Euler 式変位計による 1 次元および 2 次元変位場の計測と Lagrange 変位の導出^{*1}

On Measurement of One- and Two-Dimensional Displacement Field by Means of Eulerian Type Displacement Meter and the Derivation of Lagrangian Displacement

守 屋 一 政^{*2}

Kazumasa MORIYA

Key Words: Structure, Material Testing, Extensometer, Nominal Strain, Logarithmic Strain, Material Derivative, Local Derivative, Eulerian Velocity, Lagrangian Displacement

Abstract: An Eulerian extensometer which gives Eulerian description of displacement has been proposed by the author for displacement measurement in material testing, and it has been shown that PC mouse, which is now an indispensable computer input device, can also serve as an Eulerian displacement meter. However, in material testing, Lagrangian description of displacement is needed to obtain specimen elongation and nominal strain. In the present study, Lagrangian velocity, i.e. the material derivative of displacement has been expressed as the sum of Eulerian velocity and the product of the displacement gradient in material coordinate system and Eulerian velocity. On this basis, a simple algorithm has been devised to obtain nominal strain as well as Lagrangian description of displacement in real time from the output of Eulerian displacement meter in one- and two-dimensional displacement field. Numerical verification has also been carried out to demonstrate the validity of the proposed method.

主 な 記 号

$X = \{X, Y, Z\}$: 物体座標系における物質点の位置ベクトル
 $x = \{x, y, z\}$: 空間座標系における物質点の位置ベクトル
 $u = \{u, v, w\}$: 変位ベクトル ($u = x - X$)
 t, t_i : 時間と i 番目の時間ステップ
 $\frac{Du}{Dt}$: 変位の物質導関数 (物質点の Lagrange 速度)
 $\frac{\partial u}{\partial t}$: 変位の空間導関数 (Euler 式変位計の検出する Euler 速度)
 L_0, L : 棒の初期長さ (センサ間距離) と現在長さ
 ε : 公称ひずみ
 $\varepsilon', \varepsilon''$: Euler 式変位計の読みから得られる見かけのひずみ速度およびその積分値
 G_i : 時刻 t_i における変位勾配
 $(\)_{\alpha i}$: 添字 α は変位計ないし物質点の番号を表し, i は時間ステップを示す
 N_j : 変位や速度の内挿関数

(ξ, η) : 試験体上の物質点を表す局所座標
 $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$: 空間点 α に置かれた Euler 式変位計の試験体上の配置を表す局所座標

1. は じ め に

従来の変位計や伸び計は、物体とともに移動する目標すなわち標点や標線といった物体に固定された物質点を追跡して伸びや変位を計測する Lagrange 式の変位計である。

著者は先に、空間に固定した変位センサの直下を通り過ぎる物体粒子の Euler 速度を時々刻々積算して変位を計測する Euler 式変位計を提案し、Euler 式変位計の計測値すなわち Euler 速度の積算値をセンサ間の距離で割れば対数ひずみが得られることを図式的に示した。また、コンピュータの入力デバイスであるマウスを使って Euler 式変位計が容易に実現できる、というよりもマウスそのものが Euler 式変位計であることを示し、ゴム材や飛行船膜材の引張試験に適用して妥当性を実証した¹⁾。

Euler 式変位計はターゲットが物体表面そのもので、試験片に標点マークを貼付する必要がない、ターゲット間の距離すなわち標点間距離が一定で、試験片を取り替える度にゲージ長を計測する手間が省け、自動試験に適する、変位センサとして SEM のように高倍率かつ狭視野のセンサを用いた場合でも計測できる変位やひずみの大きさに原理的な制約がないなど従来の変位計にはない特長を有する。し

^{*1} © 2005 日本航空宇宙学会
平成 15 年 7 月 31 日, 第 45 回構造強度に関する講演会において一部発表, 平成 16 年 9 月 6 日原稿受理
^{*2} 防衛大学校システム工学群航空宇宙工学科

かし、直接得られる変位が Lagrange 変位ではなく Euler 変位である、直接得られるひずみも公称ひずみではなく対数ひずみであるなどの難点もある。

材料試験に必要な変位はセンサ直下の Euler 変位よりも標点の Lagrange 変位であろう。また、金属の引張試験では対数ひずみよりも公称ひずみ（工学ひずみ）が要求される場合が多い。

更に、コンピュータ用のマウスは単体で直交する 2 軸の Euler 変位を同時に検出できる。すなわち、1 点につき 2 方向の変位成分が計測可能で、板材では伸びと横方向の「ずれ」、丸棒では伸びとねじり角が同時に測定できる。2 次元物体の平面的な挙動すなわち並進移動、回転移動および一様な面内変形は 3 個の代表点の運動によって記述できる。したがって、2 軸の引張試験が要求される構造用の膜材についても、3 個のマウスを用いることによって面内すべての変位成分やひずみ成分の計測が可能である。

しかし、変位やひずみの計測に Euler 式変位計を使う場合、Euler 変位から Lagrange 変位への変換や公称ひずみの導出が必要になる。しかも 2 次元におけるこれらの変換は、1 次元の場合と違って簡単ではない。また 2 次元では対数ひずみの定義もまちまちである²⁻⁴⁾。

一方、Euler 式変位計は、試験体を直接トラッキングする場合にはその直下を通過する表面粒子の Euler 速度ないしその積算値である Euler 変位を与えるが、標点位置にシールを貼付してその動きをカウントすれば、Euler 変位ではなくシールの変位、すなわちシールを貼付した点の Lagrange 変位を与える。しかし、この方法によって直接 Lagrange 変位を計測できるのは 1 次元の場合に限られ、2 次元ではシールの剛体回転を変位として拾うため、適用が難しい。

以上の観点から、本報では 1 次元および 2 次元の変位場において、Euler 式変位計の計測値から Lagrange 変位や公称ひずみを実時間で求めるための簡便なアルゴリズムを導出し、その妥当性を検証する。アルゴリズムの検証であること、PC マウスによって Euler 速度やその積算値である Euler 変位が計測できることが既の実証されていること¹⁾、直交 2 軸の荷重成分を検出できる小型ロードセルが著者の知る限り上市されていないことなどを考慮し、検証は数値シミュレーションによって行う。

2. Lagrange 変位速度の Euler 表現

一定周期のサンプリングによって得られる変位は変位速度と等価と考えられ、Euler 式変位計としてマウスを用いた場合でも、直接得られる計数値はその直下を過ぎる物質点の Euler 速度ないしその積算値である Euler 変位と見なすことができる。一般に Lagrange 速度すなわち変位の物質導関数 Du/Dt は、次式のように表される^{5, 6)}。

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{Du}{Dt} \quad (1)$$

ここに Du/Dt は変形する物体に固定された物質点の Lagrange 速度、 $\partial u/\partial t$ は変位センサの直下を過ぎる物体粒子の Euler 速度、 $\partial u/\partial x$ は空間座標に関する変位勾配を

表す。(1) 式では物体上の固定点の Lagrange 速度が Euler 速度 $\partial u/\partial t$ に空間座標系における変位勾配 $\partial u/\partial x$ と Lagrange 速度の積を加えた形で表されている。1 次元に限れば (1) 式の右边は Euler 速度 $\partial u/\partial t$ に対数ひずみ $\partial u/\partial x$ と Lagrange 速度 Du/Dt の積を加えた形になっている。いづれにしても (1) 式の左右両辺には Lagrange 速度 Du/Dt が入っており、Euler 速度から Lagrange 速度を求めるには、(1) 式を解かなくてはならない。しかも、右边第 2 項の変位勾配 $\partial u/\partial x$ は物体座標（基準配置）ではなく、空間座標（現在配置）に関する変位勾配である。

そこで本章では Lagrange 速度と Euler 速度のダイレクトな関係、すなわち Euler 速度と物体座標系での変位勾配を与えれば直ちに Lagrange 速度が求まるような関係を導く。

測定対象となる物体を物質点の連続的な集合と考え、物体の変形をその集合状態の時間的な変化として捉える。初期状態すなわち時刻 t_0 における試験体の配置を基準として、物質点 $X = \{X, Y, Z\}$ を定義する。

物質点 X の時刻 t での位置ベクトル $x = \{x, y, z\}$ や変位ベクトル $u = \{u, v, w\}$ は次のように書ける。

$$x = x(X, t) \quad (2)$$

$$u = x - X \quad (3)$$

物質点は初期配置（基準配置） X と現在配置 x で、常に 1 対 1 に対応し、(2) 式の逆の関係

$$X = X(x, t) \quad (4)$$

が必ず定まる。

行列を用いて (1) 式を書き直すと

$$\begin{Bmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

となる。Lagrange 速度が (5) 式の両辺に入っているため、Lagrange 速度の算出には (5) 式を解く必要がある。更に (5) 式を書き直して

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

とする。(6) 式を (3) 式を用いて整理すると

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial z} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & 1 - \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial v}{\partial z} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} & -\frac{\partial w}{\partial y} & 1 - \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial(x-u)}{\partial x} & \frac{\partial(X-x)}{\partial y} & \frac{\partial(X-x)}{\partial z} \\ \frac{\partial(Y-y)}{\partial x} & \frac{\partial(y-v)}{\partial y} & \frac{\partial(Y-y)}{\partial z} \\ \frac{\partial(Z-z)}{\partial x} & \frac{\partial(Z-z)}{\partial y} & \frac{\partial(z-w)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{Bmatrix} \quad (7)
\end{aligned}$$

となる。(7) 式を変形して

$$\begin{Bmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

を得る。(8) 式の右边を (3) 式を用いて書き直すと

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial(x-X)}{\partial X} & \frac{\partial(x-X)}{\partial Y} & \frac{\partial(x-X)}{\partial Z} \\ \frac{\partial(y-Y)}{\partial X} & 1 + \frac{\partial(y-Y)}{\partial Y} & \frac{\partial(y-Y)}{\partial Z} \\ \frac{\partial(z-Z)}{\partial X} & \frac{\partial(z-Z)}{\partial Y} & 1 + \frac{\partial(z-Z)}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (9)
\end{aligned}$$

となる。(9) 式をベクトル的に書くと

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (10)$$

を得る。

(10) 式では Lagrange 速度が Euler 速度に物体座標に関する変位勾配と Euler 速度との積を加えた形で表される。すなわち、(1) 式と異なり、(10) 式の右边には Lagrange 速度が入っていない。したがって、Euler 速度と基準配置に関する変位勾配が与えられれば、(10) 式を用いて Lagrange 速度が直ちに求まる。また、1 次元では、物質点の Lagrange 速度は Euler 速度に公称ひずみと Euler 速度との積を加えた形で表される。

3. 1 次元変位場の計測

全長 L_0 の弾性棒の左端を壁に固定して右端を軸方向に引張る場合を考える。右端上方の空間 $x = L_0$ に固定した Euler 式変位計によって Euler 速度や Euler 変位が計測されるものとする。

1 次元の場合、(10) 式は

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \quad (11)$$

と書ける。ここに ε は棒の伸びひずみ（公称ひずみ）を表し、時間 t の関数である。

ひずみ速度 $d\varepsilon/dt$ は

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{L_0} \frac{Du}{Dt} = \frac{1}{L_0} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \dot{\varepsilon}' (1 + \varepsilon) \quad (12)$$

となる。ここに $\dot{\varepsilon}'$ は

$$\dot{\varepsilon}' = \frac{1}{L_0} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (13)$$

で Euler 式変位計が検出する Euler 速度を棒の初期長さ L_0 で割った見かけのひずみ速度を表し、時間 t の関数である。

(12) 式から ε に関する 1 階微分方程式

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \dot{\varepsilon}' \varepsilon = \dot{\varepsilon}' \quad (14)$$

を得る。 $\dot{\varepsilon}'$ は Euler 式変位計の読みから得られるので、これを (14) 式に代入すると公称ひずみ ε が

$$\varepsilon = \exp \left(\int \dot{\varepsilon}' dt \right) - 1 = \exp(\varepsilon') - 1 \quad (15)$$

のように求まる。更に (15) 式から

$$\varepsilon' = \ln(1 + \varepsilon) = \ln \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0} \right) = \ln \frac{L}{L_0} \quad (16)$$

が得られる。ここに ΔL は棒の伸び、 L は現在長さを表す。したがって、Euler 変位を棒の初期長さないしセンサ間の距離で割って得られる見かけのひずみ ε' は対数ひずみに等しいことがわかる。

次に、Euler 式変位計からサンプリング時間ごとに Lagrange 変位や公称ひずみを読み出すアルゴリズムを導く。

初期状態 $t = t_0$ で弾性棒の右端上方の空間 $x = L_0$ に Euler 式変位計を設置し、棒の左端を固定して右端を軸方向に引張るものとする。

時刻 t_i において (11) 式は

$$\left. \frac{Du}{Dt} \right|_i = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i + \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i \varepsilon_i \quad (17)$$

と書ける。ここに添字 i は i 番目の時間ステップすなわち時刻 t_i における値であることを示し、 $\partial u / \partial t|_i$ は時刻 t_i でセンサ直下を過ぎる物質点の Euler 速度を表す。(17) 式の右边第 2 項に時刻 t_i での公称ひずみ ε_i が入っているが、

ε_i の算出には時刻 t_i での Lagrange 速度 $Du/Dt|_i$ を使う．そこで ε_i のかわりに一つ前のステップで求めた ε_{i-1} を用い，(17) 式を

$$\frac{Du}{Dt}\bigg|_i = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_i + \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_i \varepsilon_{i-1} \quad (18)$$

と書き直す．

初期状態 $t = t_0$ で棒は無ひずみの状態にあり，初期変位 $u_0 = 0$ ，初期ひずみ $\varepsilon_0 = 0$ とする．時刻 $t = t_i$ でセンサから Euler 速度 $\partial u/\partial t|_i$ が読み込まれると，試験片右端の Lagrange 速度が (18) 式から求まる．時刻 $t = t_i$ での右端の Lagrange 変位は

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i-1} + \Delta u_i \\ &= u_{i-1} + \frac{Du}{Dt}\bigg|_i \Delta t_i \\ &= u_0 + \sum_{j=1}^i \frac{Du}{Dt}\bigg|_j \Delta t_j \\ &= \sum_{j=1}^i \frac{Du}{Dt}\bigg|_j \Delta t_j \end{aligned} \quad (19)$$

と計算される．ここに $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ， Δu_i は Δt_i 間の変位増分を表す．時刻 $t = t_i$ での試験片の公称ひずみは (19) 式から

$$\varepsilon_i = \frac{\partial u}{\partial X}\bigg|_i = \frac{u_i - u_0}{L_0} = \left(\sum_{j=1}^i \frac{Du}{Dt}\bigg|_j \Delta t_j \right) / L_0 \quad (20)$$

と計算される．

4. 2 次元変位場の計測

Euler 式変位計としてコンピュータ用のマウスを使用すれば，単体で縦横 2 軸の Euler 速度や Euler 変位を計測できる．また，2 次元問題では，3 個の代表点の運動によって，物体の並進移動，回転ならびに一樣な面内変形を記述できる．そこで，第 1 図のように，Euler 式 2 軸変位計ないしマウスを三角形の頂点に一つずつ配置して，この三角形に囲まれた領域の変位場やひずみ場を求める．領域内部の変位勾配やひずみ分布は時間のみの関数で場所によらないと

第 1 図 Euler 式変位計による 2 次元変位場の計測

考える．もちろん，1 次や 2 次の分布も仮定できるが，計測に必要な変位計の数が増す．ちなみに 1 次のひずみ分布を仮定する場合には，四角形領域の四隅に配置する 4 台の Euler 式変位計が必要になる．Euler 式変位計に囲まれた領域は，単軸引張試験の場合の標点間領域 (Gauge area) に相当するので，ひずみ一定と考えるのが妥当であろう．そこで，ここでは 3 台の Euler 式 2 軸変位計を用いて，ひずみ一様な 2 次元変位場を計測する．初期状態，時刻 t_0 において，変位センサ A, B, C の直下にある物質点にそれぞれ変位計と同じアルファベット a, b, c を振る．

物質点 α の物質速度は (10) 式および (18) 式と同様にして

$$\frac{Du}{Dt}\bigg|_{\alpha i} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{\alpha i} + G_{i-1} \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{\alpha i} \quad (21)$$

と書ける．ここに，最初の添字 α は変位計ないし物質点の記号 A, B, C (a, b, c) を表し，2 番目の添字 i は i 番目の時間ステップすなわち時刻 t_i における値を示す．また， G_{i-1} は一つ前のステップ，時刻 t_{i-1} における変位勾配で，時刻 t_{i-1} での物質点 a, b, c の変位 $u_{\alpha(i-1)}$ から計算される．すなわち

$$G_{i-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} \end{bmatrix}_{i-1} \quad (22)$$

である．また，初期状態，時刻 $t = t_0$ で $u_0 = 0$ ， $G_0 = 0$ とすれば，時刻 $t = t_i$ での物質点 α の変位 $u_{\alpha i}$ は

$$u_{\alpha i} = u_{\alpha(i-1)} + \Delta u_{\alpha i} = \sum_{j=1}^i \frac{Du}{Dt}\bigg|_{\alpha j} \Delta t_j \quad (23)$$

と書ける．ここに $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ で， $\Delta u_{\alpha i}$ は物質点 α の時間刻み Δt_i 間の変位増分を表す． $u_{\alpha i}$ は (21) ~ (23) 式に時刻 t_i での Euler 速度 $\partial u/\partial t|_{\alpha i}$ および一つ前の時間ステップで求めた変位 $u_{\alpha(i-1)}$ とその勾配 G_{i-1} を代入することによって計算される．(23) 式から時刻 $t = t_i$ における物質点 a, b, c の変位 $u_{\alpha i}$ が求まるので，これを用いて変位勾配 G_i を計算する．

ここからは，変位 u およびその成分 u, v は時刻 $t = t_i$ における値のみを考えるので，時間ステップを示す添字 i は省略する．また，三角形領域の頂点 a, b, c と数字の 1, 2, 3 を対応させる．

物質点 a, b, c を頂点とする三角形領域内部の変位は

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 = \sum_{\alpha=1}^3 N_{\alpha} u_{\alpha} \quad (24)$$

と書ける．ここに $u = u(X, Y) = \{u(X, Y), v(X, Y)\}$ は領域内の物質点 (X, Y) の変位ベクトル， $u_{\alpha} = \{u_{\alpha}, v_{\alpha}\}$ は頂点 α の変位ベクトルを表す． $N_{\alpha} = (a_{\alpha} + b_{\alpha} X + c_{\alpha} Y)/(2A)$ は内挿関数で，物質点 (X, Y) の面積座標に等しい．また， $a_{\alpha} = X_{\beta} Y_{\gamma} - X_{\gamma} Y_{\beta}$ ， $b_{\alpha} = Y_{\beta} - Y_{\gamma}$ ， $c_{\alpha} = X_{\gamma} - Y_{\beta}$ で，添字 (α, β, γ) は (1, 2, 3) を循環的に置き換えて得ら

れる整数である． A は三角形領域 abc (123) の面積を表す．変位勾配 G_i の第 1 列, 第 2 列はそれぞれ

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial X} \end{array} \right\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \times \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\} \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \end{array} \right\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \times \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\} \quad (26)$$

となる．(25), (26) 式から時刻 t_i における変位勾配 G_i および三角形領域の面内ひずみ成分

$$\varepsilon_X = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_Y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \quad \gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \quad (27)$$

が計算できる．

上で求めた G_i および次のステップ t_{i+1} で得られる Euler 式変位計の読み $\partial \mathbf{u} / \partial t|_{\alpha(i+1)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) を (21) 式の右辺に代入して時刻 t_{i+1} での Lagrange 速度 $D\mathbf{u} / Dt|_{\alpha(i+1)}$ を算出する．このプロセスを時間ステップごとに繰り返せば, 2 次元変位場においても, Euler 式変位計から物体に固定された物質点 a, b, c の Lagrange 変位や三角形領域 abc 内部の公称ひずみを実時間で読み出すことができる．

5. 数値シミュレーションによる検証

第 4 章で導いたアルゴリズムの妥当性を数値シミュレーションによって検証する．第 1 図のように 2 次元の試験体に所定の面内変位を与え, 表面近傍の空間に固定した 3 台の Euler 式 2 軸変位計によってその直下を過ぎる物質点の Euler 速度を計測する．得られた Euler 速度から 4 章のアルゴリズムを用いて試験体上の三角形領域の現在配置を算出し, 与えた変位と比較する．シミュレーションでは Euler 速度を実測するかわりに数値計算によって求める．

5.1 シミュレーションの方法 初期状態, 時刻 $t = t_0$ でセンサ直下にあった試験体上の物質点は変形とともに移動し, センサから離れていく．変形前にセンサ直下にあった物質点が作る三角形の初期配置を $\triangle ABC$, 変形中ないし変形後の配置を $\triangle abc$ で表す．空間に固定された Euler 式変位計は終始 $\triangle ABC$ の頂点にある． $\triangle ABC$ の頂点に配した 3 台の変位計が検出する Euler 速度から, 任意の時刻 t における $\triangle abc$ の配置や領域内部のひずみ成分を 4 章のアルゴリズムによって計算する．

$\triangle abc$ の頂点の物体座標と空間座標の関係は次のように表される．

$$\begin{aligned} x_a &= x(X_A, Y_A, t), & y_a &= y(X_A, Y_A, t) \\ x_b &= x(X_B, Y_B, t), & y_b &= y(X_B, Y_B, t) \\ x_c &= x(X_C, Y_C, t), & y_c &= y(X_C, Y_C, t) \end{aligned} \quad (28)$$

試験体に与える変位を

$$\begin{aligned} x &= X + \alpha_1 t X + \beta_1 t Y + \gamma_1 t \\ y &= Y + \alpha_2 t X + \beta_2 t Y + \gamma_2 t \end{aligned} \quad (29)$$

と書く．ここに α_i, β_i はひずみ速度, γ_i は並進移動の速度を表す．

試験体は一辺の長さが 100 の正方形とし, その頂点に 1 から 4 の番号を付ける．与える変位は (1) 2 軸引張り, (2) 純粋せん断とし, それに並進移動を重ねる．シミュレーションに用いる Euler 式変位計の配置すなわち $\triangle ABC$ の頂点の座標および変形パラメータ $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ は第 1 表に示す．

まず, 試験体に (29) 式の変位を与えたときに Euler 式変位計の置かれた $\triangle ABC$ の頂点 $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C)$ を通過する物質点の Euler 速度を数値計算によって求め, これを変位計の検出速度とする．

試験体の頂点 1, 2, 3, 4 の時刻 t における配置も (28) 式と同様に次のように書ける．

$$x_j = x(X_j, Y_j, t), \quad y_j = y(X_j, Y_j, t) \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (30)$$

ここに (x_j, y_j) は試験体の頂点 j の空間座標, (X_j, Y_j) は物体座標を表す．時刻 t で試験体が (29) 式のように変位したとき, 四つの頂点の空間座標 (x_j, y_j) は

$$\begin{aligned} x_j &= X_j + \alpha_1 t X_j + \beta_1 t Y_j + \gamma_1 t \\ y_j &= Y_j + \alpha_2 t X_j + \beta_2 t Y_j + \gamma_2 t \end{aligned} \quad (31)$$

となる．また, 頂点の Lagrange 速度 $\{\dot{u}_j, \dot{v}_j\}$ は

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= \alpha_1 X_j + \beta_1 Y_j + \gamma_1 \\ \dot{v}_j &= \alpha_2 X_j + \beta_2 Y_j + \gamma_2 \end{aligned} \quad (32)$$

で与えられる．また, 試験体上の任意点の空間座標は

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \times \{x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_4\} \quad (33)$$

で表される．ここに N_j は内挿関数で

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4, & N_2 &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \\ N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4, & N_4 &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4 \end{aligned} \quad (34)$$

第 1 表 シミュレーションに用いる変形パラメータの値

	(X_A, Y_A)	(X_B, Y_B)	(X_C, Y_C)	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2
Biaxial tension	(60, 60)	(90, 50)	(70, 80)	0.01	0	0	0.005	0.2	0.1
Pure shear	(60, 60)	(90, 50)	(70, 80)	0	0.004	0.008	0	0.2	0.2

$x = X + \alpha_1 t X + \beta_1 t Y + \gamma_1 t, \quad y = Y + \alpha_2 t X + \beta_2 t Y + \gamma_2 t.$

(ξ, η) は頂点 1, 2, 3, 4 でそれぞれ $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ の値をとる局所座標である。

試験体の頂点 (x_j, y_j) は (31) 式のように時間とともに変化するが、Euler 式変位計は空間に固定されているので、その空間座標 (x_α, y_α) ($\alpha = A, B, C$) は時間によらず一定である。しかし、試験体の移動や変形に伴って頂点の空間座標 (x_j, y_j) が変わるため、Euler 式変位計の試験体上の配置を表す局所座標 $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ も変化する。 $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ は (33) 式左辺の $\{x, y\}$ に Euler 式変位計の空間座標 $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ を代入し、これを ξ_α, η_α について解くことによって求められる。すなわち

$$\begin{aligned} x_\alpha &= N_1(\xi_\alpha, \eta_\alpha)x_1 + N_2(\xi_\alpha, \eta_\alpha)x_2 \\ &\quad + N_3(\xi_\alpha, \eta_\alpha)x_3 + N_4(\xi_\alpha, \eta_\alpha)x_4 \\ y_\alpha &= N_1(\xi_\alpha, \eta_\alpha)y_1 + N_2(\xi_\alpha, \eta_\alpha)y_2 \\ &\quad + N_3(\xi_\alpha, \eta_\alpha)y_3 + N_4(\xi_\alpha, \eta_\alpha)y_4 \end{aligned} \quad (35)$$

(35) 式の $N_j(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ に (34) 式を適用して

$$\begin{aligned} p_1 - x_\alpha + p_2\xi_\alpha + p_3\eta_\alpha + p_4\xi_\alpha\eta_\alpha &= 0 \\ q_1 - y_\alpha + q_2\xi_\alpha + q_3\eta_\alpha + q_4\xi_\alpha\eta_\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

を得る。ここに

$$\begin{aligned} p_1 &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4 \\ p_2 &= (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)/4 \\ p_3 &= (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)/4 \\ p_4 &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/4 \\ q_1 &= (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)/4 \\ q_2 &= (-y_1 + y_2 + y_3 - y_4)/4 \\ q_3 &= (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)/4 \\ q_4 &= (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)/4 \end{aligned} \quad (37)$$

である。(36) 式は ξ_α, η_α に関する非線形連立方程式であるが、Newton 法を使って、任意の時刻 t における Euler 式変位計 A, B, C の試験体上の局所座標 $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ が求まる。試験体の四つの頂点の変位速度 $\{\dot{u}_j, \dot{v}_j\}$ は (32) 式によって与えられるので、センサ直下 (x_α, y_α) を通過する試験体の Euler 速度 $\{\dot{u}_\alpha, \dot{v}_\alpha\}$ は

$$\begin{aligned} \dot{u}_\alpha &= N_1(\xi_\alpha, \eta_\alpha)\dot{u}_1 + N_2(\xi_\alpha, \eta_\alpha)\dot{u}_2 \\ &\quad + N_3(\xi_\alpha, \eta_\alpha)\dot{u}_3 + N_4(\xi_\alpha, \eta_\alpha)\dot{u}_4 \\ \dot{v}_\alpha &= N_1(\xi_\alpha, \eta_\alpha)\dot{v}_1 + N_2(\xi_\alpha, \eta_\alpha)\dot{v}_2 \\ &\quad + N_3(\xi_\alpha, \eta_\alpha)\dot{v}_3 + N_4(\xi_\alpha, \eta_\alpha)\dot{v}_4 \end{aligned} \quad (38)$$

と計算される。こうして求めた $\{\dot{u}_\alpha, \dot{v}_\alpha\}$ が空間 (x_α, y_α) に固定された Euler 式変位計の直下を過ぎる試験体の Euler 速度、すなわち Euler 式変位計がサンプリングごとに検出する変位速度ないし変位増分 $\partial u / \partial t = \{\partial u / \partial t, \partial v / \partial t\}$ に相当する。

サンプリング時間ごとに、試験体の四つの頂点の速度や空間座標から (38) 式を使って変位計直下の Euler 速度を計算し、これを Euler 式変位計の計測値とする。変位計の置かれた 3 箇所の Euler 速度から 4 章のアルゴリズムに従って Lagrange 変位や公称ひずみを算出し、与えた変位場やひずみ場と比較する。

5.2 シミュレーションの結果

5.2.1 2 軸引張り 一辺が 100 mm の正方形板 1234 が第 2 図のように置かれている。 y 軸に平行な辺 2-3 を x 方向に一定速度 1 mm/s で、 x 軸に平行な辺 3-4 を y 方向に 0.5 mm/s で引張るとともに x 方向に 0.2 mm/s, y 方向に 0.1 mm/s の並進移動を重ねる。辺 1-2 の y 方向変位と辺 4-1 の x 方向変位は並進移動を除いて 0 に拘束し、辺 1-2 および辺 3-4 上の x 方向変位、辺 2-3 および辺 4-1 上の y 方向変位は非拘束とする。(29) 式の変位パラメータ $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ の値を第 1 表に示す。引張り前に、空間座標の (x_α, y_α) すなわち試験体上の (X_α, Y_α) にあった点は t 秒後に

$$\begin{aligned} x_t &= X_\alpha + 0.01tX_\alpha + 0.2t \\ y_t &= Y_\alpha + 0.005tY_\alpha + 0.1t \end{aligned} \quad (39)$$

に移動し、その変位 (u_t, v_t) は

$$\begin{aligned} u_t &= x_t - X_\alpha = 0.01tX_\alpha + 0.2t \\ v_t &= y_t - Y_\alpha = 0.005tY_\alpha + 0.1t \end{aligned} \quad (40)$$

で表される。

第 2 図に正方形板 1234 と Euler 式変位計 A, B, C の直下にあった物質点 a, b, c の時刻 $t = 0$ (初期状態) と $t = 100$ (最終状態) における配置を示す。破線は初期配置、実線は最終配置を表す。また、変位計のサンプリング周期は 1 秒とする。

最初 B ($x_B = 90, y_B = 50$) にあった試験体上の物質点 b は (39), (40) 式によれば、 x, y 方向にそれぞれ一定速度 $\dot{u}' = 1.1$ mm/s, $\dot{v}' = 0.35$ mm/s で移動し、100 秒間に $u_{b100} = 110$ mm, $v_{b100} = 35$ mm だけ変位して (200, 85) に到達する。領域 1234 全体を捉えることのできる画像センサを用いても、100 秒後のゲージ領域 abc はセンサの視野外に完全に出てしまっている。このような場合でも Euler 式変位計はゲージ領域の Lagrange 変位やひずみを計測することができる。

第 3 図の実線①, ④は試験体上の物質点 b の x 方向、 y 方向の Lagrange 速度を表し、それぞれ 1.1 mm/s, 0.35 mm/s と一定である。これに対して B 点に置かれた Euler 式変位計が検出する速度②, ⑤は引張開始時こそ物質点 b の Lagrange 速度に等しいが、時間とともに次第に低下し、100 秒後には 0.55 mm/s, 0.23 mm/s となり、低下の割合も x, y 方向の配置によって異なる。点線③, ⑥は

第 2 図 2 軸引張りを受ける試験体 1234, 物質点 a, b, c および Euler 式変位計 A, B, C の配置

第 3 図 2 軸引張りにおける変位 (Euler 式変位計の読みと本報のアルゴリズムによる補正值)

第 4 図 2 軸引張りにおけるひずみ (Euler 式変位計の読みからそのまま求めたひずみと本報のアルゴリズムによる補正值)

A, B, C に置かれた変位計から得られる Euler 変位に 4 章のアルゴリズムを適用して計算した物質点 b の Lagrange 速度 $Du/Dt, Dv/Dt$ であるが、いずれも与えた速度①, ④に一致している。実線⑦, ⑩は物質点 b の x 方向および y 方向の変位 u_b, v_b で、時間に比例して増加する。破線⑧, ⑪は B 点に置かれた Euler 式変位計の検出する Euler 速度をそのまま加算して求めた変位で、時間の経過とともに b 点の実変位との差が増大する。物質点 b の 100 秒後の x 方向変位 u_b が 110 mm であるのに対して、Euler 変位計の出力をそのまま加算して求めた変位は 77.1 mm, y 方向は v_b の真値が 35 mm であるのに対して、Euler 変位計の読みは 28.7 mm に過ぎない。ただし、4 章のアルゴリズムを適用して求めた Lagrange 変位⑨, ⑫は真の変位⑦, ⑩に一致する。第 4 図の実線①, ④, ⑦は試験体上の 3 個の物質点 a, b, c に囲まれた領域のひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ の真値を表す。せん断ひずみ γ_{xy} は常に 0 であるが、直ひずみは時間に比例して増加する。破線②, ⑤, ⑧は Euler 式変位計の変位出力からそのまま求めたひずみ成分 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ で、0 となるせん断ひずみを除き、時間の経過とともに正しい値から次第にずれる。ちなみに 100 秒後の ε_x の真値は 100% であるが、Euler 式変位計からそのまま求めた ε_x は 70% で、30% もの差が生じる。これに対して 4 章のアルゴリズムをサンプリングごとに適用して求めたひずみ成分

第 5 図 純粋せん断を受ける試験体 1234, 物質点 a, b, c および Euler 式変位計 A, B, C の配置

第 6 図 純粋せん断における変位 (Euler 式変位計の読みと本報のアルゴリズムによる補正值)

③, ⑥, ⑨はいずれも与えたひずみ①, ④, ⑦に一致している。

5.2.2 純粋せん断 第 5 図は一辺 100 mm の正方形板 1234 がせん断変形する場合のシミュレーションである。正方形板や Euler 式変位計の配置および Euler 式変位計のサンプリング周期は 2 軸引張りの場合と同じである。変位パラメータ $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ の値は第 1 表に示す通りである。試験体上の物質点 a, b, c は変形前にはそれぞれ変位計 A, B, C の真下にあったが、100 秒後には正方形板 1234 の最初の領域から完全に逸脱する。

第 6 図の実線①, ④は試験体上の物質点 c の x 方向および y 方向の Lagrange 速度で、それぞれ 0.84 mm/s, 0.48 mm/s と一定である。これに対して C 点に置かれた Euler 式変位計が検出する速度②, ⑤は引張開始時こそ物質点 c の Lagrange 速度に等しいが、時間とともに次第に低下し、100 秒後には 0.67 mm/s, 0.21 mm/s となる。点線③, ⑥は A, B, C に置かれた変位計から得る Euler 速度に 4 章のアルゴリズムを適用して算出した物質点 c の Lagrange 速度 Du/Dt であるが、いずれも与えた速度①, ④に一致してグラフからは見分けがつかない。実線⑦, ⑩は物質点 c の変位 u_c, v_c で、いずれも時間に正比例する。破線⑧, ⑪は C 点に置かれた Euler 式変位計が検出する Euler 速度をそのまま加算して求めた変位で、時間の経過とともに実際の変位との差が増大する。物質点 c の 100 秒後の x 方向変位 u_{c100} の真値が 84 mm であるのに対して、Euler 変位計の出力をそのまま加算して求めた変位は 73 mm に過ぎない。ただし、4 章のアルゴリズムを適用して求めた

第 7 図 純粋せん断におけるひずみ (Euler 式変位計の読みからそのまま求めたひずみと本報のアルゴリズムによる補正值)

Lagrange 変位⑨, ⑫は実変位⑦, ⑩に一致する。

第 7 図の実線①, ④, ⑦は試験体上の 3 個の物質点 a, b, c に囲まれた領域のひずみ ε_x , ε_y , γ_{xy} の真値を表す。直ひずみ ε_x , ε_y は常に 0 であるが, せん断ひずみ γ_{xy} は時間に比例して増加する。破線②, ⑤, ⑧は Euler 式変位計の変位出力からそのまま求めたひずみ成分 ε_x , ε_y , γ_{xy} で, 直ひずみ ε_x は真値と同様 0 になるが, ⑤の ε_y は負で, その絶対値は時間とともに増加する。このように Euler 式変位計の読みからそのままひずみを求めた場合, 発生しないはずのひずみを算出することがある。一方, せん断ひずみは時間の経過とともに真値よりも大きくなっていく。2 軸引張りの場合, Euler 変位からそのまま求めた直ひずみがいずれも真値より小さく出たのと対照的である。ちなみに 100 秒後のせん断ひずみ γ_{xy} の真値は 121% であるが, Euler 式変位計からそのまま求めた γ_{xy} は 136% で, 15% も大きい。これに対してサンプリングごとに 4 章のアルゴリズムを適用して算出したひずみ③, ⑥, ⑨はいずれも与えたひずみ①, ④, ⑦と一致する。

2 軸引張り, 純粋せん断いずれの場合も, Euler 式変位計から直接得られる変位は時間の経過とともに実際の変位から大きく離れていくのに対し, 第 4 章のアルゴリズムを適用して得られる変位は実際の変位に一致する。ひずみについても同様で, 変位計の読みからそのまま求めたひずみ成分は次第に実際の値からずれていくが, 本報のアルゴリズムによって求めたひずみは実際に与えたひずみと一致する。変形前に変位センサに囲まれていたゲージ領域が試験体の元の領域を完全に逸脱するような大変形の場合でも, Euler 式変位計の出力に 4 章のアルゴリズムを適用することによってゲージ領域の Lagrange 変位や公称ひずみを実時間で計測できる。

6. 結 論

Euler 式変位計は試験片を交換する度に標点マークを貼付したり, 標点間距離を計測する手間が省けて自動試験に適する, 狭視野のセンサでも計測できる変位やひずみの大きさに原理的な制約がないなど, 従来の変位計にはない特長を有する。しかし, 直接得られる変位が Lagrange 変位ではなく Euler 変位である, 得られるひずみも公称ひずみではなく対数ひずみであるなどの難点もある。更に 2 次元変位場では Euler 変位から Lagrange 変位への変換や公称ひずみの算出が 1 次元ほど簡単ではない。また, 2 次元では対数ひずみの定義もまちまちである。そこで, 本報では Euler 式変位計の読みすなわち Euler 変位から Lagrange 変位や公称ひずみを実時間で算出する実用的な手法を開発した。

一般に Lagrange 速度すなわち変位の物質微分は, Euler 速度に空間座標に関する変位勾配と Lagrange 速度の積を加えた形で表される。しかし, これでは Lagrange 速度を求めるために Lagrange 速度が要求される。また, ひずみ解析に使われる変位勾配は空間座標ではなく, 物体座標に関する変位勾配である。そこで本報では Lagrange 速度と Euler 速度のダイレクトな関係, すなわち Lagrange 速度が Euler 速度に物体座標系での変位勾配と Euler 速度の積を加えた形で表されることを示し, Euler 速度と物体座標系に関する変位勾配を与えれば直ちに Lagrange 速度が求まるような関係を導いた。この関係を用いて Euler 式変位計から得られる Euler 変位を標点間距離で割った値が対数ひずみになることを解析的に示した。更に, 1 次元および 2 次元の変位場において, Euler 式変位計の計測値から Lagrange 変位や公称ひずみを実時間で求めるためのアルゴリズムを導き, 数値シミュレーションによってその妥当性を明らかにした。

参 考 文 献

- 1) 守屋一政: Euler 式変位計の提案と材料試験への応用, 日本航空宇宙学会論文集, **52** (2004), pp. 579-584.
- 2) Hencky, H.: Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen, Zeit. Tech. Phys., **9** (1928), pp. 215-220.
- 3) Fitzgerald, J. E.: A Tensorial Hencky Measure of Strain and Strain Rate for Finite Deformations, J. Appl. Phys., **51** (1980), pp. 5111-5115.
- 4) Freed, A. D.: Natural Strain, J. Eng. Mater. Technol., **117** (1995), pp. 379-385.
- 5) Fung, Y. C.: Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, New Jersey, 1965, pp. 117-120.
- 6) Roberts, A. J.: A One-Dimensional Introduction to Continuum Mechanics, World Scientific, Singapore, 1994, pp. 6-8.