DAS の最適軌道制御に関する一研究^{*1} A Study about Optimal Orbital Control of DAS

付 天 爽^{*2}・今 度 史 昭^{*3}
Tianshunag FU and Fumiaki IMADO

Key Words: Dive and Ascent Satellite, Orbital Control, Minimum Fuel Consumption, Steepest Ascent Method

Abstract: DAS (Dive and Ascent Satellite) is a kind of satellite that can approach very close to the earth, which was designed by NAL (National Aerospace Laboratory of Japan) in later 1970's. Now we paid attention to the function of the satellite that can descend and ascend, and proposed to use it for getting detailed information of the area which is suffered from a natural disaster. In this paper orbital control of DAS with minimum fuel consumption is discussed, where the earth is treated as an ellipsoid of revolution, the atmosphere drag and the second zonal coefficient is considered. The optimal orbital control problems are treated as nonlinear two point boundary problems, and solved by the steepest ascent method. The derivation of equations and results are shown in detail.

1. は じ め に

近年多くの自然災害が発生しており、迅速な災害状況の把握と対策が重要視されている。地球観測衛星を用いて被災情報を収集する場合、従来の観測衛星では軌道高度および軌道傾斜角の制限により、必要な観測精度を迅速に得ることが困難である。そこでわれわれは DAS を用いて被災地上空の近距離で観測することを提案する。

DAS は 1970 年代後半 NAL が電離圏を観測するために提案したものであるが^{1, 2)}、ここでは DAS の降下および再上昇できる能力を利用し、DAS を地球上空の近いところへ降下させて被災地の観測を行わせる。そのために、DAS の軌道変換を燃料消費最小の問題として定式化し、最適制御と最適経路を求める研究を進めてきた^{3, 4)}。

本稿において、まず地球中心赤道面基準慣性座標系、軌道面基準座標系、軌道面座標系およびこれらの座標系間の座標変換について説明する。慣性座標系において空気抵抗および帯状調和関数 2 次の項を考慮した DAS の運動方程式を示す。次に最適軌道制御を求めるための数学的手法、最急上昇法およびそのアルゴリズムを説明する。次に燃料消費を最小とする DAS の最適軌道変換制御の計算結果を示し、考察する。最後に本稿をまとめる。

1970 年代 NASA は上昇および降下できる衛星 Explorer C, D, E を運用した。一方 70 年代後半、NAL は DAS の予備的な研究を行った。しかし、それらの衛星は地球表面

の物体を観測するために用いられるものではなかった。なお、その後 DAS の研究は行われていない（米国で情報衛星に利用されているとも言われているが、公表されたものは皆無である）。われわれの提案が実現すれば、既存の観測センサーを用いて十分な観測精度が得られ、必要な情報を迅速に収集することができる。

2. 座標系および衛星の運動方程式

この章では本研究で使用する座標系および衛星の運動方程式について詳しく説明する。

2.1 座標系 本研究では地球を回転楕円体で近似した。地球モデルのパラメーターは次の通りである⁵⁾。

赤道方向半径： $R_e = 6378.137 \text{ km}$

極方向半径： $R_p = 6356.752 \text{ km}$

扁平率： $\alpha = 1/298.257222$

自転の角速度： $\omega_e = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$

地心重力定数： $\mu_e = 398600.4 \text{ km}^3/\text{s}^2$

絶対空間に固定されている座標系を絶対座標系と呼び、絶対座標系に対して等速直線運動をしている座標系を慣性座標系と呼ぶ。太陽は銀河系の中心周りを回転しており、地球は太陽の周りを公転しているが、地球近傍の運動を取り扱うとき地球中心に原点があり、地球とともに自転しない座標系を慣性座標系とみなす。以下第 1 図に示す座標系について説明する。

A. 地球中心赤道面基準慣性座標系 Φ

座標系の原点 O は地球の中心にあり、 X - Y 平面を赤道面にとり、 Z 軸は地球の自転軸に一致させ、北極の方向を正とする。 X , Y 軸は地球とともに回転せず空間に固定し、 X 軸の正の方向を春分点方向とする。

B. 軌道面基準座標系 Φ_R

地球中心に座標系の原点をとり、 Z_R 軸を軌道面ベクト

^{*1} © 2007 日本航空宇宙学会

平成 17 年 7 月 26 日、The 15th Workshop on JAXA Astrodynamics and Flight Mechanics, 平成 17 年 8 月 9 日、SICE Annual Conference 2005 in Okayama において発表。平成 18 年 4 月 3 日原稿受理

^{*2} 信州大学工学部総合工学系研究科システム開発工学専攻

^{*3} 信州大学工学部

第2図 高度に対する空気の密度

スラストの推力とすると, 2.2 節に示した座標変換によって制御外力成分は

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -S_\eta C_\Omega - C_\eta C_i S_\Omega & -S_i S_\Omega & -C_\eta C_\Omega + S_\eta C_i S_\Omega \\ -S_\eta S_\Omega + C_\eta C_i C_\Omega & S_i C_\Omega & -C_\eta S_\Omega - S_\eta C_i C_\Omega \\ C_\eta S_i & -C_i & -S_\eta S_i \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} f_{x0} \\ f_{y0} \\ f_{z0} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

となる.

2.4 軌道要素 衛星の単位質量角運動量 $\mathbf{h} = \mathbf{x} \times \mathbf{V}$ とすると

$$\begin{cases} h_x = yV_z - zV_y \\ h_y = zV_x - xV_z \\ h_z = xV_y - yV_x \end{cases} \quad (2.10)$$

ここで h_x, h_y, h_z は角運動量の成分である. 衛星の軌道要素は Ω, i の他に近地点引数 ω , 真近点離角 θ , 離心率 e および長半径 a がある. また緯度引数 $\eta = \omega + \theta$, 半長弦 $p = a(1 - e^2)$ も用いられる. これらの慣性座標における表示はケプラーの法則によって次のように与えられる.

$$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu_e} \right)^{-1} \quad (2.11)$$

$$p = \frac{h^2}{\mu_e} \quad (2.12)$$

$$\Omega = \tan^{-1} \left(\frac{h_x}{-h_y} \right) \quad (2.13)$$

$$i = \tan^{-1} \left[\frac{(h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}{h_z} \right] \quad (2.14)$$

$$\eta = \tan^{-1} \left(\frac{zh}{yh_x - xh_y} \right) \quad (2.15)$$

3. 最適化の手法

DAS の最適軌道制御は, 初期条件および終端条件が与えられた 2 点境界値問題である. このような問題の解法は変分を用いない数値計画法, 動的計画法 (Dynamic Programming), と変分を用いる変分法 (Calculus of Variation) および最大原理 (Maximum Principle) がある. 最大原理の

本質も変分原理であり, これを用いた数値解法も数多く考えられている. 最大原理の諸法を大別すると, 間接法 (Indirect Method) および直接法 (Direct Method) となる. 間接法は最大原理を適用した上で, 境界条件を修正するなどして間接的に最適制御ベクトルを求める. 直接法は制御ベクトルを直接修正して最大原理および境界条件を満たす最適制御ベクトルを求めようとする手法である. 直接法はまた最急上昇法 (最急降下法とも呼ぶ), 共役勾配法, ニュートン法等がある. 最急上昇法は勾配法の中で最も簡明な手法であるが, 最適点の近傍における収束が悪いという欠点がある. 共役勾配法はお互いに共役な探索方向を用い, 計算が簡単で収束も良い. ニュートン法は, 2 階の導関数を用いるので計算が複雑となり, 収束の保証もない.

最急上昇法と共役勾配法を拡張してできたアルゴリズムは Steepest Ascent Method Algorithm (SAMA)¹⁰⁾ と Sequential Conjugate Gradient Restoration Algorithm (SCGRA) である. SCGRA は未知パラメータを含む最適化問題に有力であるが, 一般的に非常に計算時間がかかるので, ここでは SAMA を用いた.

最急上昇法は解くべき問題を以下のように定式化する.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (\text{システム方程式}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{初期条件}) \quad (3.2)$$

$$\Psi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (\text{終端拘束条件}) \quad (3.3)$$

のもとに評価関数

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] \quad (3.4)$$

を最大 (または最小) にする制御ベクトル $\mathbf{u}(t)$ を $t_0 \leq t \leq t_f$ の間で求める. ここで終端時間 t_f は停止条件

$$\Omega[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (3.5)$$

より定まるものである. ここで

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \quad (n \text{ 次元状態ベクトル}) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_l(t)]^T \quad (l \text{ 次元制御ベクトル}) \quad (3.7)$$

である. 最適解を求める SAMA の手順は次のようになる.

(1) 適当な制御ベクトルの履歴 $\mathbf{u}(t)$ を与える (公称制御と呼ぶ).

(2) 初期条件と $\mathbf{u}(t)$ を用いて停止条件 (3.5) 式が満足されるまでシステム方程式を積分する. $\mathbf{x}(t)$ と $\Psi[\mathbf{x}(t_f), t_f]$ を記録し, 次の偏微分の時間履歴を計算する.

$$\mathbf{F}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{G}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.8)$$

(3) ステップ (2) で得た $\mathbf{x}(t_f)$ を用いて影響関数の境界条件式 (3.9) を計算し, これを用いて (3.10) を逆時間で積分し $\lambda_\phi, \lambda_\psi$ および λ_Ω を決定する. 次に影響関数式 (3.11)

を計算する．

$$\begin{cases} \lambda_\phi(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right)_{t_f} \\ \lambda_\Omega(t_f) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}} \right)_{t_f} \\ \lambda_\Psi(t_f) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \right)_{t_f} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_\phi = -\lambda_\phi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \\ \dot{\lambda}_\Omega = -\lambda_\Omega \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \\ \dot{\lambda}_\Psi = -\lambda_\Psi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} \lambda_{\phi\Omega} = \lambda_\phi - \frac{\dot{\phi}(t_f)}{\dot{\Omega}(t_f)} \lambda_\Omega \\ \lambda_{\Psi\Omega} = \lambda_\Psi - \frac{\dot{\Psi}(t_f)}{\dot{\Omega}(t_f)} \lambda_\Omega \end{cases} \quad (3.11)$$

(4) ステップ 3 と同時に次の積分量を計算する．

$$\begin{cases} I_{\Psi\Psi} = \int_{t_0}^{t_f} \lambda_{\Psi\Omega}^T G W^{-1} G^T \lambda_{\Psi\Omega} dt \\ I_{\Psi\phi} = \int_{t_0}^{t_f} \lambda_{\Psi\Omega}^T G W^{-1} G^T \lambda_{\phi\Omega} dt \\ I_{\phi\phi} = \int_{t_0}^{t_f} \lambda_{\phi\Omega}^T G W^{-1} G^T \lambda_{\phi\Omega} dt \end{cases} \quad (3.12)$$

(5) 終端拘束式 (3.3) に近づくように $\delta\Psi$ の値を選ぶ．例えば

$$\delta\Psi = -\varepsilon\Psi[\mathbf{x}(t_f), t_f] \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \quad (3.13)$$

上式を満たし、かつ J を増加させる $\delta\mathbf{u}(t)$ は次のようになる．

$$\delta\mathbf{u}(t) = \left(\frac{1}{2\mu} \right) W^{-1} G^T (\lambda_{\phi\Omega} - \lambda_{\Psi\Omega} \nu) \quad (3.14)$$

ここで

$$\begin{cases} 2\mu = \left[\frac{I_{\phi\phi} - I_{\Psi\phi}^T I_{\Psi\Psi}^{-1} I_{\Psi\phi}}{(dp)^2 - \delta\Psi^T I_{\Psi\Psi}^{-1} \delta\Psi} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \nu = -2\mu I_{\Psi\Psi}^{-1} \delta\Psi + I_{\Psi\Psi}^{-1} I_{\Psi\phi} \end{cases} \quad (3.15)$$

ここで dp と $(l \times l)$ 行列の重み関数 $W(t)$ は次式を満足するように選ぶ．

$$(dp)^2 = \int_{t_0}^{t_f} \delta\mathbf{u}^T(t) W(t) \delta\mathbf{u}(t) dt \quad (3.16)$$

(6) 改良された $\mathbf{u}(t)$ を用いて J の増加が十分に小さくなるまでステップ (1) から (5) までを繰り返す．

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t)_{\text{old}} + \delta\mathbf{u}(t) \quad (3.17)$$

4. 燃料消費を最小とする軌道変換制御

燃料は衛星寿命の最も重要な要素である．衛星は制御用の燃料がなくなると衛星の姿勢が保たれなくなると同時に、摂動によって元の軌道から離れてしまい、衛星本来の機能が失われる．従って最小の燃料消費で衛星を制御することは重要なテーマである．

DAS を用いて被災地を観測する場合、詳細な情報を収集するために DAS が被災地の上空の最も近い距離において観測することが望ましい．そのためには DAS の軌道の最低点付近が被災地の上空になるように制御しなければならない．そこでこのような軌道変換を最小の燃料消費で行う最適制御問題として解く．衛星の軌道制御と共に姿勢も制御しなければならないが、姿勢制御に必要な燃料は極僅かであるので、ここでは無視している．

4.1 最適軌道高度変換制御 本節では軌道傾斜角 97.049° 、 55° および 0° の軌道面上にある衛星を本来の高度 400 km の円軌道から降下させ、100 km の高度に達した後上昇させ、最終的に元の高度 400 km の円軌道に戻す．この一連の制御を最少の燃料で実行する計算の方法と結果を示す．計算に当たり、次の仮定を設けた：

制御の開始点は軌道面上任意の点にすべきであるが、ここでは便宜上衛星の軌道が春分点 ($6778.137, 0, 0$) を通過するものとし、衛星がこの点を通過する時点を軌道制御開始点とする．今後の計算の開始点はすべてこの点とする．衛星の高度は地球の中心から衛星までの距離 r から、その r と同一線上において、地球の中心から地表までの距離を差し引いたものである．空気抗力係数は自由分子流における抗力係数 2 とした²⁾．これは壁における分子の反射を完全鏡面反射と仮定したと考えてよい．なお、高度 100 km から 135 km までの間は遷移流域になる．この間の抗力係数は 2 以下になるが、研究の初期段階で抗力係数を煩雑にするのは得策ではないと考えて 2 に固定した．また、軌道の傾斜角が 0° のとき式 (2.13) と (2.15) の分母が 0 になり、 Ω と η が定義できなくなるので、 0° に近似する傾斜角 0.02° を用いた．更に、軌道の傾斜角が 55° と 97.049° を用いたのは GPS 衛星の軌道の傾斜角と太陽同期軌道の傾斜角を考慮したためである．NAL が考案した DAS の形状は球殻付円筒であり、大きさは直径 1413 mm、平行部長さ 937 mm としている．また質量は 250 kg で、姿勢制御はスピン安定制御であった．ここではより軌道制御を精密に実現させるため、衛星の姿勢はガスジェットによる 3 軸制御を考えている．また軌道制御は機体の 3 軸の正・負方向に設置された推力 500 N のスラスタによって行うと仮定した．本研究で用いた DAS の機体と軌道の初期パラメータを第 1 表に示す．

燃料消費を最小とする軌道高度変換制御の評価関数を

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = m_{t_f} \quad (4.1)$$

とし、 J を最大になるように評価する．つまり軌道制御終了後の残留質量が最大であれば燃料消費が最小になる．以

第1表 衛星の機体と軌道の初期パラメーター

機体パラメーター	
初期質量	350 kg
形状	1×1×1 (m ³)
スラスタの推力	(±500) × (±500) × (±500) (N)
I_{sp}	313 s
初期軌道パラメーター	
離心率	0
軌道半径	6778.137 km
傾斜角	97.049°/55°/0°
接線速度	7.66856 km/s
周期 T_0	5553.63 s

下に具体的な定式を示す．

システム方程式：

$$\begin{cases} f_1 = V_x \\ f_2 = V_y \\ f_3 = V_z \\ f_4 = -\frac{\mu_e}{r^3} \left\{ 1 - \frac{3R_e^2}{2r^2} J_2 \left(5\frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \right\} x + (f_x + d_x)/m \\ f_5 = -\frac{\mu_e}{r^3} \left\{ 1 - \frac{3R_e^2}{2r^2} J_2 \left(5\frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \right\} y + (f_y + d_y)/m \\ f_6 = -\frac{\mu_e}{r^3} \left\{ 1 - \frac{3R_e^2}{2r^2} J_2 \left(5\frac{z^2}{r^2} - 3 \right) \right\} z + (f_z + d_z)/m \\ f_7 = \dot{m} = -k(|f_{xo}| + |f_{yo}| + |f_{zo}|) \end{cases} \quad (4.2)$$

ここで $k = 1/(g_0 I_{sp})$, $g_0 = 9.80665 \text{ m/s}^2$, I_{sp} は燃料の比推力である．

終端拘束条件：

$$\begin{cases} \Psi_1 = r - r_f = 0 \\ \Psi_2 = a - a_f = 0 \\ \Psi_3 = p - p_f = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

停止条件：

$$\Omega = t - t_f = 0 \quad (4.4)$$

状態変数：

$$\mathbf{x} = (x, y, z, V_x, V_y, V_z, m)^T \quad (4.5)$$

制御変数：

$$\mathbf{u} = (f_{xo}, f_{yo}, f_{zo})^T \quad (4.6)$$

実際の計算には基準化を施す．更に拘束条件をペナルティ関数として評価関数に導入する．すなわち

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] \\ &= \left[m - \frac{1}{2} k_r (r - r_f)^2 - \frac{1}{2} k_a (a - a_f)^2 - \frac{1}{2} k_p (p - p_f)^2 \right]_{t_f} \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここで k_r , k_a , k_p はペナルティ係数である．このようにす

ることによって, Ψ に関する計算が省略され, 計算全体が簡単になる． k_r , k_a , k_p の値を非常に大きくとることによって, 終端時間 t_f における r , a , p の値は r_f , a_f , p_f に近づく．すなわち終端拘束条件式を導入しなくても, 状態変数の終端時間における値が拘束できる． $r - r_f$, $a - a_f$, $p - p_f$ は 0 に限りなく近づけば,

$$\bar{J} = J = \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = m_{t_f} \quad (4.8)$$

になる．

計算には降下制御の部分と上昇制御の部分に分けて最適計算を行った．降下制御のときに

$$\begin{cases} r_f = 6478.137 \text{ km} \\ a_f = 6628.137 \text{ km} \\ p_f = 6624.747 \text{ km} \end{cases}$$

とした．これらは地球中心に対して遠地点高度 400 km ($r_a = 6778.137 \text{ km}$) , 近地点高度 100 km ($r_p = 6478.137 \text{ km}$) の楕円軌道のパラメーターである (軌道周期 $T_1 = 5370.30 \text{ s}$) . 上昇制御のときに初期値は降下制御の終端値として,

$$\begin{cases} r_f = 6778.137 \text{ km} \\ a_f = 6778.137 \text{ km} \\ p_f = 6778.137 \text{ km} \end{cases}$$

とした．停止時間は降下制御のときも上昇制御のときも, 楕円軌道の周期 T_1 の半分

$$t_f = T_1/2 = 2685 \text{ s}$$

とした．つまり降下制御において, 制御により開始から 2685 s 後, 終端拘束が満足されることによって DAS は高度 100 km へ降下する．同様に上昇制御において, 制御により開始から 2685 s 後, 終端拘束が満足されることによって DAS の軌道は高度 400 km の円軌道になる．重み関数 $W(t)$ を単位行列

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とした．積分計算には 4 次の Runge-Kutta-Gill 法を用いて, 積分間隔を 5 s とした．

傾斜角 97.049° の軌道面において, DAS を高度 400 km から 100 km へ降下させる最適な推力パターンの求め方を例とし, 収束判定法を示す．

衛星の軌道高度降下制御はスラスタを軌道面内で軌道速度を減少する接線方向に噴射することによって実現されることが周知である．本研究において円軌道では X_o 軸の正方向が衛星速度の方向と一致するため, ここでまず制御計算開始から 40 s 間 f_{xo} の値を -500 N とし与える．その後の時間では 0 とする． f_{yo} , f_{zo} の値は制御開始から最後まで 0 とする．この公称制御で計算した結果, $r - r_f = 87.99 \text{ km}$,

第 3 図 最適制御パターン

第 4 図 DAS の速度と軌道高度の履歴

$a - a_f = 44.048 \text{ km}$, $p - p_f = 45.746 \text{ km}$ となった．この後 k_r , k_a , k_p を調整し, SAMA を用いて収束するまで計算すると, $r - r_f = 0 \text{ km}$, $a - a_f = 0.018 \text{ km}$, $p - p_f = 0.087 \text{ km}$, $m_{tf} = 337.71 \text{ kg}$ となった．また 45 s から 1560 s まで f_{xo} は -10.052 N から -0.021 N の値になり, 1565 s から 2685 s まで 0.025 N から 6.051 N の値になった．次に f_{xo} の値を計算開始から 50 s 間 -500 N , 2680 s から 2685 s まで 500 N , 他の時間で 0 とし与える． f_{yo} , f_{zo} の値は制御開始から最後まで 0 とする．この公称制御を用いて収束するまで計算すると, $m_{tf} = 338.19 \text{ kg}$ となった．その後, 様々の公称制御を用いて計算し, 最終的に m_{tf} の最大値 338.263 kg となる最適制御パターンを得た．なお, 公称制御を変えるたびに計算が収束するように試行錯誤的に dp を変えている． dp は修正量 $\delta u(t)$ にノルムを与える．あまり dp を大きくとりすぎると計算が収束しなくなり, また dp が小さすぎれば修正の能率が悪くなる．本計算で最適解を得たときの dp は 0.01 であった．

最適計算結果を降下制御と上昇制御を合わせて第 3～8 図に示す．最適制御パターン (第 3 図) と速度と軌道高度の履歴 (第 4 図) を合わせて見ると次のことが分かる．まず遠地点付近で X_o 正方向のスラストが噴射すること (f_{xo} が負になる) によって衛星の速度が減少し, 衛星の高度が下がる．次に近地点付近で X_o 負方向のスラストが噴射し, 大気抵抗を克服して衛星の速度を増加させる．最後に X_o 負方向のスラストが噴射することによって速度を増加させ, 衛星を元の 400 km の円軌道に駐留させる．計算では f_{xo} の絶対値が最大値とならない場合があるが, 中間値の推力はスラストのデューティサイクルを調整して実現できる．この計算結果では衛星の最低点の高度は 99.886 km となっているが, 100 km との誤差が僅か 0.114% であり, 計

第 5 図 DAS の最適軌道

第 6 図 r , a , p の履歴

第 7 図 DAS の離心率の履歴

第 8 図 DAS の質量の履歴

算結果は十分実用的な精度と考える．なお, f_{yo} の絶対値は 0.001 N 以下であり, 実際の衛星の制御では無視してよい．また f_{zo} の絶対値は 0.244 N 以下なので, 軌道制御用のメインエンジンを用いず, 姿勢制御用の小推力のエンジンを用いれば必要な推力が得られる．

最適制御による衛星の軌道を第 5 図に示す．第 6 図にお

いて a, p の値は降下制御のときに急激に減少し、近地点付近で空気抵抗および制御外力の作用によって急激な変化が見られ、最後に遠地点で制御開始の値と同じになる。衛星の離心率 (第 7 図) は制御開始のときも制御終了のときも 0 であることが分かる。これは制御の前に衛星が円軌道で飛行しており、制御後も円軌道で飛行していることを意味する。衛星の質量 (第 8 図) はスラスターの噴射によって、遠地点付近および近地点付近で急激に減少していることが分かる。制御後の衛星の残留質量は 325.694 kg である。つまり燃料消費は 24.306 kg で衛星の初期質量の 6.945% になる。この衛星を用いて同様の制御をもう 1 回実行すると、燃料消費は残留質量の 6.945%, 22.618 kg となる。従って衛星の初期質量の 50% が燃料であれば、同様な制御を 9 回実行することができる。

軌道傾斜角 55° と 0° の場合の計算結果は軌道経路以外は傾斜角 97.049° の場合と似たようなものである。ここでは図を省略する。燃料消費は傾斜角 55° の場合 24.763 kg、傾斜角 0° の場合 24.982 kg である。これらの燃料消費は傾斜角 97.049° の場合より高いことが分かる。それは赤道上の点を除いて r が同じであっても、傾斜角 97.049° の軌道面上の点の高度が最も高く、空気の密度が最も小さいため、空気の抵抗力が最も少ないからである。また、軌道傾斜角 0° の場合、軌道面上の点の高度が最も低く空気の抵抗力も最も大きい、よって燃料消費は最大になる。

4.2 ホーマン遷移と空気抵抗を無視した最適制御 前節の結果と比較するために軌道傾斜角 97.049° の軌道面において、ホーマン遷移および空気抵抗を無視した場合の最適制御の計算を行った。ホーマン遷移の場合は最適計算ではなく、単なるシミュレーション (積分間隔を 1 s) で計算した。また、空気抵抗を無視した場合の最適制御計算は、空気の抵抗力を 0 とした以外は前節の諸条件と同じである。計算結果を第 9 ~ 12 図に示す。

ホーマン遷移の燃料消費は 23.467 kg である。これは最適軌道変換制御の燃料消費 24.306 kg より 0.839 kg 少ないことが分かる。燃料損失の原因は 2 つあると考えられる。(1) 最適軌道変換制御の場合、最低点の高度は 99.886 km となったため、100 km より下がった分空気抵抗が大きくなり、それを克服するため余分な燃料が使われた。(2) ホーマン遷移と異なり有限の推力で行う最適軌道変換制御の推力の方向は、速度の接線方向と完全に一致していないので、軌道変換に必要な運動量を提供するため、燃料が多く使われた。空気抵抗を無視した場合の最適推力パターン (第 11 図) は、近地点付近で推力 f_{x0} の値が 0 となっており、スラスターの噴射は必要としないことが分かる。また、この場合の燃料消費は 21.555 kg となる。これは空気抵抗に費やす燃料は 2.751 kg であることを意味する。

4.3 軌道面と高度の同時変換 DAS を用いて被災地を観測するとき、DAS の軌道面付近に被災地が現れなければ詳細な情報を得ることはできない。そのような場合 DAS の軌道を被災地に合わせるため、軌道面の変換が必要になるかもしれない。ここでは軌道傾斜角 0° から 2° への軌道面

第 9 図 ホーマン遷移の推力パターン

第 10 図 ホーマン遷移の質量履歴

第 11 図 最適推力パターン (空気抵抗無視)

第 12 図 DAS の質量履歴 (空気抵抗無視)

変換と、高度 400 km と 100 km 間の高度変換を合わせて最小の燃料消費で実現する最適制御の計算について説明する。この場合の評価関数は

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] \\ &= \left[m - \frac{1}{2} k_r (r - r_f)^2 - \frac{1}{2} k_a (a - a_f)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} k_p (p - p_f)^2 - k_i (i - i_f)^2 \right]_{t_f} \end{aligned} \quad (4.9)$$

第 13 図 最適推力パターン

第 16 図 質量および軌道傾斜角の履歴

第 14 図 DAS の速度と軌道高度の履歴

第 15 図 r, a, p の履歴

となる．計算の前半部分においては

$$\begin{cases} r_f = 6478.137 \text{ km} \\ a_f = 6628.137 \text{ km} \\ p_f = 6624.747 \text{ km} \\ i_f = 2^\circ \end{cases}$$

とした．停止時間は T_1 の半分とする場合，最適軌道の近地点は単なる高度変換の近地点とあまり変わらないため，ここで DAS が地球の中心に対して $3/4$ 周を回る時間 $t_f = T_0/4 + T_1/2 = 4075 \text{ s}$ を停止時間とした．計算の後半部分においては

$$\begin{cases} r_f = 6778.137 \text{ km} \\ a_f = 6778.137 \text{ km} \\ p_f = 6778.137 \text{ km} \\ i_f = 2^\circ \end{cases}$$

とし，停止時間を $t_f = 2685 \text{ s}$ とした．

最適計算結果を第 13～17 図に示す．最適推力パターン（第 13 図）から分かるように， f_{y0} の値は長い時間負の最

第 17 図 DAS の最適軌道

大値となっている．つまり， Y_o 軸正方向のスラストは長時間噴射する必要がある．この噴射は軌道傾斜角の増加をもたらす．衛星の高度および速度の履歴（第 14 図）から分かるように，軌道面変換は軌道の高度および速度に対する影響が少ない．軌道面変換は r, a, p （第 15 図）に対する影響も少ないことが分かる．質量および軌道傾斜角の履歴（第 16 図）から傾斜角は目標とする 2° になっていることが分かる．一方，軌道面変換は衛星質量の急激減少を生じる．この場合の燃料消費は 52.706 kg となり，衛星の初期質量の 15.059% にも達する．即ち，衛星の初期質量の半分は燃料だとしても，同様な制御を 4 回しか実行できない．また，軌道面変換を行うと衛星は元の軌道面から離れてしまい，定常の観測機能が失われる．よって特に必要でない限り軌道面変換を行わない方が良いと考えられる．

実用上は複数の DAS を用いてコンステレーションを形成し，観測を実行する．DAS のコンステレーションは 6 つの極軌道面によって構成される（仮定）としよう．ある t_0 のときに某 A 地域で自然災害が発生したことが分かり，この地域の詳細な情報が必要な場合， t_0 の後 24 時間以内に A 点が描いた軌跡の線は必ずコンステレーションの軌道面と 12 回交差する（地球が自転しているため）．その交差する時間 t_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) も交差点も明らかである．われわれはコンステレーションの中から適切な DAS を選んで t_i の前から降下させ， t_i のときに交差点の上空近距離へ到達させる制御を行えば，期待する観測精度が得られる．

5. 結 論

本研究は DAS の降下および再上昇できる能力を利用し、被災地を近距離で観測する方法を提案した。DAS の軌道変換を燃料消費最小問題として定式化し、SAMA を用いて最適解を求めた。

具体的には傾斜角 97.049° 、 55° 、 0° の軌道面において、軌道高度 400 km と 100 km 間の高度変換の最適計算を行った。高度変換には f_{xo} が主な役を果たすことが分かった。近地点付近で空気抵抗を克服するため、スラスタを噴射する必要がある。3 ケースの高度変換において傾斜角 0° の場合が最も燃料消費が多い。初期衛星質量の半分为燃料であると仮定すると、高度変換が 9 回実行できる (傾斜角 0° の場合、9 回高度変換の燃料消費は初期衛星質量の 48.648% である)。本計算と比較のためホームマン遷移と空気抵抗を無視した場合の最適制御の計算を行った。最適制御の燃料消費はホームマン遷移の燃料消費より 0.839 kg 多いこと、空気抵抗を打ち消すため 2.751 kg の燃料が消費されることが分かった。

高度変換 (400 km と 100 km の間) と軌道面変換 (0° から 2° まで) を合わせた軌道変換制御計算を行った。その結果僅か 2° の軌道面を変えるため、スラスタを長時間噴射しなければならず、多くの燃料を消費するため、特に必要でない限り軌道変換を実行するべきではないことが分かった。また実用上の観測方法の一案を示した。

参 考 文 献

- 1) DAS Study Group: Preliminary Study on Dive and Ascent Satellite, DAS, Technical Report of National Aerospace Laboratory, TR-528, 1982.
- 2) Otsubo, K., Gaodai, T. and Nagasu, H.: Preliminary Trajectory Analysis for the Lowest-Flying Earth Satellite, DAS, Technical Report of National Aerospace Laboratory, TR-507, 1977.
- 3) Fu, T. and Imado, F.: A Basic Study on the Optimal Trajectory Control of a Dive and Ascent Satellite, Proceedings of SICE Annual Conference 2005, TA2-12-1, 2005, pp. 2255–2260.
- 4) 付 天爽, 今度史昭: Dive and Ascent 観測衛星の最適制御に関する研究, 第 21 回誘導制御シンポジウム論文集, 2004, pp. 71–78.
- 5) 国立天文台: 理科年表, 丸善株式会社, 東京, 2006, pp. 559–560.
- 6) Imado, F.: A Study on the Spacecraft Nonlinear Optimal Orbit Control with Low-Thrusts, Proceedings of ICNPAA, 1998, pp. 287–296.
- 7) 富田信之: 宇宙システム入門, 東京大学出版会, 東京, 2000, pp. 48–50.
- 8) Takeuchi, S.: Theory of the Orbital Motion of an Artificial Earth Satellite, Technical Report of National Aerospace Laboratory, TR-807, 1984.
- 9) Takeuchi, S.: Atmospheric Drag Effects on the Motion of an Artificial Earth Satellite, Technical Report of National Aerospace Laboratory, TR-748, 1982.
- 10) Bryson Jr, A. E. and Denham, W. F.: A Steepest Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems, J. Appl. Mech., **29** (1962), pp. 247–257.