境界層干渉を伴う非定常衝撃波伝播に対する
高効率計算手法の開発^{*1}A New Numerical Method for Unsteady Shock Wave Propagation
with Boundary Layer Interaction金子 宗 嗣^{*2,*3}・メンショフ イゴール^{*4}・中 村 佳 朗^{*4}

Munetsugu KANEKO, Igor MEN'SHOV and Yoshiaki NAKAMURA

Key Words: Numerical Scheme, Unsteady Flow, Shock Propagation, Shock/Boundary Layer Interaction

Abstract: A new numerical method using a hybrid (explicit/implicit) scheme with the matrix-free Lower-Upper Symmetric Gauss-Sidel (LU-SGS) method has been developed to compute unsteady viscous flows on highly stiff grids, where the ratio of the maximal to the minimal cell spacing is large. A dual-time stepping method is used to reduce unsteady residuals. Results show that the present method has advantage over conventional explicit and implicit schemes. The CPU time has been reduced by 69% and 57% compared with the 2nd-order explicit scheme and the full implicit scheme, respectively, in the case of a rather low Reynolds number flow. On the other hand, at a practical Reynolds number of 5.54×10^7 , the CPU time becomes about 30 times shorter than that of the explicit scheme.

1. 緒 言

粘性干渉を伴う衝撃波非定常流を精度良く、また、効率良く解くことは、CFDの大きな課題の一つである。この場合、境界層やせん断層が存在する領域に多くの計算セルを設けなければならない。その結果、境界層のような粘性層付近には小さなセルが、それ以外の領域には大きなセルが、つまり、計算領域中にサイズが極端に異なるセルが混在する。ここで、セルサイズの比（以降セル比） CS を次のように定義する。

$$CS = \frac{(\text{セルの最大体積})}{(\text{セルの最小体積})} \quad (1)$$

$CS = 1$ であれば、セルの大きさは一様であり、 CS が大きくなれば、セルサイズの幅広いスペクトルが存在する。衝撃波管や衝撃風洞など、衝撃波と壁面の干渉を伴った非定常な流れ場の解析では、この CS が増大する。このような流れに対して、Weberら¹⁾や高橋ら²⁾のように陽解法を用いると、安定条件の制約から時間刻み Δt が減少し、計算量は増大する。

例えば、マッハ数 $M_s = 2.0$ の衝撃波が2次元衝撃波管内を伝播する問題に対してNavier-Stokes方程式（以降NS方程式）を陽解法で計算する場合、レイノルズ数が $Re = 10^7$ のオーダーで、セルレイノルズ数が $Re_c = 10$ となるよ

うに最小セルサイズを 10^{-6} (m) とすると、時間刻み幅は $\Delta t = 10^{-9}$ (sec) のオーダーとなる。この時間刻みでは、1 cmの衝撃波伝播に対して約20,000回の計算ステップを、1 mでは、実に200万回の計算ステップが必要となる。このように、衝撃波管問題の実スケール解析は、並列計算を導入しない限り、陽解法では不可能に近い。

一方、LU-SGS法に代表される陰解法を用いた場合には、安定性の制限が無いので、主流方向の流れを十分に解像できるセル幅さえ設定すれば、それに応じた時間刻み幅を決定できる。上述の例では、主流方向に 10^{-3} (m)の幅を持つ計算セルでは、衝撃波面の伝播速度から、時間刻み幅を求めると、 $\Delta t = 10^{-6}$ (sec) のオーダーとなる。この時、衝撃波管壁境界層の小さい計算セルによる時間刻みの制限は考慮する必要がない。ただし、陰解法による非定常流解析では、各計算ステップで局所定常解へ収束させるために、ニュートン法などにより、通常数十回の内部反復が必要となる。それでも計算ステップ数は、陽解法より1オーダー以上減少する。

しかし、近似因数分解を利用した陰解法は、打ち切り誤差が陽解法と比べて大きく、時間刻み幅に比例して増大する。その結果、LU-SGS法などを用いた非定常流解析では、時間刻み幅をむやみに大きくできない。したがって、陰解法は衝撃波面のような物理量の勾配が大きな波面の非定常伝播の計算には不向きである。

これらの問題を解決するために、陽解法と陰解法を組み合わせた陰陽ハイブリッド解法が提案されている。この方法ではセルごとに陽解法に対する安定条件を評価し、陽解法か陰解法か、あるいはそれらの併用かを考える。併用す

*1 © 2004 日本航空宇宙学会

平成 14 年 12 月 16 日原稿受理

*2 名古屋大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻、日本学術振興会特別研究員

*3 現 名古屋大学工学研究科

*4 名古屋大学工学研究科

れば数値拡散が減少し、計算効率や精度を向上できる。

Fryxell らは陽陰ハイブリッド法をラグランジュ表記の流体方程式に適用したが³⁾、任意の時間刻みに対して MND (Max Norm Diminishing) 条件⁴⁾を満足させることができなかった。Collins らは、オイラー圧縮性流に対する陽陰ハイブリッド解法を開発し⁵⁾、線形方程式に対しては、任意の時間刻みで MND 条件が満足された。Dai らは、Fryxell らの方法を改良し、1 次元のオイラー方程式や電磁流体力学方程式に適用した⁶⁾。また、O'Rourke らは Collins らの方法⁵⁾を 3 次元の非構造格子系に拡張し、NS 方程式を解いた⁴⁾。彼らは Collins らの方法を改良し、非線形方程式についても MND 条件が満たされるようにした。ただし、非構造格子系での高次精度化には失敗した。Men'shov らはこれを改良し、非線形保存方程式に対して、任意の時間刻みで MND 条件を満たす陽陰ハイブリッド解法を提案した⁷⁾。また、2 次元圧縮性オイラー方程式に適用し、解適合法と組み合わせる試みがなされた⁸⁾。

これらを踏まえて、本研究の目的は、境界層などの粘性干渉を伴う衝撃波の非定常伝播を解析するために、ハイブリッド法を用いた新しい計算手法を確立することである。特に、CS の大きな計算格子を用いる場合に焦点を絞る。また、ここで提案する方法を、1) 2 次精度の陽解法や 2) LU-SGS 法による陰解法と比較し、その特性を定量的に明らかにする。

2. 数 値 計 算 法

2.1 支配方程式 支配方程式は 2 次元の NS 方程式である。

$$\int_v \frac{\partial q}{\partial t} dV + \int_s F \cdot dS = \int_s G \cdot dS \quad (2)$$

ここで、 q は保存量解ベクトル、 t は時間、 dV は微小体積、 dS は微小面積、 F は非粘性流束ベクトル、 G は粘性流束ベクトルである。この方程式は有限体積法により次のように離散化される。

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta V_i} \sum_{\sigma} S_{\sigma} (F_{\sigma} - G_{\sigma}) \quad (3)$$

ただし、 ΔV_i はセル体積、 S_{σ} はセル境界面 σ の面積である。また、 F_{σ} と G_{σ} は、それぞれ、境界面 σ における非粘性および粘性流束ベクトルである。

$$F_{\sigma} = F_{\sigma}(q_i, q_j), \quad G_{\sigma} = G_{\sigma}(q_i, q_j), \quad q_i = q(\Delta t, x, y)$$

添字 j は境界面 σ をセル i と共有したセル j での値を表す。 $f_{\sigma,k}$ 、 $g_{\sigma,k}$ を面 σ における、デカルト座標で表された k 方向 ($k = x, y$) の非粘性および粘性流束ベクトルとし、境界面 σ の単位法線ベクトルを $n_{\sigma} = (n_x, n_y)$ とすると、

$$F_{\sigma} = f_{\sigma,k} n_k, \quad G_{\sigma} = g_{\sigma,k} n_k \quad (4)$$

となる。ここで、 F_{σ} は、セル境界面における局所一次元流束ベクトル f_{σ} を用いて、

$$F_{\sigma} = T_{\sigma}^{-1} f_{\sigma}, \quad f_{\sigma} = f(Q_{\sigma}), \quad Q_{\sigma} = T_{\sigma} q_{\sigma} \quad (5)$$

と書ける。ただし、 T_{σ} はセル境界面の単位法線ベクトルおよび単位接線ベクトルの各成分からなる変換行列である。また、 Q_{σ} はセル境界面における、局所一次元保存量解ベクトルである。

本研究では Q_{σ} を Godunov 法により求める⁹⁾。すなわち、セル境界ではリーマン問題の厳密解を利用する。

$$Q_{\sigma} = Q(Q_{i,\sigma}, Q_{j,\sigma}) \quad (6)$$

$Q_{i,\sigma}$ 、 $Q_{j,\sigma}$ は、非構造格子系における MUSCL 法¹⁰⁾に基づいた Luo らの方法で計算し、空間精度は最大 3 次である。また、粘性流束ベクトル G_{σ} は 2 次精度中心差分で評価する。

2.2 陽陰ハイブリッド解法 F_{σ} 、 G_{σ} はそれぞれ解ベクトル q の関数で、

$$F_{\sigma} = F(q^n, q^{n+1}), \quad G_{\sigma} = G(q^n, q^{n+1}) \quad (7)$$

と表され、 q^{n+1} を考慮しなければ陽解法、 q^n を考慮しなければ陰解法、両方を考慮すれば陽陰ハイブリッド解法となる。

ここで陽解法と陰解法の blending parameter として ω を導入する。タイムステップ n と $n+1$ での保存量ベクトルの関数として、中間値 q^{ω} を次のように定義すると、

$$q^{\omega} = q^n + (1 - \omega)(q^{n+1} - q^n) \quad (8)$$

式 (7) は

$$F_{\sigma}^{\omega} = F(q^{\omega}), \quad G_{\sigma}^{\omega} = G(q^{\omega})$$

となる。この結果、離散式 (3) は以下のように書き換えられる。

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta V_i} \sum_{\sigma} S_{\sigma} (F_{\sigma}^{\omega} - G_{\sigma}^{\omega}) \quad (9)$$

ここで、 ω は任意の Δt について、MND 条件、すなわち

$$\|q^{n+1}\| \leq \|q^n\| \quad (10)$$

を満たすように決定される。参考文献 7) で示されているように、 ω は陽解法における CFL 条件を基に評価される。NS 方程式に対してもこの方法を踏襲すると ω は以下のように決定される。ちなみに、 ω はセルごとに異なる。

$$\omega = \begin{cases} 1 & \text{if } \beta^{\omega} \leq 1 \\ 1/\beta^{\omega} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

ここで、

$$\beta^{\omega} = \frac{\Delta t}{\Delta V_i} \sum_{\sigma} S_{\sigma} \left(\max(0, u_{n,\sigma} + c_{\sigma}) + \frac{\nu_{\sigma}}{\Delta h_{i,j}} \right) \quad (12)$$

ただし、 $u_{n,\sigma}$ は境界面 σ における法線ベクトル方向（外向きを正）の速度成分、 c_{σ} はそこでの音速、 ν_{σ} は動粘性係数、 $\Delta h_{i,j}$ はセル i とセル j の中心間距離である。

解析対象となる流れ場の初期条件から、主流の特性速度に応じて Δt を設定すれば、計算領域の各セルで ω が決定される。 $\omega = 1$ となれば陽解法のみが適用され、 $0 < \omega < 1$ となれば陰解法に陽的な項が付加され、 ω が 0 に近いとほぼ陰解法となる。 ω は流れ場の変化に伴い、時間とともに変化する。

2.3 時間積分法 離散式 (9) を解くために、Jameson による dual-time stepping 法を用いる¹¹⁾。これは 1 ステップ (Δt) 間の時間積分を行う過程で、定常解を擬似時間 τ に対して求める方法である。この方法を式 (9) に適用し、デルタ形式で書くと以下ようになる。

$$\left(I + \frac{\Delta t}{\Delta \tau}\right) \Delta q_i^s = -R_i^s - \frac{\Delta t}{\Delta V_i} \sum_{\sigma} S_{\sigma} (\Delta F_{\sigma} - \Delta G_{\sigma}) \quad (13)$$

ただし、添字 s は擬似時間における繰り返し計算のステップを示し、

$$\begin{aligned} \Delta q_i^s &= q_i^{n+1,s+1} - q_i^{n+1,s} \\ R_i^s &= q_i^{n+1,s} - q_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta V_i} S_{\sigma} \sum_{\sigma} (F_{\sigma}^{\omega,s} - G_{\sigma}^{\omega,s}) \end{aligned} \quad (14)$$

ΔF_{σ} と ΔG_{σ} については、Men'shov らの線形化法¹²⁾ を用いる。

$$\Delta F_{\sigma} = T_{\sigma}^{-1} [(1 - \omega) A_i^{+} \Delta Q_i^s + (1 - \omega) A_j^{-} \Delta Q_j^s] \quad (15)$$

$$\Delta G_{\sigma} = \overline{\nu}_{\sigma} [(1 - \omega) \Delta q_j^s + (1 - \omega) \Delta q_i^s] \quad (16)$$

$$\overline{\nu}_{\sigma} = \frac{\nu_{\sigma}}{\Delta h_{i,j}} \quad (17)$$

ω は、擬似時間刻み $\Delta \tau$ による反復計算の間では一定とする。また、行列 A_i^{+} と A_j^{-} は Godunov の流束関数の線形化から得られる¹³⁾。

$$A_i^{+} = A(Q_{\sigma}) \frac{\partial Q_{\sigma}}{\partial Q_i}, \quad A_j^{-} = A(Q_{\sigma}) \frac{\partial Q_{\sigma}}{\partial Q_j} \quad (18)$$

ここで、 A は式 (5) の局所一次元流束関数 f_{σ} に対する Jacobian 行列である。これらを式 (13) に代入すると

$$\left(I + \frac{\Delta t}{\Delta \tau} + \sum_{\sigma} \Omega_i^{+}\right) \Delta q_i^s + \sum_{\sigma} \Omega_j^{-} \Delta q_j^s = -R_i^s \quad (19)$$

となる。ただし、

$$\Omega_i^{+} = \frac{\Delta t}{\Delta V_i} (1 - \omega_i) S_{\sigma} (T_{\sigma}^{-1} A_i^{+} T_{\sigma} + \overline{\nu}_{\sigma} I) \quad (20)$$

$$\Omega_j^{-} = \frac{\Delta t}{\Delta V_i} (1 - \omega_j) S_{\sigma} (T_{\sigma}^{-1} A_j^{-} T_{\sigma} - \overline{\nu}_{\sigma} I) \quad (21)$$

式 (19) は大規模疎行列となり、計算負荷を軽減するために、Men'shov ら¹²⁾ によって非構造格子系に拡張された

LU-SGS 法¹⁴⁻¹⁸⁾ を適用する。式 (19) の左辺第 2 項を LU 分解する。

$$\sum_{\sigma} \Omega_j^{-} \Delta q_j = L(\Delta q_j) + U(\Delta q_j) \quad (22)$$

$$L(\Delta q_j) = \begin{cases} \sum_{\sigma} \Omega_j^{-} \Delta q_j & \text{if } j < i \\ 0 & \text{if } j > i \end{cases} \quad (23)$$

$$U(\Delta q_j) = \begin{cases} \sum_{\sigma} \Omega_j^{-} \Delta q_j & \text{if } j > i \\ 0 & \text{if } j < i \end{cases} \quad (24)$$

とおくと、式 (19) は行列形式で以下のように書ける。

$$[D + L + U] \Delta q^s = -R^s \quad (25)$$

ただし、 L と U は下三角行列と上三角行列であり、その要素は、式 (23) と式 (24) である。また、 D は対角行列である。

$$D = \left[I + \frac{\Delta t}{\Delta \tau} I + \sum_{\sigma} \Omega^{+}\right] \quad (26)$$

式 (25) の左辺に対して近似因数分解を行うと、

$$[D + L] D^{-1} [D + U] \Delta q^s = -R^s + L D^{-1} U \Delta q^s \quad (27)$$

となり、右辺第 2 項を微小項として無視すると、解くべき方程式は

$$[D + L] D^{-1} [D + U] \Delta q^s = -R^s \quad (28)$$

となる。

ここで、Jameson らの Jacobian Matrix Splitting¹⁹⁾ を適用し、Jacobian 行列を以下のように定義する。

$$A_i^{+} = 0.5 (A(Q_i) + \rho_{\sigma}), \quad A_j^{-} = 0.5 (A(Q_j) - \rho_{\sigma}) \quad (29)$$

ただし、 ρ_{σ} はスペクトル半径である。任意の格子系に対して $\sum_{\sigma} T_{\sigma}^{-1} A T_{\sigma}$ が 0 になることから (参考文献 20) 参照)、式 (20) に対して $\sum_{\sigma} \Omega_i^{+}$ は以下のように簡単化され、スカラーとなる。

$$\sum_{\sigma} \Omega_i^{+} = 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta V_i} (1 - \omega_i) \sum_{\sigma} S_{\sigma} (\rho_{\sigma} + 2\overline{\nu}_{\sigma}) \quad (30)$$

その結果、式 (26) の D もスカラー要素の対角行列となり、簡単化される。

一方、式 (23) についても、 $\sum \Omega_j^{-} \Delta q_j$ は

$$\begin{aligned} L(\Delta q_j) &= 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta V_i} \sum_{\sigma \text{ for } j < i} S_{\sigma} (1 - \omega_j) [T_{\sigma}^{-1} \Delta f_j^s \\ &\quad - (\rho_{\sigma} + 2\overline{\nu}_{\sigma}) \Delta q_j^s] \\ \Delta f_j^s &= f(Q_j^{n+1,s+1}) - f(Q_j^{n+1,s}) \end{aligned} \quad (31)$$

と変形でき、Jacobian 行列の計算が必要なくなる。また、

upper part の式 (24) についても同様である．

このようにして，解くべき方程式 (28) は，逆行列や Jacobian 行列を計算することなしに，各セル i について，次の 2 段階の式で解かれる．

第 1 段階

$$\Delta q_i^{s,*} = - \left(I + \frac{\Delta t}{\Delta \tau} + \sum_{\sigma} \Omega_i^+ \right)^{-1} (R_i^s + L(\Delta q_j^*)) \quad (32)$$

第 2 段階

$$\Delta q_i^s = \Delta q_i^{s,*} - \left(I + \frac{\Delta t}{\Delta \tau} + \sum_{\sigma} \Omega_i^+ \right)^{-1} U(\Delta q_j) \quad (33)$$

なお，セル番号 i について，第 1 段階では昇順，第 2 段階では降順に計算する．

ここで述べられたハイブリッド法の計算効率を上げるために，あるセルとそれに接するセルがすべて $\omega = 1$ ならば，内部反復なしで解を更新する．この場合，MUSCL 法による高精度化は， $0.5\Delta t$ の値を用いて評価するので，ハイブリッド法は時間 2 次精度の 2 段階 Runge-Kutta 法に一致する．

3. 結果と考察

ここでは，衝撃波と境界層の粘性干渉を伴った非定常問題を解き，1) 陽解法，2) 陰解法と比較しながら議論する．計算領域は衝撃波管の初期状態の低压部とし，これを上下対称と仮定して，中心軸から下側の部分を考える．横方向長さは 0.2 (m)，縦方向長さは $h = 0.05$ (m) で ($0.0 \leq x \leq 0.2$, $0 \leq y \leq 0.05$)，同じ大きさのバッファ領域を上流側に設けている．これは，計算領域に流入する境界層をバッファ領域で十分に発達させるためである．また， $x = 0.2$ (m) を閉じられた管端とする．計算格子は， x 方向に 200 点， y 方向に 120 点で合計 24,000 点である（バッファ領域も同じ格子点数）．また，壁に向かって格子を細かくし，最小格子幅 $\Delta h_{\min}$ は 50 (μm) である．境界条件として，チャンネルとバッファ領域の壁面 ($y = 0$ (m)) では非すべり条件を， $y = 0.05$ (m) の対称線上では対称条件を，また，バッファ領域の上流端 ($x = -0.2$ (m)) では特性境界条件を課している（第 1 図）．バッファ領域での境界層は， $t = 0$ か

第 1 図 衝撃波管問題の計算領域

らのインパルススタートで発達して行く．

第 1 表に示す添字 2 の付いた初期条件は，単純理論で計算した，衝撃波管の初期圧力比 $P_4/P_1 = 40$ で生成される $M_s = 2.0$ の衝撃波背後の物理量である．また，衝撃波が入射する低压側の条件は添字 1 で示す．添字 2 の値をバッファ領域 ($-0.2 < x < 0$) に，添字 1 の値を計算領域 ($0 < x < 0.2$) に与えて，衝撃波の非定常伝播を模擬する．

この場合の最大セルアスペクト比は $AR = 20$ で，セル比は $CS = 18.3$ である．第 1 表の最小時間刻み幅の $\Delta t = 4.10 \times 10^{-8}$ (sec) は陽解法に対するものであり，最小のセルに対して CFL 数が 1 になるように決定した．これはハイブリッド法における，全セルで $\omega = 1$ の場合に相当する．一方，最大時間刻み幅の $\Delta t = 1.43 \times 10^{-6}$ (sec) は，衝撃波面に対する特性波が 1 セルを通過するのに要する時間から決定した．このとき，式 (11) と (12) より，ハイブリッド法は，衝撃波面付近およびその背後の流れ場では ω が 1 に，つまり，陽解法に近づく，他方，壁近傍では，壁に垂直方向のセル幅が小さくなるので， ω は 0 に，つまり，陰解法に近づく．

3.1 Δt と ω の関係 第 2 図に Δt を変えた場合の， ω の y 方向分布を示す．時間刻みが $\Delta t = 5.24 \times 10^{-7}$ (sec) より大きくなると，ハイブリッド法では，すべてのセルが陽解法+陰解法の組み合わせで計算される． Δt が大きいほど効率が上昇するが，その分，衝撃波面の散逸も増大する．衝撃波面をできるだけシャープに捕らえるためには，衝撃波背後の一樣流部分で $\omega = 1$ に近いセルができるだけ多い方がよい．一方， Δt が小さい場合には，セル CFL 数が減

第 1 表 衝撃波管問題の計算条件 ($M_s = 2.0$)

Re	5.54×10^5
ρ_2 (kg/m ³)	3.36×10^{-2}
u_2 (m/sec)	445.79
P_2 (kPa)	4.84
ρ_1 (kg/m ³)	1.23×10^{-2}
u_1 (m/sec)	0.0
P_1 (kPa)	1.01
Δt (μsec)	0.0410 ~ 1.43
CS	18.3

第 2 図 衝撃波背後の一樣流領域での ω 分布（初期状態）

(a) CPU 時間と加速率 (SUR)

(b) CPU 時間と内部反復回数

第 3 図 Δt による CPU 時間の変化 ($t = 0.25$ (msec), 衝撃波位置 $x = 0.175$ (m))

少し、打ち切り誤差が増大する．このように、ハイブリッド法では、計算効率と解の精度とのトレードオフを考えて Δt を決定する必要がある．

3.2 Δt と CPU 時間の関係 第 3 図 (a) には、CPU 時間と CPU 時間の短縮率 (SUR):

$$SUR = \frac{\text{陽解法の CPU 時間}}{\text{ハイブリッド法あるいは陰解法の CPU 時間}}$$

の Δt による変化が、第 3 図 (b) には、内部反復回数の変化が示されている．なお、ここでの CPU 時間は、衝撃波が $x = 0$ (m) から $x = 0.175$ (m) まで伝播する時間である．ハイブリッド法の CPU 短縮率は最大 $SUR \approx 3.3$ で、また、すべての Δt において、ハイブリッド法は陰解法よりも効率が良い．これは主に、ハイブリッド法の残差が陰解法よりも速く減少することによる．さらに、 Δt が小さい時には、陽解法だけで計算するセルの数が増えるために、計算が速くなる．

3.3 内部反復について 内部反復計算は、 s 回目の計算で、

$$\Delta q^s = q^{n+1,s+1} - q^{n+1,s} < \varepsilon \times \Delta q^1$$

となった時点で終了する．定数 ε は、 $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}$,

第 4 図 誤差 (L2 ノルム) と Δt の関係 第 5 図 ω の分散と Δt の関係

10^{-3} の 3 ケースをテストし、 $\varepsilon = 10^{-2}$ と 10^{-3} の解がほぼ一致したので、 $\varepsilon = 10^{-2}$ とした．また内部反復における擬似時間刻み幅 $\Delta \tau$ は、 $\Delta \tau = \Delta t, 10^3 \Delta t, 10^6 \Delta t$ の 3 ケースをテストし、解がほぼ一致した中で計算時間が最短となる $\Delta \tau = 10^6 \Delta t$ とした．この結果、本計算では最大で平均 14.5 回の内部反復が必要となる (第 3 図 (b))．このように、 Δt によって内部反復回数が大きく変化するので、解を精度良く求める際には閾値 ε や擬似時間刻み幅 $\Delta \tau$ の選択が重要である．

3.4 最適な Δt の決定 第 4 図には Δt を変えて、数値解 q_i と基準解 $\tilde{q}_i$ (セル数を衝撃波の伝播方向に 5 倍細かくし、陽解法で精度よく計算) との差の L2 ノルムをプロットした．

$$L2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N (q_i - \tilde{q}_i)^2}$$

ただし、 N は全セル数で、変数 q として密度を用いた．この結果から、少なくとも $\Delta t \leq 6.00 \times 10^{-7}$ (sec) では、ハイブリッド法は陽解法 ($\Delta t = 4.10 \times 10^{-8}$ (sec)) による解 (図中○印) よりも基準解に近く、また、陰解法よりすべての Δt で精度が良い．また、L2 ノルムが最小となる $\Delta t = 4.25 \times 10^{-7}$ (sec) では CPU 時間も最短となる (第 3 図参照)．ちなみに、第 1 表の主流条件を計

(a) $y/h = 1$ (対称線上) (b) $y/h = 0.01$ (壁近傍)第6図 衝撃波での主流方向密度分布 ($t = 0.25$ (sec))

算領域の各セルに与え、 ω の分散を評価すると、分散は $\Delta t = 4.25 \times 10^{-7}$ (sec) において最大値をとる (第5図)。

3.5 計算精度 第6図では $\Delta t = 4.25 \times 10^{-7}$ (sec) とし、衝撃波面が $x = 0.175$ (m) に来た時の密度の主流方向分布を示す。ただし、第6図(a)は対称線 ($y = 0.5$ (m)) 上での、また、第6図(b)は $y = 0.005$ (m)、すなわち壁近くでの分布である。

非粘性領域での精度：対称線上においては、本方法での結果は他の方法よりも衝撃波の解像度が高く (第6図(a))、これは、第2図に示したように、衝撃波近傍でのセル CFL 数が1に近いためである (CFL 数が1であれば厳密解により近くなる)。

一方、陽解法では Δt が最小セルサイズに基づいて定義されているので、衝撃波面近傍の領域に対しては、相対的に CFL 数が減少する。その結果、打ち切り誤差が増大し、ハイブリッド法と比較すると、数値解の散逸が大きくなる。また、陰解法では数値解の散逸が最大となる。

粘性領域での精度：対称線から壁方向に行くにつれ、 y 方向のセル幅が小さくなり、ハイブリッド法における ω の値が減少する (第2図参照)。その結果、ハイブリッド法は陰解法が主となり、中心部付近に比較して、数値解の散逸が少し大きくなり (第6図(b))、ハイブリッド法による衝撃

第2表 CPU 時間の比較 ($t = 0.25$, $Re = 5.54 \times 10^5$, 最大セルアスペクト比 $AR = 20$, $CS = 18.3$)

	EXPLICIT	IMPLICIT	HYBRID
CPU time (sec)	5.12×10^3	3.69×10^3	1.57×10^3
Ratio	1.00	0.72	0.31
Sub-iteration	—	9.0	5.0
Ratio	—	1.00	0.56
Hybridization ratio	—	—	0.24

第7図 衝撃波伝播距離と CPU 時間の関係

波面の精度は陽解法と同程度になる。また、ハイブリッド法の衝撃波管壁境界層の速度分布は、Mirels の理論式とほぼ一致することを確認した²¹⁾。一方、陰解法では、対称線上の分布と同様、数値的散逸が大きい。

3.6 計算効率 1) 陽解法, 2) 陰解法, 3) ハイブリッド法に対する計算効率を第2表にまとめる。ここで用いた計算条件では、ハイブリッド法による CPU 時間は陽解法の31%, 陰解法の43%である。また、ハイブリッド法の時間刻み ($\Delta t = 4.25 \times 10^{-7}$ (sec)) は陽解法の時間刻み ($\Delta t = 4.1 \times 10^{-8}$ (sec)) の約10倍である。ただし、陰解法とハイブリッド法は、共に内部反復を行っているため、CPU 時間は10倍速くなるわけではない。実際には第3図で示したようにハイブリッド法で約3.3倍で、ハイブリッド法の内部反復回数は、陰解法の約半分である (第3図(b) A および A')。ハイブリッド法では、完全に陽解法のみで計算されるセルは全セル数の約24%であることから、ハイブリッド法と陰解法の計算効率の差は、1) 陽解法のみで計算されるセルの存在, 2) それ以外のセルでの内部反復回数の差から生じると考えられる。

次に、第7図に衝撃波の伝播距離に対する、各方法の CPU 時間履歴、つまり衝撃波が計算領域に流入してから管端に到達するまで ($x = 0.0$ から $x = 0.2$ (m)) の計算時間を示す。この結果から、衝撃波管の長さに比例して、陽解法とハイブリッド法の実 CPU 時間の差が増大している。例えば、1 (m) の衝撃波管を考えると、陽解法では約8.2時間、ハイブリッド法では約2.5時間かかることになる。

粘性領域での有効性：今まで示した結果は、本研究で用いた初期条件および計算セルの場合である。実際の衝撃波管の場合には、 Re はこれより1~10オーダー大きく、境

第 3 表 CPU 時間の比較 ($t = 0.25$, $Re = 5.54 \times 10^7$, 最大セルアスペクト比 $AR = 10^3$, $CS = 1813$)

	Δt (sec)	CPU time (sec)	Ratio	Speed up
EXPLICIT	8×10^{-10}	2.72×10^5	1.00	1.00
HYBRID	8×10^{-6}	9.31×10^3	0.034	29.3

界層が薄くなるために、さらに小さな計算セルが要求され、陽解法を用いるとより小さい Δt を強いられる。これに対して、ハイブリッド法では、 Δt は影響を被らず、陽解法とハイブリッド法の実 CPU 時間の差がさらに増大すると予測される。以上述べたように、非定常問題でセル比が大きい格子の場合、計算時間が長いほど、ハイブリッド法が威力を発揮する。

3.7 名大衝撃風洞への適応 最後に実際の衝撃波管内の衝撃波伝播問題への本計算法の有効性を示すために、名古屋大学航空宇宙工学教室の衝撃風洞の衝撃波管部での流れを模擬する。衝撃波マッハ数は前述の検証問題と同一で、レイノルズ数は $Re = 5.54 \times 10^7$ 、初期条件の速度は第 1 表と同一であるが、密度と圧力はそれぞれ、 $\rho_1 = 1.23$, $\rho_2 = 3.36$ (kg/m³), $P_1 = 101.3$, $P_2 = 483.5$ (kPa) と、2 オーダー大きい。

計算格子のセル数は同一であるが、 y 方向の最小セルサイズは $\Delta y_{\min} = 10^{-6}$ (m) とし、その結果、最大アスペクト比は $AR = 1000$ 、セル比は $CS = 1813$ となる。このように、非定常の衝撃波伝播を限られたセル数で解く場合にはアスペクト比や CS が大きくなり、計算負荷は増大する。

第 3 表にハイブリッド法と陽解法の CPU 時間の比較を示す。ハイブリッド法では、各時間ステップでの内部反復回数は平均 50 回であった。これは最大アスペクト比の大きさが LU-SGS 法の収束性に影響を及ぼしているためと考えられる。しかし、0.2 m の伝播距離を計算する CPU 時間は、陽解法の 3% 程度で、計算効率は約 29 倍となる。実際の解析においては、格子収束性などの議論も必要となるが、現実的なセル数での解析におけるハイブリッド法の有効性は明らかである。

4. 結 言

粘性干渉を伴う衝撃波伝播を数値解析する場合、格子サイズの不均一分布のため、陽解法や陰解法は計算精度や計算効率の面で不具合を生じる。これに対して、本研究で提案した陽陰ハイブリッド法を基にした計算法は最適な時間刻みを選べば優れた効果を発揮する。本方法は、壁での粘性干渉を受けながら、衝撃波管のような長い距離を衝撃波が伝播する問題の解析に応用できる。本方法に、解適合法や並列計算などを組み合わせれば、非定常流計算を飛躍的に発展させることが期待される。

本研究では、日本学術振興会特別研究員奨励費（課題番号 1204226）の援助を受けている。ここに記して謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) Weber, Y. S., Oran, E. S., Boris, J. P. and Anderson, J. D., Jr.: The Numerical Simulation of Shock Bifurcation Near the End Wall of a Shock Tube, *Phys. Fluids*, **10** (1995), pp. 2475–2488.
- 2) 高橋政浩, 伊藤勝宏, 谷香一郎, 丹野英幸: 反射型衝撃風洞における駆動気体汚染問題の数値解析, 第 7 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 1993, pp. 43–46.
- 3) Fryxell, B. A., Woodward, P. R., Collela, P. and Winkler, K. H.: An Implicit-Explicit Hybrid Method for Lagrangian Hydrodynamics, *J. Comput. Phys.*, **63** (1986), pp. 283–310.
- 4) O'Rourke, P. J. and Sahota, M. S.: A Variable Explicit/Implicit Numerical Method for Calculating Advection on Unstructured Meshes, *J. Comput. Phys.*, **143** (1998), pp. 312–345.
- 5) Collins, J. P., Collera, P. and Glaz, H. M.: An Implicit-Explicit Eulerian Godunov Scheme for Compressible Flows, *J. Comput. Phys.*, **116** (1995), pp. 195–211.
- 6) Dai, W. and Woodward, P. R.: A Second-Order Iterative Implicit-Explicit Hybrid Scheme for Hyperbolic Systems of Conservation Laws, *J. Comput. Phys.*, **128** (1996), pp. 181–196.
- 7) Men'shov, I., Kaneko, M. and Nakamura, Y.: A Hybrid Explicit-Implicit High-Resolution Method for Non-Linear Advection Equation, NAL SP-44, 1999, pp. 315–322.
- 8) Men'shov, I., Nakamura, Y. and Severin, A.: An Adaptive Method for Compressible Flows on Anisotropic Nested-Type Grids, *Proc. ISCFD 1999*, 2001, pp. 517–527.
- 9) Godunov, S. K., Zabrodin, A. V., Ivanov, M. I., Kraiko, A. N. and Prokopov, G. P.: *Resolution Numerique des Problemes Multidimensionnels de la Dynamique des Gaz*, USSR: Editions MIR, Moscow, 1979.
- 10) Luo, H., Baum, J. D. and Löhner, R.: Edge-Based Finite Element Scheme for the Euler Equations, *AIAA J.*, **32** (1994), pp. 1183–1190.
- 11) Jameson, A.: Time Dependent Calculations Using Multigrid, with Applications to Unsteady Flows Past Airfoils and Wings, AIAA Paper 91-1596, 1991.
- 12) Men'shov, I. and Nakamura, Y.: Implementation of the LU-SGS Method for an Arbitrary Finite Volume Discretization, 第 9 回数値流体力学シンポジウム, 1995, pp. 123–124.
- 13) Men'shov, I. and Nakamura, Y.: On Implicit Godunov's Method with Exactly Linearized Numerical Flux, *Comput. Fluids*, **29** (2000), pp. 595–616.
- 14) Men'shov, I. and Nakamura, Y.: A Implicit Advection Upwind Splitting Scheme for Hyperbolic Air Flows in Thermochemical Nonequilibrium, 第 6 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 1995, pp. 815–818.
- 15) Luo, H., Baum, J. D. and Löhner, R.: A Fast, Matrix-Free Implicit Method for Compressible Flows on Unstructured Grids, *J. Comput. Phys.*, **146** (1998), pp. 664–690.
- 16) Luo, H., Baum, J. D. and Löhner, R.: An Accurate, Fast, Matrix-Free Implicit Method for Computing Unsteady Flows on Unstructured Grids, AIAA Paper 99-0937, 1999.
- 17) Sharov, D. and Nakahashi, K.: Reordering of Hybrid Unstructured Grids for Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel Computations, *AIAA J.*, **36** (1998), pp. 484–486.
- 18) Kano, S. and Nakahashi, K.: Flow Computations around Delta Wings Using Unstructured Hybrid Grids, *J. Aircraft*, **36** (1999), pp. 374–379.
- 19) Jameson, A. and Turkel, E.: Implicit Schemes and LU Decompositions, *Math. Comput.*, **37** (1981), pp. 385–397.
- 20) Men'shov, I. S. and Nakamura, Y.: Numerical Simulations and Experimental Comparisons for High-Speed Nonequilibrium Air Flows, *Fluid Dynam. Res.*, **27** (2000), pp. 305–334.
- 21) Mirels, H.: Boundary Layer behind Shock or Thin Expansion Wave Moving into Stationary Fluid, NACA TN 3712, 1956.