ゴアを用いた擬似回転パラボラ面の形状評価について^{*1}

Surface Error Estimation of Pseudo-Parabolic Surface Made by Using Gore Membranes

長 田 知 子^{*2,*3}・石 田 良 平^{*4}

Tomoko NAGATA and Ryohei ISHIDA

Key Words: Space Engineering, Inflatable Parabolic Reflector, Surface Error

Abstract: In this paper, we describe the surface error of pseudo-parabolic surface, to construct an inflatable parabolic reflector. The gore sheet is generated by cutting the three-dimensional parabolic surface. A scheme of generating the gore sheet is described, and the rms surface error between the parabolic surface and the three-dimensional shape composed of the gore sheets is proposed and formulated. The rms surface error between the parabolic surface and the shape produced by pressurizing the circular membrane is also formulated. Finally, the possibility that the parabolic reflector composed of the gore sheets has high surface accuracy is shown.

1. は じ め に

近年、宇宙における膜構造の利用に関連して、インフレータブル膜構造のリフレクターへの応用が考えられている。そのため、インフレータブル膜の形状解析や形状制御が重要な課題になっており、膜面の精度評価と形状制御に関する研究が Jenkins and Marker¹⁾ によってなされている。Jenkinsらは、Henckyの解²⁾を用い、膜面をパラボラ形状に近づけるための制御方法についての基礎的な考察を行っている。

圧力負荷を受ける円形膜の変形解析においては、円板の大たわみ解析が重要であるが、円板の大たわみ問題の解としては、近年、Sheplak and Dugundji³⁾によって定式化された。彼らは初期面内力が作用している周辺固定板に圧力が作用する場合について定式化を行い、差分法を用いて解いている。石田⁴⁾は、インフレータブルパラボラリフレクタの形状解析を目的として、有限変形理論を用いて円板面に圧力負荷を受ける円板の大たわみ理論を使って、圧力とたわみとの関係や、たわみとパラボラ形状との形状誤差と圧力との関係などを明らかにし、膜のたわみ形状が最もパラボラ形状に近くなる圧力範囲が存在することを示した。また、石田・河田⁵⁾は、半径方向の初期面内力が膜のたわみ形状に与える効果について考察し、初期面内力を負荷した状態でも膜のたわみ形状とパラボラ形状との形状誤差の改善は限定的であることを示した。

本論文では、インフレータブルパラボラリフレクタの生成を念頭において、回転パラボラ面を立体裁断して生成し

た複数のゴアによって構成される擬似回転パラボラ面の形状評価について述べる。まず、ゴアの生成法の一つについて述べ、生成されたゴアを接合した場合に形成される擬似回転パラボラ面について予測される形状誤差の簡易評価法を提案する。簡易評価法においては、膜面にうねりを生ずるものとする。次に、円形膜を加圧膨張させて得られる形状とパラボラ形状との誤差について述べる。最後に、数値計算によりゴアを接合して得られる面の回転パラボラ面に対する形状誤差を求め、円形膜を加圧した場合に得られる形状のそれと比較することによって、ゴアの利用によるリフレクタ面が高い形状精度を持つ可能性を示す。なお、ゴアの製作および接合は理想的に行われるものと仮定し、接合に伴う剛性の増加などはないものとする。

2. ゴアの設計と形状誤差

平面円形膜の膜面に圧力を加えて得られる形状は回転パラボラ面とは異なる。加圧展開後の形状を可能な限り回転パラボラ面に近づける方法の一つとして、回転パラボラ面を複数の平面図形に展開してつなぎ合わせて曲面を生成することが考えられる。ここでは、回転パラボラ面を平面図形に展開する方法の一つについて述べる。このような図形を型として作られた膜片をゴアと呼ぶ。さらに、ゴアをつなぎ合わせて得られる最終形状に対する形状誤差の評価法について述べる。

2.1 ゴアの設計 第1図に示すような回転パラボラ面を平面図形に展開する方法はいくつか考えられるが、本論文では次のような方法を採用する。

1. 回転パラボラ面の回転軸に垂直な2枚の平面で切断する。得られる形状を第2図に示す。なお、回転軸を z 軸とする。

^{*1} © 2007 日本航空宇宙学会
平成18年7月12日原稿受理

^{*2} 大阪府立大学大学院

^{*3} 現(株)日立製作所

^{*4} 大阪府立大学工学研究科

第1図 回転パラボラ面

第2図 z 軸に垂直な2平面で切断された面

2. 円周方向に M 等分し, 平面上に展開する. このとき, 第3図に示すような図形 $aebcfd$ (第2図の $aebcfd$ に対応) が得られる.

3. ステップ2で得られた形状を順次平面上に並べて接続する.

ステップ1で得られた形状の円周長さは $2\pi r_{n-1}$ と $2\pi r_n$ で与えられる. この図形の稜線の長さを S_n とすると, 第3図に示した諸量 ψ_n , R_{n1} , R_{n2} および x_n は次式で与えられる.

$$\psi_n = \frac{\pi}{M} \frac{r_n - r_{n-1}}{S_n} \quad (1)$$

$$R_{n1} = \frac{r_{n-1}}{r_n - r_{n-1}} S_n \quad (2)$$

$$R_{n2} = R_{n1} + S_n \quad (3)$$

$$x_n = R_{n1} - \sum_{i=1}^{n-1} S_i \quad (4)$$

第3図からわかるように, 弧 aeb と弧 $a'eb'$ との間に隙

第3図 ゴア作成の概略図

第4図 生成されたゴア膜の形状

間が生ずる. 曲面生成時に弧 aeb と弧 $a'eb'$ を接合するように作れば, 最終的に得られる曲面形状は回転パラボラ面に非常に近い曲面が生成される. しかし, 後で述べるように, 隙間の間隔の総和が稜線の長さに対して短く, a と a' との間隔も狭いので, 製作コストを抑える観点から, この隙間を無視して図の実線で表される外形線に沿って切断すると最終的に1枚のシートを作ることができる. このようなシートをゴアと呼ぶ. 一例として, 開口径が $D = 500$ [mm], 最大深さが $w_p(0) = 30$ [mm] の回転パラボラ面に対して, $M = 8$ とした場合に得られるゴアの形状を第4図に示す.

この図で, $0B$ の長さは回転パラボラ面の稜線 (第1図の $0B$ に対応) の長さに等しい. しかし, 上に述べた手順からわかるように, 弧 $0A$ の長さは回転パラボラ面の稜線のそれよりわずかに長い. 第4図の場合, $0A - 0B = 0.30$ [mm] であるが, すべてのゴアを接合したとき, このわずかの差が形状誤差の原因となる. 試作した擬似回転パラボラ面のゴア接合部の様子を参考として第5図に示す. この図から接合部 (左下から右上へ走る線近傍) でうねりが観察され, その原因は $0B$ と $0A$ の長さの差であることが想像される. なお, この試作では8枚のゴアをテープを用いて接合しているため, 若干の剛性の増加がある.

2.2 形状誤差の評価 すべてのゴアを接合したとき, 第4図の 0 は z 軸上にあり, 円弧 AB は開口円の一部となる. 一方, $0A > 0B$ なので, 差 $0A - 0B$ は第5図に示したようなうねりとなって現れる. このうねりについて, 次の仮

第5図 ゴア接合部に観察されるうねり

第6図 圧力負荷を受ける円形平面膜

定をおく．接合後，

1. うねりは稜線上に規則性を持った波として生ずる．このとき，弧 0A の長さは稜線上のうねりの長さに等しい．

2. 稜線 0B を基準にとった円周方向の角度を ϕ とし，ゴア中央を基準としたうねりの周方向変化を $a(\phi) = a_0|\phi|/\phi_0$ ($-\phi_0 \leq \phi \leq \phi_0$) で表す．ただし， $\phi_0 = \pi/M$ であり，この角度は接合後 0B と 0A がなす角である．

3. うねりは合体も分離もしない．

仮定 1 に基づいて，うねりの分布として次のような関数を考える．

$$f_i(\phi, x) = a_i(\phi)b_i(x) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

ここで， $a_i(\phi) = a_{i0}|\phi|/\phi_0$ であり，関数 $b_i(x)$ は， m を整数として，

$$\text{Case 1: } b_1(x) = \sin \frac{2m\pi x}{l_0} \quad (6)$$

$$\text{Case 2: } b_2(x) = \sin \frac{\pi x}{l_0} \sin \frac{2m\pi x}{l_0} \quad (7)$$

$$\text{Case 3: } b_3(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l_0} \right) \sin \frac{2m\pi x}{l_0} \quad (8)$$

の 3 種類を考える．ここで， l_0 は稜線 0B の長さ， x は回転軸から稜線に沿ってとった座標であり，次式で定義される．

$$x = \frac{c}{2} \left[\bar{r} \sqrt{1 + \bar{r}^2} + \log \left(\bar{r} + \sqrt{1 + \bar{r}^2} \right) \right] \quad (9)$$

ただし， $\bar{r} = r/c$ ， $c = a^2/(2w_p(0))$ であり， $w_p(0)$ はパラボラの深さである．また， $a_i(\phi)$ は角度 ϕ の関数である．

Case 1 では，振幅 $a_1(\phi)$ の正弦波状のうねりがあると考ええる．Case 2 および Case 3 では，正弦波のうねりの振幅の最大値が $x = l_0/2$ にある場合である．

式 (5) を用いると，弧 0A の長さ l は， $a_{i0} = a_i(\phi_0)$ とし，次式で表される．

$$l = \int_0^{l_0} \sqrt{1 + a_{i0}^2 \left[\frac{db_i(x)}{dx} \right]^2} dx \quad (10)$$

式 (10) から未知量 a_{i0} を求めることができる．

うねりを考慮した形状 $w(r, \phi)$ は次式で近似される．

$$w(r, \phi) = w_p(0) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + f_i(\phi, x) \quad (11)$$

式 (11) で，第 1 項は深さが $w_p(0)$ のパラボラ形状であり，第 2 項はうねりを表す．

形状誤差 Σ は， $w_p(r)$ をパラボラ形状として，

$$\Sigma = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a (w_p(r) - w(r, \phi))^2 r dr d\phi} \quad (12)$$

と表される．式 (11) を代入し，ゴアの対称性を考慮すると，式 (12) は

$$\Sigma_i = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi/M} \int_0^a f_i^2(\phi, x) r dr d\phi} \quad (13)$$

となる．式 (10) から得られる a_{i0} を用いると，仮定 2 と 3 より， $a_i(\phi) = a_{i0}|\phi|/\phi_0$ と表すことができるから，式 (13) の形状誤差は最終的に次式のように得られる．

$$\Sigma_i = \frac{a_{i0}}{a} \sqrt{\frac{2}{3} \int_0^a b_i(x)^2 r dr} \quad (14)$$

2.3 Hencky の形状の形状誤差 うねりを考慮した形状誤差 Σ_i と比較するために，ここでは，Hencky の形状の回転パラボラ面に対する形状誤差を求めておく．

2.3.1 Hencky の解 円形膜の膜面が圧力負荷を受ける場合のたわみ形状は Hencky²⁾ によって求められており，後に Campbell⁶⁾ によって修正された．まず，Hencky の解についてここで簡単にまとめておく．

いま，第 6 図に示すような半径 a ，厚さ h の円形膜が圧力負荷 p_0 を受けているものとする．Hencky の膜の解が満足する基礎方程式は，無次元表示で次式のように表される．

$$2S_r \frac{dW_H}{d\xi} = -P\xi \quad (15)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^3 \frac{dS_r}{d\xi} \right) + \frac{1}{2} \xi \left(\frac{dW_H}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad (16)$$

式 (15) と (16) で用いた無次元量は次式で定義される．

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r}{a}, & W_H &= \frac{w_H}{h}, \\ S_r &= \frac{N_r a^2}{E h^3}, & P &= \frac{p_0 a^4}{E h^4} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで， r は半径座標， W_H はたわみ， h は膜の厚さ， N_r

は膜に生ずる半径方向面内力, E はヤング率である.

境界条件は次式のように無次元表示される.

$$\xi = 0; \quad \frac{dW_H}{d\xi} = 0 \quad (18)$$

$$\xi = 0; \quad \frac{dS_r}{d\xi} = 0 \quad (19)$$

$$\xi = 1; \quad \frac{dS_r}{d\xi} + (1 - \nu)S_r = 0 \quad (20)$$

ただし, ν はポアソン比である.

これらの式系を満足する解は次式で表される.

$$W_H = P^{1/3} \sum_{i=0}^5 A_{2i} (1 - \xi^{2i+2}) \quad (21)$$

$$S_r = \frac{1}{4} P^{2/3} \sum_{i=0}^5 B_{2i} \xi^{2i} \quad (22)$$

式 (21) と (22) は膜中心での境界条件式 (18) と (19) を満足する. 係数 A_{2i} と B_{2i} は微分方程式と式 (20) を用いることによって決定される. 係数の決定過程は省略するが, これらの係数はポアソン比のみに依存し, 圧力やその他の物性値などはすべて P に含まれる.

2.3.2 形状誤差 形状 $w(r, \theta)$ の回転パラボラ面 $w_p(r)$ に対する形状誤差 Σ は式 (12) で定義される. いま考えている問題は軸対称問題なので, 式 (12) は次式のように変形される.

$$\Sigma = \sqrt{\frac{2}{a^2} \int_0^a (w_p - w)^2 r dr} \quad (23)$$

ここで, パラボラ形状 w_p は式 (11) の右辺第 1 項で表され, 深さを $w_p(0)$ として, 次式で表される.

$$w_p = w_p(0)(1 - \xi^2) \quad (24)$$

膜の最大たわみがパラボラの深さ $w_p(0)$ に等しいとき, 式 (17) の W_H の定義から実たわみ w_H は $w_H = hW_H$ であることを考慮して,

$$w_H(0) = w_p(0) = hP^{1/3} \sum_{i=0}^5 A_{2i} \quad (25)$$

とおいて, 式 (21) を

$$\bar{W}_H(\xi) = W_H(\xi) \left/ \left[P^{1/3} \sum_{i=0}^5 A_{2i} \right] \right. \quad (26)$$

と書きなおすと, 式 (23) は

$$\Sigma_H = w_p(0) \sqrt{2 \int_0^1 [W_p(\xi) - \bar{W}_H(\xi)]^2 \xi d\xi} \quad (27)$$

となる. なお, $W_p(\xi)$ は次式で表される.

$$W_p(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (28)$$

一方, 膜の変形形状に対して Σ_H を最小にするパラボラ形状 w'_p を定義することができる. この問題は, 形状を

$$w'_p = w'_p(0)W_p(\xi) \quad (29)$$

で表し, $k = w'_p(0)/w_p(0)$ として,

$$I = \int_0^1 [kW_p(\xi) - \bar{W}_H(\xi)]^2 \xi d\xi \quad (30)$$

を最小化する k を決定する問題に帰着される. 式 (30) を k で微分して零におくことにより, k は次式のように得られる.

$$k = \frac{\int_0^1 W_p(\xi) \bar{W}_H(\xi) \xi d\xi}{\int_0^1 W_p(\xi)^2 \xi d\xi} \quad (31)$$

このとき, $w'_p(r)$ の形状誤差 Σ'_H は次式のように定義される.

$$\Sigma'_H = w_p(0) \sqrt{2 \int_0^1 [kW_p(\xi) - \bar{W}_H(\xi)]^2 \xi d\xi} \quad (32)$$

式 (21) で表される膜の変形形状 W_H , パラボラ形状 W_p およびそれらの差 $W_p - W_H$ を第 7 図に示し, パラボラ形状 W'_p およびそれらの差 $W'_p - W_H$ を第 8 図に示す. なお,

第 7 図 パラボラ形状 W_p , Hencky の形状 W_H およびそれらの差 $W_p - W_H$

第 8 図 パラボラ形状 W'_p , Hencky の形状 W_H およびそれらの差 $W'_p - W_H$

ポアソン比を $\nu = 0.3$ とし, W_H の計算は式 (26) による.

第 7 図から, 明らかにパラボラ形状と膜の変形形状との間に差がみられる. 一点鎖線で表した差 $W_p - W_H$ は, Hencky Curve Distortion または W-Curve Distortion と呼ばれる¹⁾. 第 8 図の形状 W'_p は W_p より深い回転パラボラ面となり, 本例の条件 ($\nu = 0.3$) の場合, $k = w'_p(0)/w_p(0) = 1.031$ である.

3. 形状誤差の計算例

3.1 Hencky の形状 式 (27) と (32) から Hencky の形状の形状誤差を求めると, ポアソン比 $\nu = 0.3$ の場合

$$\Sigma_H = 0.02336w_p(0) \quad (33)$$

となる. また, Σ_H は $k = w'_p(0)/w_p(0) = 1.031$ のとき最小になり, この最小値 Σ'_H は

$$\Sigma'_H = 0.01493w_p(0) \quad (34)$$

となる. いずれの形状誤差も開口径には無関係で, パラボラの深さのみに依存する.

3.2 ゴアを接合した形状 まず, 仮定 2 の妥当性を検証するため, 種々の ϕ_0 について a_{i0} を計算した. 一例として, $m = 10$ の場合の計算結果を第 9 図に示す. この図から, Case 1~3 のすべてについて ϕ_0 と a_{i0} は比例関係にあることがわかり, 仮定 2 は妥当であることがわかる.

次に, うねりの分布関数の違いの形状誤差に与える影響を調べた. Case 1~3 の場合について, $D = 2a = 500$ [mm], $w_p(0) = 30$ [mm], $M = 8$, $m = 10$ とした場合の形状誤差は,

$$\Sigma_1 = 0.113$$
 [mm]

$$\Sigma_2 = 0.114$$
 [mm]

$$\Sigma_3 = 0.114$$
 [mm]

となり, 仮定したうねりの分布関数に関係なくほぼ一定である. 以下では, Case 2 の分布関数の場合について数値計算結果を示す.

Case 2 について, ゴアの枚数が $M = 6, 8, 12$ の場合の形

第 9 図 ϕ_0 の変化に対する a_{i0} の変化 ($D = 500$ [mm], $w_p(0) = 30$ [mm])

状誤差 Σ_2 を第 10 図に示す. なお, 開口径 $D = 500$ [mm], $w_p(0) = 30$ [mm] とした. なお, この形状は焦点距離が $f \approx 520$ [mm] の回転パラボラ面に相当する. 第 10 図で, 横軸は稜線に沿って分布するうねりの山 (または谷) の数である. 同図に, 式 (33) および (34) から計算される形状誤差 $\Sigma_H = 0.701$ [mm] および $\Sigma'_H = 0.448$ [mm] も図中に示している. これらの図から, うねりが多くなるにしたがって形状誤差は減少することがわかる. これは, うねりが多くなると, 一定の弧 $0A$ の長さに対してうねりの振幅が小さくなるためである. また, ゴアの数が増加すると, 同じうねりの数に対して形状誤差は小さくなる. これは, ゴアの数が多くなると $0B - 0A$ が小さくなることによる.

3.3 大口径膜面の形状誤差 以上の解析を大口径膜面の形状誤差の予測に適用する. 適用する大口径膜面として, $D = 2a = 10$ [m], $w_p(0) = 650$ [mm] を考える. この場合の焦点距離は $f = 9.62$ [m] である. このときの, Hencky の形状の形状誤差は,

$$\Sigma_H = 15.18$$
 [mm], $\Sigma'_H = 9.70$ [mm]

となる. 第 11 図に, M と m が変化したときの形状誤差 Σ_2 の変化を示す.

円形膜を加圧展開して得られる形状を回転パラボラ面の代わりに用いる場合, よい場合でも $\Sigma'_H = 9.70$ [mm] となる. 一方, ゴアを接合して得られる形状を回転パラボラ面

第 10 図 M と m が変化したときの形状誤差 Σ_2 の変化 ($D = 500$ [mm], $w_p(0) = 30$ [mm])

第 11 図 M と m が変化したときの形状誤差 Σ_2 の変化 ($D = 10$ [m], $w_p(0) = 650$ [mm])

の代わりに用いる場合、ゴアの枚数を十分増やす必要があることがわかる。ゴアの枚数 $M = 14$ で、稜線に沿って分布するうねりの山 (または谷) の数 $m = 14$ 以上であれば、 $\Sigma_2 < 1$ [mm] となることがわかる。 m の値がどの程度であるかを算定することは現在のところ困難であるが、第 5 図に示したモデルでは、うねりの数は 25 以上観測されている。開口径 10 [m] の場合、 $m = 14$ ということは考えられず、 m は大きくなることが予想される。

m が大きくなると予想される理由は次のようである。ゴアは薄い膜材料で作られるため、ゴアを接合しただけでは形状は定まらない。しかし、反射膜とキャノピーを開口円周上で固定した二重膜構造をとる場合、宇宙空間ではわずかな気体圧力を加えることによって、稜線 0B に沿った方向に張力が発生すると同時に円周方向にも張力を生じ、これらの張力が形状を定める。一方、0A 近傍は圧力負荷によって膨張しようとするが、ゴアの作成過程からわかるように、接合後の円周長さは元の回転パラボラ面の円周長さに等しいので、この膨張は円周方向張力によって妨げられ、結果として 0A 近傍にうねりを生ずる。また、円周方向に発生した張力はうねりの最大振幅を小さくするように作用し、0B - 0A が一定であれば、うねりの波長は短くなり、結果としてうねりの数は多くなると考えられる。

実際の製作上の問題であるが、開口径 10 [m] の膜面を作成するために幅 2 [m] のシートを用いる場合、必要なゴアの数 $M = 16$ と算出される。この場合、 $M \geq 14$ の条件は達成され、 $\Sigma < 1$ [mm] 程度の膜面を作ることが可能であると考えられる。実際、 $M = 16$ 、 $m = 40$ と仮定すると、

$$\Sigma_1 = 0.245 \text{ [mm]}$$

$$\Sigma_2 = 0.246 \text{ [mm]}$$

$$\Sigma_3 = 0.246 \text{ [mm]}$$

となる。この場合、円形膜を加圧展開した形状と擬似回転

パラボラ面を用いた場合に考えられる適用可能な波長は、 λ を波長として $\lambda/\Sigma < 1/50$ を限界として考えると、円形膜の場合、 $\Sigma'_H = 9.70$ [mm] なので、 $\lambda > 485$ [mm] (周波数: 618 [MHz] 以下) である。一方、擬似回転パラボラ面の場合、 $\Sigma_2 = 0.246$ [mm] とすると、 $\lambda > 12.3$ [mm] (周波数: 24.4 [GHz] 以下) となる。

4. 結 論

本論文では、インフレータブルパラボラリフレクタの生成を念頭において、ゴアの生成法の一つを述べ、ゴアを接合した場合に予測される形状誤差の簡易評価法を提案した。

形状誤差の簡易評価については、ゴアの接合部と稜線との長さの差がうねりを生ずると仮定し、3 種類のうねりの分布を想定した。さらに、数値計算によりゴアを接合して得られる面の回転パラボラ面に対する形状誤差を求め、円形膜を加圧した場合に得られる形状のそれと比較した。その結果、ゴアを用いて生成された膜面の形状誤差は小さく抑えられることを示した。

参 考 文 献

- 1) Jenkins, C. H. and Marker, D. K.: Surface Precision of Inflatable Membrane Reflectors, Trans. ASME, J. Solar Energy Eng., **120** (1998), pp. 298-305.
- 2) Hencky, H.: Über den Spannungszustand in kreisrunden Platten mit verschwindender Biegesteifigkeit, Z. Math. Phys., **63** (1915), pp. 311-317.
- 3) Sheplak, M. and Dugundji, J.: Large Deflections of Clamped Circular Plates under Initial Tension and Transitions to Membrane Behavior, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **65** (1998), pp. 107-115.
- 4) 石田良平: 円形膜の解析とインフレータブルリフレクタへの応用, 日本機械学会論文集 A 編, **69** (2003), pp. 1789-1794.
- 5) 石田良平, 河田俊行: 圧力負荷を受ける円板の大たわみ解析, 日本機械学会論文集 A 編, **71** (2005), pp. 30-35.
- 6) Campbell, J. D.: On the Theory of Initially Tensioned Circular Membranes Subjected to Uniform Pressure, Q. J. Mech. Appl. Math., **9** (1956), pp. 84-93.