噴射液の自己不安定化機構の理論的研究^{*1}

第2報：分断フィードバックループ

Self-Destabilizing Mechanism of Circular Liquid Jet
Second Report: Proposal of Breakup Feedback Loop Model梅 村 章^{*2}
Akira UMEMURA

Key Words: Liquid Atomization, Circular Liquid Jet, Instability, Capillary Wave

Abstract: Disintegration mechanism through a liquid-phase feedback loop is explored for a circular liquid jet issued into an otherwise quiescent gas. An asymptotic analysis of capillary waves radiating from the liquid jet tip is used to derive analytical expression for the feed back loop for the regular axisymmetric liquid jet disintegration occurring at a large distance from the nozzle exit for various Weber numbers. The calculation results predict the breakup characteristics which are consistent with the experimental observations. The role of turbulence contained in the issued jet and the change in atomization feature at large Weber numbers are also discussed briefly.

1. はじめに

従来の微粒化理論は基本的にレーリーの理論¹⁾に準拠して液滴の生成を記述している。しかし、乱流微粒化において液滴が作られるときの条件は、液系半径と気液速度差に基づいた気体ウェーバー数の値が $O(1)$ になるときであり、レーリーの理論が妥当なウェーバー数になる前に液系の分断が起きていると考えられる²⁾。さらに、レーリーの理論は無限に長い液柱の安定性を論じたものであり、噴射液や乱流微粒化過程で現れる液系のように端を持った液柱で起きる分断との関連性はつまびらかでない。

そこで、前報³⁾では噴射液の分断を導く不安定化要因をモデル計算によって調べた。それより以下の事柄があらわになった。(1) 噴射液が分断すると、新たに生成された噴射液の先端部に働く表面張力によって、噴射液がノズル方向に収縮し、その際、表面張力波が上流に放射される。そのため、噴射液は表面に凸凹がある状態(場所によって程度は違うが)になっている。(2) 噴射液表面の凸凹の存在は、噴射液と周囲気体との間に相対速度があるとき、凸凹に対応して変化するガス圧の作用を生み、相対速度に基づいた気体ウェーバー数が $O(1)$ 以上の値になると、一部の表面張力波を不安定波に転化させ、下流に流下する不安定波を形成する。また、(3) ノズルに到達した短波長の表面張力波は、ノズル出口で反射する際にドップラーシフトを起こし、波長が長くなって不安定波に転化する。すなわち、

表面張力の存在によって分断端の生成に基づき自然に不安定波が作られることがあらわになった点が重要である。

これらの知見から直ちに以下の事柄が推論される。すなわち、噴射液の分断によって発生した上流伝播表面張力波から転化した不安定波が、後続の分断を引き起こすようになっていけば、フィードバックループが完成し、噴射液は自ら不安定化して分断するサイクルを繰り返すことになる。しかし、分断によって作られる波が不安定化する位置に達するまでには時間を要するので、このサイクルが分断ごとに閉じているとは限らない。また、噴射液には種々の波長の波が存在するために、幾つかの表面張力波が重なって局所的に円周表面張力が母線表面張力の効果を上回るようになると、そこで液柱の分断が起きることもある。実際の現象では、これらの過程が複雑に関連して起きるため、噴射液の分断現象は不可避免的に統計的な性格を持つものになる。

本論文では、比較的規則的な分断を繰り返す噴射条件を対象にして、簡単な解析モデルによって上述のフィードバックループの考え方の有効性を示し、噴射液の自己不安定化機構の基本的な物理像をあらわにすることにした。勿論、噴射液を乱す要因は他にもある。上述の液相ルートに加えて、ガス相を通したフィードバックループも考えることができるが、この効果は気液密度比が小さいときには重要でない。また、本研究では層流噴射液の自己不安定化について考えるが、乱流噴射では元々乱れを持っている。しかし、噴射液が内蔵する乱れは、軸対称な表面変形で波長を長くする働きは弱いのので、噴射液から微細な液系を形成するには役立っても、分断に繋がる不安定波を液系に励起する主要な原因にはなりえないと思われる。

^{*1} © 2007 日本航空宇宙学会

平成 18 年 4 月 6 日原稿受理

^{*2} 名古屋大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻

2. 問題の定式化

前報と同様、静止気体中に半径 a のノズルから速度 V で液体を層流状態で連続的に噴射するときに作られる液柱を考える(第1図参照)。噴射液が分断した下流には、液滴流が作られる。ここでは、ノズル出口からひとつながりにつながった液体部だけに関心があり、それを「噴射液」あるいは「液柱」と呼ぶ。噴射液の分断が起きるたびに、新たに噴射液の先端が作られる。前報で述べたように、噴射液の先端は噴射液に対して相対的に一定の速さ U で上流(ノズル)に向かって移動するので、実験室系で見た噴射液先端の移動速度は $(V - U)$ である。また、噴射液先端に固定した座標系から見ればノズルから噴射される液体の速度は U である。

実験によれば、噴射速度が小さいと、噴射液の分断距離が分断波長と同程度になる。この場合には、噴射液の変形の程度はどこでも大きく、噴射液先端部の変形とノズル出口で反射した波が相互作用して分断距離が定まるため、解析的なアプローチは困難である。しかし、比較的噴射速度が大きく分断距離が長くなる場合には、分断位置からノズル出口に伝わる表面張力波の振幅は小さく、途中の反射不安定波の発展過程が支配的になり、解析的な接近が可能になる。以下では、このような場合を対象にして、噴射液の自己不安定化機構を記述する理論を構築していく。

2.1 噴射液先端の収縮によって作られる表面張力波の記述 前報に記した一次元理論において、基礎方程式を表面変位 δ に関して線形化することにより、噴射液先端の収縮によって放射される表面張力波に対する解析的な表現式が導ける(後出の式(1)において、母線方向の表面張力の効果を表す因子 $\partial^4 \delta / \partial x^4$ を、円周方向の表面張力の効果を表す因子との和、すなわち、 $\partial^4 \delta / \partial x^4 + a^{-2} \partial^2 \delta / \partial x^2$ に置き換えた式)。線形化は、解析的な表現を得ることによって、

第1図 周期的な噴射液の分断(実験室系で見た図)

噴射液の分断機構の理論的見通しをよくするための方便であり、表面変位 δ の大きさは特に制限しない。

以下、時間 t は噴射液の各分断時刻 t_n から測った経過時間を表すものとする。また、次節の途中までは、第1図に示すように、噴射液先端に座標 x の原点を取るものとする。従って、対象にする噴射液領域は $x < 0$ である。噴射液先端の収縮によって放射され、上流に向かって伝播する表面張力波は、波長が短いので、円周方向の表面張力の効きを無視し、方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \delta = - \frac{\sigma a}{2\rho} \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4} \quad (1)$$

に従うと考えてよい(当然のことながら、長波長化による不安定化過程は、この式では記述できない)。式(1)は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + i \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} - i \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \delta = 0 \quad (2)$$

と書き換えることができるので、下記のようにして必要な解を構成していくことができる。虚数単位の導入に対応して、複素関数 $\Delta(t, x)$ を導入し

$$\delta = \Delta + \bar{\Delta} \quad (3)$$

と置く。ここに上付きの $-$ は共役複素数を表す。線形性より、方程式(2)の一般解は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} - i \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Delta_+ = 0 \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + i \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Delta_- = 0 \quad (5)$$

の解 Δ_+ と Δ_- が求まれば、それらの線形結合で与えられる。

$$\Delta = \Delta_+ + \Delta_- \quad (6)$$

方程式(4)(5)は、熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (7)$$

に似ている。そこで、馴染み深い熱伝導問題の解との対応を通して、方程式(4)(5)の解を求めよう。 $t > 0$ で $x = 0$ の温度 T を初期の一樣温度 T_∞ からある一定温度 T_f に瞬間的に引き上げた場合を考える。物理的には、例えば、速度 U で x 方向に流れている予混合気体において $x = 0$ に $t = 0$ で火炎面が形成され、下流の既燃ガス温度が断熱火炎温度 T_f に固定される場合に対応する。この問題の解は

$$T - T_\infty = (T_f - T_\infty) \exp\left(\frac{Ux}{2\kappa}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{U\eta}{4\kappa}\right)^2 \frac{1}{\eta^2} - \eta^2\right] d\eta \quad (8)$$

で与えられる．ここで

$$\int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{Ux}{4\kappa} \right)^2 \frac{1}{\eta^2} - \eta^2 \right] d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp \left(\frac{Ux}{2\kappa} \right) \quad (9)$$

が成り立つことに注意すれば，十分時間が経った後には，領域 $x < 0$ において定常温度場

$$T - T_\infty = (T_f - T_\infty) \exp \left(\frac{Ux}{\kappa} \right) \quad (10)$$

が確立されることが知れる．これと同じように， $t = 0, x = 0$ で Δ を零からある一定値 Δ_0 に上げたときに生じる Δ の変化は

$$\Delta_\pm = \Delta_{0\pm} e^{\pm i \frac{Ux}{2} \sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{it\sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}}}}}^\infty \exp \left[\left(\frac{Ux}{4} \sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}} \right)^2 \frac{1}{\eta^2} - \eta^2 \right] d\eta \quad (11)$$

$$\Delta_\pm(t \rightarrow \infty, x) = \Delta_{0\pm} \exp \left(\pm i U \sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}} x \right) \quad (12)$$

で与えられる．この解を用いて構成した δ は， $t > 0, x = 0$ において噴射液に軸方向の力を加え，噴射液の流れを部分的にせき止めたときに生じる噴射液表面の変形を表し，噴射液先端の収縮によって作られる表面張力波の伝播過程を模擬する．また，時間が経つと定在波になることが式 (12) からわかる．

2.2 フィードバックループ 目立った表面変形は流下する不安定波によって支配される．そのため過去の研究⁴⁾では，不安定波の成長のみに着目した線形安定性理論が展開されてきた．この理論の問題点は，初期擾乱について何も触れていないことである．実際の噴射液は，流下する不安定波の上に上流に伝播する（振幅の小さな）表面張力波が重畳したものになる．これらの波が非線形的に干渉すると新たな波が作られ，現象は非常に複雑になる．しかし，流下する不安定波の波長（長い）と上流に伝播する表面張力波の波長（短い）との間に，大きなひらきがある場合には，これらの波が互いに強く干渉し合うことはないと予想される．そこで，上流伝播表面張力波が不安定波へ転化する過程を除いて，噴射液に存在する波は互いに独立に振る舞うものと仮定しよう．すると，流下する不安定波は，振幅が増大するに従って周囲気体と干渉して複雑な発展をしても，上流伝播表面張力波は，不安定波による表面変形の大きいところでも，周囲気体と干渉せず，あたかも真っ直ぐな液柱の先端の収縮によって作られる表面張力波と同じ挙動を示すと考えられる．以下は，このような考えに基づいて行った噴射液の自己不安定化機構の解析結果である．はじめに，単純化したモデルを用いて全体的な物理像を掴み，その後に複雑化要因に対する考察を加える．

いま，速度 V の噴射液がノズルから X_0 離れた位置で分断するとしよう．実際の分断位置は分断ごとに変動するが，平均的分断位置を考え，揺らぎは無視する．時刻 $t = 0$ に $x = 0$ で分断が起きると，そのときにできた噴射液の先端の収縮によって表面張力波が作られ，伝播速度が $(V - U)$ より大きい波だけが上流に伝播してノズル出口に達する．

分断距離が大きい場合，1 回の分断によって作られた上流伝播表面張力波は，次の分断が起きるまでにノズル出口まで達するとは限らない．従って，次の分断が起きたときに噴射液に存在する上流伝播表面張力波は，前の分断で発生した表面張力波の継続的な発展の上に，次の分断で作られる表面張力波が重ね合わされたものになる．同じ考えを繰り返して，一般の時刻において噴射液にある上流伝播表面張力波の状態を知ることができる．このことは，重ね合わせの理が適用できる限り，各時刻においてノズル出口に達する表面張力波の特性を予測するには，半無限長の噴射液に対して，1 回の分断によって作られる表面張力波の特性（式 (11)）を知っていれば十分であることを意味する．

イメージを具体的にするために，以下では漸近解を用いて解析を進めていく．一般的な解析は漸近解を元の解に戻して行うことができる．

2.2.1 ノズルに到達する表面張力波の特性 噴射液先端から離れた位置で，式 (11) の積分は次のように漸近展開できる．

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{x}{2\sqrt{it\sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}}}}}^\infty \exp \left[- \left(\frac{Ux}{4i} \sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}} \right)^2 \frac{1}{\eta^2} - \eta^2 \right] d\eta \\ & \sim \int_{\frac{x}{2\sqrt{it\sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}}}}}^\infty \frac{1}{(-2\eta)} (-2\eta) \exp[-\eta^2] d\eta \quad (13) \\ & = -\frac{1}{x} \sqrt{it\sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}}} \exp \left[-i \frac{x^2}{4t\sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}}} \right] + \dots \end{aligned}$$

よって

$$\Delta_\pm \sim -\Delta_{0\pm} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} \sqrt{it\sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}}} \exp \left[-i \left(\frac{x^2}{4t} \mp \frac{Ux}{2} \right) \sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}} \right] \quad (14)$$

第2図 模擬計算例

この式によれば, $\exp[i(x^2/4t)\sqrt{2\rho/\sigma a}]$ から進行波の性質が出ていることがわかる. この因子の零点に着目し, $x=0$ から順番に番号づけすると, 時刻 t における n 番目の零点の x 座標は

$$\frac{x_n^2}{4t} \sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}} = 2\pi n \quad (15)$$

によって定まる. この式は, ブラウン運動粒子の位置の移動を表す式と同じになっており, 拡散的な広がりによって表面張力波が伝播することが知れる. n 番目の零点を中心とした1波長の波を第 n 波と呼ぶ. 実験室系で見た第 n 波の位相速度は

$$c_{rn} = V - U + \frac{dx_n}{dt} = V - U - \sqrt{\frac{2\pi n}{t}} \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}} \quad (16)$$

であり, この波がノズルに達するためには $c_n < 0$ でなければいけない. 第 n 波の波長は

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{2\pi}{k_n} \\ &= x_n - x_{n+1} \\ &= \sqrt{8\pi n t \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}}} \left[\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right] \\ &\rightarrow \sqrt{\frac{2\pi t}{n}} \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}} \\ &= \frac{-x_n}{2n} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (17)$$

となる. また, 第 n 波の振幅は, 式(14)の指数関数の係数の絶対値を取って

$$\delta_n = \frac{\Delta_0}{\pi \sqrt{2n}} \quad (18)$$

と見積もることができる. すなわち, 表面張力波の振幅の包絡線は, x が大きくなるに従って x に反比例して小さくなる.

第2図に, 噴射液先端の収縮による表面張力波の形成過程の模擬計算³⁾で得られた表面変位の絶対値の分布を示す.

無次元時間が20のときのグラフである. 無次元距離が30になるところでは, 式(15)の n は4程度になる. 理論的には先端の収縮が始まると同時に無限遠方まで微小な変化が現れることになるが, 数値計算では, はじめに $x=0$ 近くの格子点で起きた変化の影響が各時間ステップごとに隣の格子点へと伝わって遠方場が計算されるため, n が大きな領域(図の灰色に塗りつぶした領域)では理論解と異なった挙動を示す. この部分を除けば, 破線で示した包絡線は (-1) の傾きの直線になっていて, 式(14)の関係をよく満たしていることがわかる. また, 第2図の破線と比較して, 係数 Δ_0 の値を $\Delta_0/a = 0.25$ と取れば, 噴射液先端の収縮によって作られる表面張力波が式(14)によってよく記述できることが知れる. この値は数値計算³⁾で得られた先端液塊のくびれ部の表面変位と同程度になり, 妥当な結果であると判断される.

噴射液が分断したとき($t=0$)のノズル出口までの距離を X_0 としているので, 時間の経過と共に, ノズル出口から噴射液先端までの距離は

$$X(t) = X_0 + (V - U)t \quad (19)$$

に従って増大する. 従って, ノズル出口に到達した表面張力波の波長, 位相速度および振幅は, 式(16)(17)(18)で $x = -X$, すなわち,

$$X_0 + (V - U)t = -x_n = \sqrt{8\pi n t \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}}} \quad (20)$$

とおくことによって得られる. 上式を n について解き,

$$n = \frac{[X_0 + (V - U)t]^2}{8\pi t \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}}} \quad (21)$$

を得る. この結果を式(17)(16)(18)に代入して次の表現を得る.

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} \sim \sqrt{\frac{2\pi t}{n}} \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}} = \frac{4\pi t}{X_0 + (V - U)t} \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}} \quad (22)$$

$$-c_{rn} = \sqrt{\frac{2\pi n}{t}} \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}} - (V - U) = \frac{X_0 - (V - U)t}{2t} \quad (23)$$

$$\delta_0 \sim \frac{2\Delta_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{t}{[X_0 + (V - U)t]^2}} \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}} \quad (24)$$

2.2.2 ノズル出口での反射条件 前報で示したように, ノズル出口に到達した表面張力波は, 反射時に噴射速度によるドップラーシフトを受けるので反射波の波長が長くなり, 不安定波に転化することができる. ここでは, 反射波の波長が, 不安定波の条件(d)で定式化する)を満たすとして, 反射条件を定式化する. 以下, 解析対象は, ノズルに向かって伝播する表面張力波からノズル出口での反射に

よって作られた不安定波に移っていく。そのため、座標 x の原点の位置を、噴射液先端からノズル出口に移す。これにより、反射条件ならびに不安定波の表現式が簡単になる。

式 (22) ~ (24) で特性づけられる、ノズル出口に到達した表面張力波 (1 波長) を、それと同じ波長、位相速度、振幅を持った単純波で近似して (支配方程式の線形性より、表面張力波はフーリエ級数に分解して表現できる)、例えば

$$\delta = \delta_0 \sin[k_0(x - c_{r0}t)] \quad (25)$$

と表す。この波がノズル出口で反射して不安定化した波

$$\delta = \delta_0 \exp\left(\gamma \frac{x}{V}\right) \sin[k'(x - Vt)] \quad (26)$$

は、振幅が等しく、振動数が一致する条件⁵⁾

$$\omega = k_n(-c_{rn}) = \frac{X_0^2 - (V - U)^2 t^2}{4t^2} \sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}} = k'V \quad (27)$$

を満たすものである。ただしここで、気液密度比の小さい場合を想定し、不安定波の位相速度は噴射液の速度に一致すると仮定している。変動軸速度 u は δ と同じ関数形を取るため、入射波と反射波との合成波は $x = 0$ で $u = 0$, $\delta = 0$ となり、 $x < 0$ のノズル内流れ ($u = -U$, $\delta = 0$) に接続できる。

2.2.3 不安定波の発展 不安定波 (26) は噴射液と一緒に移動しながら振幅を増大する。同じ位置で周期的な噴射液の分断 (理想的に規則的な分断) が起きるためには $x = X_0$ で不安定波の振幅が a にならなければならない。

$$a = \delta_0 e^{\gamma \frac{X_0}{V}} \quad (28)$$

2.2.4 分断に至る不安定波の定式化 不安定波は流下するに従い振幅が増大するので、その特性をとらえるには、周囲気体 (密度 ρ_g) の効果も考慮した方がよい。式 (26) の単純波に対して分散関係式を求めると⁶⁾、通常問題になる波数 k' の範囲では、複素位相速度 $c = c_r + ic_i$ は

$$c = \frac{-\rho U + \rho_g(V - U) \pm \sqrt{(\rho + \rho_g)\sigma \left(k' - \frac{1}{k'a^2}\right) - \rho \rho_g V^2}}{\rho + \rho_g} \quad (29)$$

となる。これより波数が

$$k'a < \frac{\rho \rho_g V^2 a}{2(\rho + \rho_g)\sigma} + \sqrt{\left\{ \frac{\rho \rho_g V^2 a}{2(\rho + \rho_g)\sigma} \right\}^2 + 1} \quad (30)$$

を満たす波は不安定波となり、気液密度比が小さいときには、噴射液と同じ速度で下流に流されることが確認される。そして、最も不安定な波の増幅率 γ'_m と波数 k'_m は

$$k'_m a = \frac{\rho \rho_g V^2 a}{(\rho + \rho_g)\sigma} + \sqrt{\left(\frac{\rho \rho_g V^2 a}{(\rho + \rho_g)\sigma} \right)^2 + 3} \quad (31)$$

$$\frac{\gamma'_m a}{V} = \frac{\sqrt{\rho \rho_g}}{\rho + \rho_g} \frac{\rho \rho_g V^2 a}{(\rho + \rho_g)\sigma} + \sqrt{\left(\frac{\rho \rho_g V^2 a}{(\rho + \rho_g)\sigma} \right)^2 + 3} \quad (32)$$

で与えられる。

実際に起きる分断は、許された条件の中で、分断距離を最小にするものが実現するから、分断に係る波としては、増幅率が最大になる波数 (式 (31)) の波が選択される。すなわち、考えている理想的に規則的な分断では、噴射液の分断に直結する表面張力波は、前の分断によって放射された表面張力波の内の特定の素波 1 つだけある。他の素波は重ね合わせによって干渉し、より分断しやすい状況が作られない限り分断につながらない。

2.2.5 分断距離の決定 これまでに求めた式において V をパラメータとして与えれば、未知量は X_0 と t の 2 つだけである。これに対して 2 つの独立な関係式 (20) (28) を得ているので、 X_0 を V の関数として求めることができる。実際、式 (20) は

$$\left(\frac{X_0}{t} \right)^2 = (V - U)^2 + 4V \sqrt{\frac{\sigma}{2\rho_g a} \frac{\rho \rho_g V^2 a}{(\rho + \rho_g)\sigma} + \sqrt{\left(\frac{\rho \rho_g V^2 a}{(\rho + \rho_g)\sigma} \right)^2 + 3}} \quad (33)$$

と書き表すことができるから、横軸に時間 t 、縦軸に X_0 を取って V の等値線を描くと、原点から出た放射線になる。また、式 (28) は

$$t = \frac{f - X_0(V - U) \pm \sqrt{f\{f - 2X_0(V - U)\}}}{(V - U)^2} \quad (34)$$

ただし、ここに

$$2f = \sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho_g}} \left(\frac{2\Delta_0}{\sqrt{\pi}a} \right)^2 \exp \left\{ \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho \rho_g}}{\rho + \rho_g} \left[\frac{\rho \rho_g V^2 a}{(\rho + \rho_g)\sigma} + \sqrt{\left(\frac{\rho \rho_g V^2 a}{(\rho + \rho_g)\sigma} \right)^2 + 3} \right] \frac{X_0}{a} \right\} \quad (35)$$

となり、同じ図に V の等値線を描いて、式 (33) のグラフとの交点を求めることによって、所与の V (あるいは液体ウェーバー数 $We = \rho V^2 a / \sigma$) に対する分断距離 X_0 と経過時間 t を決定できる。式 (34) の複号は負だけが意味を持つ。第 3 図に $\rho / \rho_g = 20$, $\delta_0 / a = 1$ とした場合の計算結果を示す。図には式 (15) の n の値が 1, 2, 3 となる条件も記入してある。図の曲線は $n > 1$ となる範囲で妥当なものであるから、2 つの交点のうち左下の点 (図に現れていない) は該当しない。また、 V の値が大きいために、妥当な解が求まることもわかる。 V が大きいときには $f \gg (V - U)X_0$ となり、式 (34) は

第3図 解の決定

$$t = 0.5X_0^2/f \quad (36)$$

に近似される．この式を $1 = 0.5(X_0/t)X_0/f$ と書き換え， (X_0/t) に式 (33) を代入すると， X_0 の決定方程式が次のように得られる．

$$Z \exp\{-Z\} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho_g}} \left(\frac{2\Delta_0}{\sqrt{\pi}a}\right)^2 \frac{2}{3\sqrt{3}a} \frac{\sqrt{\rho\rho_g}}{\rho+\rho_g} \left[\frac{\rho\rho_g V^2 a}{(\rho+\rho_g)\sigma} + \sqrt{\left(\frac{\rho\rho_g V^2 a}{(\rho+\rho_g)\sigma}\right)^2 + 3} \right]}{\sqrt{(V-U)^2 + 4V \sqrt{\frac{\sigma}{2\rho_g a}} \frac{\rho\rho_g V^2 a}{(\rho+\rho_g)\sigma} + \sqrt{\left(\frac{\rho\rho_g V^2 a}{(\rho+\rho_g)\sigma}\right)^2 + 3}}}$$

(37)

ただし

$$Z = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho\rho_g}}{\rho+\rho_g} \left[\frac{\rho\rho_g V^2 a}{(\rho+\rho_g)\sigma} + \sqrt{\left(\frac{\rho\rho_g V^2 a}{(\rho+\rho_g)\sigma}\right)^2 + 3} \right] \frac{X_0}{a} \quad (38)$$

式 (37) の左辺が $Z = 1$ で極大値 e^{-1} を取る Z の関数になっていることからわかるように， X_0 は極大点を持つ V の関数になる．式 (37) と (38) の右辺をそれぞれ e^{-1} および 1 とおいた式から X_0 の極大値と，そのときの V の値が定まる．そして，その計算より，気体ウェーバー数 $(\rho_g/\rho)We$ が $O(1)$ になる条件で X_0 が極大になり，その値は噴射液半径 a と密度比 $\sqrt{\rho_g/\rho}$ によってスケールされることが知られる．

第2図の計算から求めた分断特性を第4図に図示する．上述のように，噴射速度 V を U から増大させていくと，分断距離はいったん増大した後減少する．他方，周期的な分断に関係する不安定波のノズル出口での振幅 δ_0 ，波長 $\lambda'_m = 2\pi/k'_m$ および分断で作られた表面張力波がノズル出口に達するまでにかかる時間 t は，いずれも V の増大によって単調に減少する．有効な δ_0/a の値は 0.1 以下であり，噴射速度に対する依存性は比較的弱いと言える．特に，噴射速度が大きいところでは，ほぼ一定値になっていることに注意しよう．このことは，ノズル出口における不安定

第4図 分断特性

波の振幅 δ_0 を適当な一定値に設定すれば，流下する不安定波の発展だけを考えると，分断距離を予測できることを意味し，従来の微粒化理論における解析手法の部分的な妥当性を示している．図には，分断励起ループが閉じるのに要する時間の間に噴射液先端が移動する距離と分断波長（ここの議論では不安定波の波長に一致する）との比

$$\frac{k'_m(V-U)}{2\pi} \left[t + \frac{X_0}{V} \right] \quad (39)$$

も図示してある．この値が 1 より大きいときは，着目する分断を引き起こす不安定波は，その前の分断よりも以前の分断によって放出された表面張力波がノズル出口で反射して不安定化したものである．逆のケースは起き得ないので，この図からも V が小さなきには正しく分断距離が予測されていないことが確かめられる． V が小さいときの分断を特性づけるには，非線形性を考慮した数値計算が必要である（第3報で行う）．分断距離が短いと反射波の振幅も大きく，例え増幅率が低下しても，大変形状態で不安定性が発展して分断した方がはやいので，この分断様式が選択されるものと思われる．これに対して， V が大きい場合の分断は，基本的に噴射液先端近くの状態には独立であり，途中の不安定性の発展の仕方が分断距離を決定することがわかる．

一定の分断波長 λ'_m で周期的な分断が起きるためには，分断周期 t は， $\lambda'_m = (V-U)t$ を満たさなければいけないから， $(V-U)$ に反比例する．

2.2.6 噴射液先端近傍の表面張力波の挙動 $x \sim 0$ の近傍で式 (11) は

$$e^{-i\frac{Ux}{2}\sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{it\sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}}}}}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{Ux}{4i}\sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}}\right)^2 \frac{1}{\eta^2} - \eta^2\right] d\eta \\ = e^{-i\frac{Vx}{2}\sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{Ux}{4i}\sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}}\right)^2 \frac{1}{\eta^2} - \eta^2\right] d\eta \\ - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-i\frac{U}{2}\sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}}\left(x - \frac{t}{2}U\right)\right] \frac{x}{2\sqrt{it\sqrt{\frac{\sigma a}{2\rho}}}} \quad (40)$$

と近似される．この式によれば，噴射液先端の近くには定在波が存在し，先端 $x = 0$ から離れるに従って伝播性の波成分が現れてくるが，その波は高々 $U/2$ の位相速度でしか上流に向かって伝播できないことが知れる．従って， $V - U - U/2 < 0$ ，すなわち， $V < 1.5U$ でなければ，この波がノズル出口に達して不安定化することはない．すなわち，ノズル出口に伝わり不安定波に転化する波は，上で見たように，噴射液先端から離れた位置にある比較的振幅が小さくかつ位相速度の大きな伝播性の波成分に限られることが確かめられる．

3. 提案したフィードバックループ概念の応用

上で提案したフィードバックループの考えの応用を考えよう．噴射液の先端の収縮によって作られる表面張力波の特性をよくつかんでいけば，これまで無視してきた複雑化要因が加わったときの液系の分断機構も理解しやすくなる．

3.1 ガス圧作用の効果 前章の解析では上流伝播表面張力波と周囲気体との干渉は無視している．実際の噴流では剪断層の厚みは下流にいくに従って増大するため，気液速度差がもたらす効果は噴流に沿って変化するのが一般的である．このため，噴射液の分断によって作られる表面張力波が上流に伝わり，薄い剪断層の領域に入りガス圧作用が有意に効くようになるとフィードバックループに変化が生じる．実際，前報のモデル計算によって，上流伝播表面張力波が，表面の凸凹に対応して変動ガス圧が作用する領域に入ると，その一部が噴射液と一緒に流下する不安定波に転化することを示した．すなわち，ノズル出口で起きる上流伝播表面張力波の不安定波への転化がノズルの下流で起きようになり，ガス圧作用域と噴射液先端との間において前章で述べたものと同様のフィードバックループを形成することができる．この考え方によれば，気体ウェーバー数が $O(1)$ になる液系では，先端の収縮を起源として液系の不安定化が自然に発現することになり，乱流微粒化で観察される継続的な液系の分断が説明できるようになる（乱流微粒化の液系にはノズル出口に対応するものがない）．

さらに，同じ考えは，ノズルから高速で層流噴射された液体表面の不安定化の発生にも応用できる．噴射速度が非常に大きくなると，ガス圧作用の効果が強くなり，上流に伝播する表面張力波と共に最大増幅率を与える不安定波の波長も短くなる．前報の基礎方程式は，噴射液は各断面内で特性が一樣であると仮定しているために，波長が噴射液半径より小さいときの噴射液の挙動を正しく記述するものではないが，波数を無限大に近づけたときの基礎方程式は，平面問題に対して得られる方程式と同じ式になるから，基本的な表面変形の特徴は，前報のモデル計算によってとらえることができる．しかし，噴射速度が非常に大きくなると，もはやこれまで考えてきたような軸対称な変形モードだけが発生するわけではない．代わって，円周角依存性を持った表面張力波の出現によって，表面からスパイク状に突き出した細かい液系が多数形成され，それが分断して噴射液に表面張力波を生む源になる．従って，前章の解析に

おける噴射液先端を，表面にスパイク状の液系が作られる位置に置き換えて噴射液を遡る表面張力波を考えれば，上で述べた噴射液の自己不安定化と同様のことが高速噴射液に対しても言える．このような状況では，ノズルと液系形成位置の間隔は非常に短くなりうる．さらに，気体ウェーバー数が $O(1)$ を越える条件になると，下流の乱れの影響はガス相を通して上流の噴射液の変形に有意に作用するようになる．

3.2 粘性の効果 このような考えの正しさは，粘性の影響を考慮したときに現れる噴射液の不安定性の変化によって裏付けられる．高圧静止窒素ガス中に低速で SF_6 液を層流噴射した微小重力実験²⁾ によって，窒素圧を上げ噴射液の表面状態を臨界混合条件に近づけていくと，ある圧力で突然，それまでのノズル出口近くから乱れた噴射液の流れから，スムーズな流れに変化し，ノズルから遠く離れた位置で先端液塊が次々と分断する状態に遷移することが見出されている．この実験において，急激に変化するの表面張力だけであるから，この現象は，噴射液の表面が臨界混合状態に近づいて急激に表面張力が零に近づいたことによって起きた現象である．

上流に伝播する表面張力波は高波数であるがために粘性の存在によって減衰しやすい波でもある．粘性に比べて表面張力の効きが相対的に弱くなる（オーネゾルゲ数が大きくなる）と，噴射液先端の収縮によって作られた表面張力波がノズル出口に到達できなくなり，前章で提案したフィードバックループが機能しなくなり，表面変形の大きな先端近くでのガス圧作用による表面張力波から不安定波への転化だけが有効になる．このことが実験で観察された遷移現象を引き起こしていると考えられる．

4. お わ り に

噴射液の継続的な分断を自励起する機構をあきらかにした．鍵になる過程は噴射液の分断によって上流に向かって放射される表面張力波の伝播と，そのノズル出口での反射ないしは周囲気体流との流体力学干渉による不安定波への転化である．提案した機構が機能すれば，はじめから，いっさい外から擾乱を加えなくても，噴射液に継続的な分断が起きようになる．液体の噴射を開始した直後を考えると，噴射液の先端が収縮してノズルに向かって表面張力波が放射される．ノズル出口での反射によって不安定波に転化し，下流で分断が起きれば，以降同じことが繰り返されていく．噴射速度が大きい場合，粘性の効果によって表面張力波がノズルに到達できなくなれば，噴射直後の噴射液の分断は起きなくなる．しかし，噴射液に端がある限り，必ずその上流に表面張力波が存在するので，ガス圧作用が有効に効く領域において，ノズル出口での反射と同様に表面張力波から不安定波への転化が起きる．本論文では円形噴射ジェットだけを対象にして解析したが，シート状の噴射液の不安定化についても同じ考えが部分的に適用できる．

本研究は（財）日本宇宙フォーラム宇宙環境利用に関す

る公募地上研究(次期宇宙環境利用研究)ならびに文部科学省科学補助金(基盤研究(B))の補助を受けて行われた。ここに記して謝意を表する。

記 号

a : 噴射液半径
 c : 複素位相速度
 c_r : 位相速度
 c_i : 複素位相速度の虚部
 f : 式(35)で定義される関数
 k : 表面張力波の波数
 k' : 不安定波の波数
 n : 整数
 T : 温度
 t : 時間
 U : 噴射液先端の収縮速度
 V : 噴射速度
 We : 液体ウェーバー数
 X_0 : 分断距離
 x : 座標
 Z : 式(38)で定義される関数
 γ : 増幅率
 Δ : 関数

δ : 表面変位
 η : 変数
 κ : 温度拡散率
 λ : 波長
 ρ : 液体密度
 ρ_g : 気体密度
 σ : 表面張力
 τ : 分断周期
 ω : 振動数

参 考 文 献

- 1) Rayleigh, L.: The Theory of Sound, Vol. 2, Dover, NY, 1945.
- 2) 梅村 章: 微小重力環境を利用した液体ジェットの不安定性の研究, 日本マイクログラビティー応用学会誌, **21** (2004), pp. 293-299.
- 3) 梅村 章: 噴射液の自己不安定化機構の理論的研究, 第1報: 噴射液の不安定化に関連する表面張力波, 日本航空宇宙学会論文集, **55** (2007), pp. 216-223.
- 4) Lin, S. P.: Breakup of Liquid Sheets and Jets, Cambridge University Press, NY, 2003.
- 5) 梅村 章: 微小重力環境を利用した近臨界混合表面液ジェットの不安定性の研究(ノズル出口でのレーリー・テラー不安定波の励起機構と短波長分断機構の解明), 日本燃焼学会誌, **46** (2004), pp. 50-59.
- 6) 梅村 章: 近臨界混合表面液ジェットのテラー型不安定性の研究(乱流微粒化機構を探るための基礎的な考察), 日本燃焼学会誌, **45** (2003), pp. 49-61.