]			
初期状態量	$\boldsymbol{r}_1^T$	$[0, 0, 0]$ [m]	$\boldsymbol{v}_1^T$	$[0, 0, 0]$ [m/s]
	$\boldsymbol{r}_2^T$	$[0, 1000, 0]$ [m]	$\boldsymbol{v}_2^T$	$[0, 0, 0]$ [m/s]
	$\boldsymbol{r}_3^T$	$[0, 2000, 0]$ [m]	$\boldsymbol{v}_3^T$	$[0, 0, 0]$ [m/s]
	$\boldsymbol{r}_4^T$	$[0, 3000, 0]$ [m]	$\boldsymbol{v}_4^T$	$[0, 0, 0]$ [m/s]
目標状態量	$\boldsymbol{r}_1^T$	$[2000, 0, 0]$ [m]	$\boldsymbol{v}_1^T$	$[0, 0, 0]$ [m/s]
	$\boldsymbol{r}_2^T$	$[0, 2000, 0]$ [m]	$\boldsymbol{v}_2^T$	$[0, 0, 0]$ [m/s]
	$\boldsymbol{r}_3^T$	$[-2000, 0, 0]$ [m]	$\boldsymbol{v}_3^T$	$[0, 0, 0]$ [m/s]
	$\boldsymbol{r}_4^T$	$[0, -2000, 0]$ [m]	$\boldsymbol{v}_4^T$	$[0, 0, 0]$ [m/s]

(1) 絶対位置を指定した誘導 (3 章) [30]

(2) フォーメーション位置を自由度にいれ, その位置をインパルス近似によって求める誘導 (5 章) [31]

(3) フォーメーション位置を自由度に入れた, 完全燃料最小誘導 (4 章) [≈ 600]

燃料最小の度合いは (1) (2) (3) の順に大きくなる. 右に示してある数字は (章) [pentium IV 2.4 GHz での計算時間 (s)] である. これらのアルゴリズムを用いたシミュレーション結果を第 6 ~ 8 図に示す. その計算条件は第 1 表に示す. 各図の左側は各衛星の制御入力の大さきの推移, 右側は

第 6 図 “絶対位置を指定した誘導”シミュレーション結果

第 7 図 “フォーメーション位置を自由度に入れ、その位置をインパルス近似によって求める誘導”シミュレーション結果

第 8 図 “フォーメーション位置を自由度に入れた、完全燃料最小誘導”シミュレーション結果

xy 平面における各衛星の軌道を表している。制御入力の大
きさを示す図から、第 6 図から第 8 図へと最適化の度合い

が大きくなるに従って各衛星の制御入力平均化され、全
体として小さくなっていることが分かる。また、フォーメー

第9図 最大推力と各誘導の評価関数

第2表 シミュレーション計算条件

参照軌道	$R_p = 2R_e, R_a = 10R_e$ ($e = 0.67$)	
初期時刻	0	
終端時刻	1.2π	
衛星数	4	
最大推力	1 [mN]	
衛星重量	50 [kg]	
初期状態量	$r_1^T = [0, 0, 0] \text{ [m]}$	$v_1^T = [0, 0, 0] \text{ [m/s]}$
	$r_2^T = [0, 1000, 0] \text{ [m]}$	$v_2^T = [0, 0, 0] \text{ [m/s]}$
	$r_3^T = [0, 2000, 0] \text{ [m]}$	$v_3^T = [0, 0, 0] \text{ [m/s]}$
	$r_4^T = [0, 3000, 0] \text{ [m]}$	$v_4^T = [0, 0, 0] \text{ [m/s]}$
目標状態量	$r_1^T = [2000, 0, 0] \text{ [m]}$	$v_1^T = [0, 0, 0] \text{ [m/s]}$
	$r_2^T = [0, 2000, 0] \text{ [m]}$	$v_2^T = [0, 0, 0] \text{ [m/s]}$
	$r_3^T = [-2000, 0, 0] \text{ [m]}$	$v_3^T = [0, 0, 0] \text{ [m/s]}$
	$r_4^T = [0, -2000, 0] \text{ [m]}$	$v_4^T = [0, 0, 0] \text{ [m/s]}$

ションの位置は最適化することで $-x, y$ 方向へ大きくずれていっている。

第9図は各場合の制御入力の全衛星の合計を最大推力に対してプロットしたものである。最大推力以外の条件は第2表で与えた。この図から準燃料最適化アルゴリズムは、完全燃料最小誘導に非常に近く、十分に実用上有効であることが分かる。最大推力が小さくなる程、準最適解と完全最適解の差が大きくなっているが、これはインパルス近似から離れていくことを考えると当然といえる。

7. 誘導に必要な情報量・計算量の評価¹⁾

フォーメーションフライトにおいては、その隊形変更時などにおいて衝突を避けたりするために、他の衛星の軌道を知ってオンボードで自律的に処理されることが望まれる。そのためには、衛星数が増えた場合にでも処理可能なような少ない情報量・計算量を共有するだけで誘導できることが必要である。本稿で導いた制御則は、次のようにこの点でフォーメーションフライトの誘導に適しているといえる。

3章において導いた誘導則は、衛星の燃料最小軌道が下

の14個の値だけで表せた。

b : 式(11)

θ_0 : 初期時刻

y_0 : 初期状態量

λ : 6次元の定ベクトル

つまり始点から λ のみで定まる制御入力によりフィードフォワード計算によるために、各時刻ごとに制御入力を与える場合（時間に比例）に比べ少ない情報量を共有するだけでよくなり、オンボードでのリアルタイム計算を可能とする。また計算は、shooting method を用いて2, 3回の積分 iteration を含む最適化計算を行うのみでよい。

フォーメーション全体の大域的な燃料最適化においては、4章の最適化アルゴリズムを用いると最適化計算の中に最適化計算を含み、収束が悪く、計算量も衛星数が増えるにつれ指数関数的に増大するが、5章の準最適化アルゴリズムを用いることで、最適性を大幅に犠牲にすることなく計算量を大きく減らすことができる。

8. 結 論

本稿では、フォーメーションフライトを構成する衛星数が多数機になった場合に特に必要になってくると思われる、情報量が少なく、オンボード計算可能な計算量となるような連続推力燃料最小化アルゴリズムについて議論してきた。フォーメーションの位置を自由度に入れた誘導では、その位置をインパルス近似を用いて求めることで、完全燃料最小に極めて近い実用的な準燃料最小アルゴリズムを提案した。

参 考 文 献

- 1) 津田雄一: 情報管理と誘導則の関係を考慮した大規模衛星群フォーメーションフライトアーキテクチャに関する研究, 東京大学工学系研究科学学位論文, 2003.
- 2) How, J. P. and Inalhan, G.: Relative Dynamics and Control of Spacecraft Formations in Eccentric Orbits, AIAA Paper 2000-4443, 2000.
- 3) Carter, T.: New Form for the Optimal Rendezvous Equations near a Keplerian Orbit, J. Guid., **13** (1990), pp. 183-186.
- 4) Carter, T.: Optimal Power-Limited Rendezvous of a Spacecraft with Bounded Thrust and General Linear Equations of Motion, J. Guid. Control Dynam., **87** (1995), pp. 487-515.
- 5) Carter, T. and Humi, M.: Fuel-Optimal Rendezvous near a Point in General Keplerian Orbit, J. Guid., **10** (1987), pp. 567-573.
- 6) Marec, J. P.: Optimal Space Trajectories, Elsevier Scientific Publishing Company, New York, 1979.
- 7) Lawden, D. F.: Optimal Trajectories for Space Navigation, Butterworths, London, 1963.
- 8) Tsuda, Y. and Nakasuka, S.: Impulsive Optimal Guidance Algorithm for Formation Flying Spacecraft, Proceedings of the 23rd International Symposium on Space Technology and Science, ISTS2002-d-51, 2002.
- 9) Tsuda, Y. and Nakasuka, S.: Optimal Guidance Law for Standby-Orbit Insertion for Formation Flying Spacecraft, Proceedings of the 12th ISAS Workshop on Astrodynamics and Flight Mechanics, A-4, 2002.