噴射液の自己不安定化機構の理論的研究^{*1}

第3報：短距離分断過程の1次元計算

Self-Destabilizing Mechanism of Circular Liquid Jet

Third Report: Model Simulation of Liquid Jet Disintegration Process

梅 村 章^{*2}

Akira UMEMURA

Key Words: Liquid Atomization, Circular Liquid Jet, Instability, Capillary Wave

Abstract: When an issued liquid jet breaks up into droplets at a short distance from the nozzle exit, its surface deforms significantly over its whole length. The one-dimensional model developed in the first report is refined so as to describe the deformation of the liquid jet tip and it is applied to analyze strong interactions between the capillary deformation of the jet and the nozzle exit, revealing the highly stochastic nature of the breakup phenomena. It is found that the Rayleigh type of disintegration of a liquid jet takes place only under the condition that the liquid Weber number is less than 1.5 and the liquid jet disintegrates relatively far apart from the nozzle exit. Otherwise, the regular disintegration of the jet can not occur without the help of aerodynamic action.

1. はじめに

乱流微粒化過程を観察すると、噴射液から生成された微細な液系が先端から順次分断されて液滴が作られているのが見える。液系の分断は、表面張力による絞りの効果によって生じるので、液系の分断を支配する最も重要な変形モードは液系の中心軸に関して軸対称なモードである。加えて、液系と周囲気体の間の相対速度の存在が分断に密接に関連する。そのため、第2報¹⁾では、気液速度差の効果が有意に効く場合の分断機構を解析的な手法によって調べた。その結果、液系の分断によって作られる表面張力波が上流に伝播していく過程において、気液速度差の効果が有意に効く箇所に達すると、そこで表面張力波が不安定波に転化し、液系と共に流下しながら不安定性を強め、分断に至ることがわかった。このときの不安定波に転化する表面変位は元の液系の半径の百分の1程度であり、その大きさは基本的に上流の条件に依存しない。すなわち、円形ノズルから噴射した液体の軸対称な分断に対して同じことが言えるはずであるから、我々は静止気体中に円形ノズルから噴射した液体を用いて液系の分断機構を実験的に調べてきている²⁻⁵⁾。乱流微粒化における液系との対応を考えれば、この実験で対象になる噴射液は、噴射速度が比較的大きく、分断距離も大きくなる場合に限られるが、乱流微粒化の問題を離れ一般の微粒化機構の探求に関心を向ければ、噴射速度が小さい場合も興味の対象になる。この場合には、ノズル自体

が分断によって発生した表面張力波を不安定な波に転化させる役割を果たすことを第1報⁶⁾の簡易モデル解析で示した。しかし、分断距離が短くなると、噴射液全体にわたって表面変位が大きくなり、噴射液先端とノズルが密接に干渉し合うので、噴射液の先端の形状をきちんと考慮した計算を行わないと正しい理解はできない。そこで、本研究では、第1報⁶⁾で誘導した基礎方程式を噴射液の先端形状まで計算できるように工夫し、数値的にノズルから低速で噴射された液体の分断過程を詳しく調べることにした。これにより、第1, 2報の結果と併せ、噴射液の自己不安定化機構に関する体系的な理解が可能になる。

2. 噴射液の1次元計算法

2.1 基礎方程式 半径 a のノズルから速度 U で噴射される、密度 ρ 、表面張力 σ の液体の変形を考える。噴射液の中心軸に沿って x 軸を取る。 x 軸の原点は、噴射液の先端から下流に適当に離れた位置に取り、噴射液の先端からノズルに向かった向きを正とする。周囲気体の影響を無視したときの軸対称な液柱の変形において、各断面 x の表面半径 $r = a + \delta$ および軸速度 u は下記の方程式⁶⁾を数値的に解いて求める。

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{r} \frac{1}{\left\{ 1 + \left(\frac{dr}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{d^2 r}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dr}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (1)$$

^{*1} © 2007 日本航空宇宙学会

平成 18 年 4 月 6 日原稿受理

^{*2} 名古屋大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻

$$\frac{\partial r}{\partial t} + u \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{r}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

2.2 噴射液先端の処理 噴射液先端と表面張力波および不安定波との干渉の様子を詳しく調べるには噴射液先端にある液体塊の変形が計算できないといけない． x 座標を一定間隔 Δx で離散化し，差分化した方程式 (1) (2) を解くとき，一般に先端位置は計算格子点上にこない．そのため，先端部（長さ $2\Delta x$ 程度）の計算は別に工夫しなければいけない．本研究では，先端を小球で近似して先端液塊の変形を記述できるようにした．以下に使用した処理方法を記す．

第 1 図に先端部の計算で用いる特性量を図示する．先端が中間に位置する 2 つの格子点において，噴射液に含まれる格子点を M とする．太実線は液体表面の形状を表し，格子点 $M, M+1, M+2, \dots$ における表面半径を $r_0, r_1, r_2, \dots$ で表す．軸速度は格子点間の midpoint で定義されており，太破線上の点 $u_1, u_2, \dots$ の値を取るとする．これらの量の内，差分化した方程式 (1) (2) を用いて決定できないのは r_0 と u_1 である．

先端の小球部（高さ最大 $2\Delta x$ ）では各瞬間において力学的な釣り合いが成立しているものと仮定する．すると，小球部では，圧力は小球半径 R によって定まる一様値 $2\sigma/R$ を取り，速度勾配は零である．すなわち，小球部は軸速度 u_1 で並進する．

2.2.1 未知量 u_1 の決定法 u_1 の時間的变化を式 (1) を用いて計算することを考えよう．仮定によって u_1 の評価点では $\partial u / \partial x = 0$ である．式 (1) の右边を評価するのに， u_1 の評価点より左側では表面が半径 R の球面になっているとし，右側の表面の曲率を点 B, C, D から計算することになると，次の関係式が得られる．

$$u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{1}{r_1^n} \frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{r_2^n - r_0^n}{2\Delta x}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{r_0^n - 2r_1^n + r_2^n}{\Delta x^2 \left\{1 + \left(\frac{r_2^n - r_0^n}{2\Delta x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{R^n} + \Delta t \frac{\sigma}{\rho \Delta x} \quad (3)$$

これより，時間ステップ n での u_1, R, r_0, r_1, r_2 の値がわかれば，次の時間ステップ $n+1$ での u_1 の値が定まる．

2.2.2 未知量 r_0 の決定法 曲率半径 R が一様である小球部では式 (1) 右边が零になるから $du/dt = 0$ である．すなわち，円弧 AB は速度 u_1 で動き，次の時間での r_0 と ξ は

$$\xi^{n+1} = \xi^n - u_1^n \Delta t \quad (4)$$

$$r_0^{n+1} = \sqrt{R^{n2} - (-R^n + \xi^{n+1})^2} \quad (5)$$

によって計算される．

第 1 図 先端部の特性量

2.2.3 未知量 R の決定法 小球部の表面と他の部分の表面が滑らかに BC 間で繋がっていなければいけない．ここでは，2 点 BC の中心まで小球部になっているとして，そこでの小球表面の傾きが直線 BC の傾きに一致するようにした．すなわち，

$$\begin{aligned} \left. \frac{dr}{dx} \right|_{x=\frac{\Delta x}{2}} &= -\frac{x - R + \xi}{\sqrt{R^2 - (x - R + \xi)^2}} \Big|_{x=\frac{\Delta x}{2}} \\ &= \frac{R - \xi - \frac{\Delta x}{2}}{\sqrt{R^2 - \left(R - \xi - \frac{\Delta x}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{r_1 - r_0}{\Delta x} \end{aligned} \quad (6)$$

この式を R について解いて

$$\begin{aligned} R^n &= \left(\xi^n + \frac{\Delta x}{2} \right) \left[\left\{ 1 + \left(\frac{r_1^n - r_0^n}{\Delta x} \right)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_1^n - r_0^n}{\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{r_1^n - r_0^n}{\Delta x} \right)^2} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

を得る．

2.2.4 先端の移動 以上は先端 A が格子点 $M-1$ と M の間に位置する場合の計算方法である． ξ の値が Δx より大きくなったら $M = M-1$ とする．逆に ξ の値が負になったら $M = M+1$ とする．前者の場合には，新たに作られる u_1 の評価点での前の時刻における u_1 の値は，小球部の移動速度に等しく置く．

2.3 初期条件とノズル出口条件の設定 第 2 図に本研究で採用した初期条件を図示する．先端が半球状になった半径 a ，長さ L_0 の液体円柱を初期時刻 $t = 0$ における噴射液の形とした．右端はノズル出口に対応する．ノズル出口において噴射液の半径 r は a ，軸速度 u は噴射速度 U に固定されている．初期において半球部の軸速度は零，円柱部は一様軸速度 $u = -U$ を持っているものと仮定した．

第2図 初期条件

第3図 液系の収縮過程の計算例

3. 計算結果

計算は、特性長 a と特性速度 $\sqrt{\sigma/\rho a}$ を用いて無次元化した式に基づいて行った。このとき噴射速度 U は液体ウェーバー数 $We = \rho U^2 a / \sigma$ の平方根に置き換えられる。

3.1 液系の収縮過程の計算 L_0 を長く取って、 $U = 0$ として計算すると、無次元時間 $\hat{t} = t\sqrt{\sigma/\rho a^3}$ で測って $O(1)$ の時間の間の過渡的な変化を経た後、一定間隔で M が増大し、液系の先端が収縮する過程が計算された。

同じく L_0 を長く取って、 $We = 1$ としたときの計算結果を第3図に示す。第1報⁶⁾で述べたように、液系は特性速度 $\sqrt{\sigma/\rho a}$ で収縮するので、この計算では液系の先端位置がほぼ固定される。図は無次元時間 $\hat{t} = 10$ における液系の輪郭と軸速度分布を示す。ほぼ球形をした先端液塊の上流に表面張力波が発達している。この結果は第1報⁶⁾で示したVOF法による数値計算結果とよく一致しており、1次元計算によって液系の収縮によって作られる表面張力波が精度良く計算できることを示している。特に、先端液塊の近くの表面張力波の波長は液系半径の3.7倍になっており、第1報で述べたVOF計算および漸近解析の結果に一致している。

3.2 ノズル出口との干渉の計算 L_0 を比較的短く取って計算すれば、種々の噴射速度 U での噴射液の挙動が計算できる。

3.2.1 短距離分断 (表面張力波間の共鳴による不安定化) 第4図は、 $We = 1$, $L_0/a = 3.8$ の場合に対して噴射液の分断が起きるまでの過程を計算した結果である。紙面を節約するため噴射液を90度回転させて図示してある。各噴射液に付した数値は無次元時間を表す。最後の図からわかるように、噴射液先端から分断点までの距離 (分断波長) は、定在表面張力波の波長に一致し、ノズル半径の3.7倍

第4図 共鳴型不安定

第5図 ノズル出口での反射表面張力波の寄与の抽出

である。また、ノズル出口から分断点までの距離 (分断距離) はノズル半径の約8倍である。気液速度差によるガス圧作用が効かなければ、噴射液長が $2\pi a$ より短いと、その間に不安定波は存在しえない²⁾。従って、この計算で現れた噴射液の分断は、ノズル出口での反射による不安定波の励起によって起きたのではないと考えられる。そこで、次に、この点の検討を行った。

第4図に示した無次元時間1における噴射液を取り上げて、噴射液の変形を分析した結果を第5図に示す。図の x 軸は噴射液の先端に原点が取ってある。ノズル出口は $x = X = 4.1a$ に位置するから、この時間までに噴射液は $0.3a$ だけ伸びたことになる。

L_0 を長く取り、ノズルが存在しないとして計算したときに得られる無次元時間1における表面変位分布を $\delta_0(x)$ とする。第5図の $x/a > 4.1$ の領域 (灰色に塗りつぶした部分) に、そのグラフを示す (ただし a で無次元化してある)。これに対して $0 < x/a < 4.1$ に示したグラフは、ノズル出口の存在によって生み出された表面変位を表し、この計算で得られた表面変位 $\delta(x)$ から $\delta_0(x)$ を引いたものである (ただし a で無次元化してある)。この2つのグラフを比較してわかるように、左側のグラフは右側のグラフを点 ($x = X, \delta - \delta_0 = 0$) の周りに180度回転させ、負の x 方向に引き伸ばした形状になっている。すなわち、ノズル出口は、そこに達する表面張力波 (右側に描かれた表面

第6図 共鳴型不安定化条件

張力波)を反射させ、反射波は噴流に乗って伝播するので、下流方向に波形が引き伸ばされる。先端 $x = 0$ の近くでは、ノズルで反射した波が再び先端で反射した波が重畳しているため、右側の波形とは若干形が異なっている。このように、噴射液の形状は先端の収縮によって作られた表面張力波がノズル出口と先端で反射を繰り返したものが重畳して作られることが確かめられる。時間が経つと、いくつかの反射波が重畳するので追跡は困難になる。しかし、上の説明から、条件によって先端液塊の絞り部に反射表面張力波の凹み部が重なり、局所的に不安定化して分断に至ることは想像に難くない。第4図に示した噴射液の分断は反射表面張力波の絞り部が互いに重なり合っ、ある値以下に絞り部の半径が小さくなったときに起きている。実際、この現象は、簡単なモデルを用いて次のように説明される。余弦波状の表面変位

$$\delta = A \cos k(x - c_r t) \quad (8)$$

をした液柱の絞り部と膨らみ部の液柱半径 r と母線曲率半径 R はそれぞれ $(a - A$ と $1/k^2 A)$ ($a + A$ と $1/k^2 A)$ で与えられる。また、液柱の液体圧は、母線が外向きに凸であるか凹であるかに応じて表面張力によって生み出される圧力 $\sigma(1/r - 1/R)$ あるいは $\sigma(1/r + 1/R)$ だけ周囲ガス圧(本論文では気体ウェーバー数が小さい場合を対象にしているので変動は無視できる)より高くなっている。考えている波が伝播性を持つ($c_r \neq 0$)ときには、膨らみ部の液体圧が絞り部の液体圧より高くなっていなければならないから、

$$k^2 A + \frac{1}{a + A} > -k^2 A + \frac{1}{a - A} \quad (9)$$

が成立しなければならない。いま、右側に進行する式(8)の波に、左側に進行する同じ波形の波が重畳して表面変位が倍になった場合を考えよう。このとき、絞り部の圧力が膨らみ部の圧力より高くなる、すなわち、

$$2k^2 A + \frac{1}{a + 2A} < -2k^2 A + \frac{1}{a - 2A} \quad (10)$$

が成立すれば、絞り部はますます絞られて不安定化する。式(9)と(10)の条件をとともに満たす範囲を図示すれば、代表長 a で無次元化して表示した第6図の塗りつぶし部となる。

第7図 表面変位の不連続化

第8図 先端液塊への表面の食い込み

この結果によれば、無次元波数 ka が1よりわずかに大きい表面張力波は、比較的小さな振幅でも、重畳によって局所的に不安定化し分断に至ることができるとわかる。

3.2.2 食い込みの発生 計算をしていると、先端液塊が収縮するときに、第7図のように表面変位に不連続点が現れることがあった。これは、実際には第8図に示すような形に表面が変形すべきところであるが、1次元計算では表面の食い込みが記述できないため不連続変化になったものと思われる。右側に動いている先端液塊に直近の絞り部から絞り出された‘高速流体’が衝突すると、軸速度勾配 $(-\partial u / \partial x)$ が大きくなり、衝突部で軸速度が零 ($u = 0$) に近づく。すると、連続の式(2)を満たすように表面が外側に突き出し ($d\delta/dt = -(r/2)(\partial u / \partial x) > 0$)、表面の母線の曲率が大きくなると同時に傾き ($\partial \delta / \partial x$) が増大する。表面の傾きの発散的増大は、運動方程式(1)において右辺の分母を増して表面張力の効きを弱めるから、軸速度の変化が抑えられ ($du/dt = 0$)、上述の傾向をさらに強めて不連続的な表面変位をもたらす。本1次元計算では、その後、この不連続性を解消するように計算が進むが、実際の2次元流では、表面が左側に凹もうとする。このような表面の食い込みが起きると、絞り部の母線の曲率半径(第8図の R) は、食い込みが生じないときの曲率半径(第8図の R') よりも大きくなるので、母線表面張力による復元力が弱まり、絞りの効果が勝って分断に至る可能性が高くなる。このような現象はレーリーの不安定性による分断のような長波長

第9図 分断特性

の分断では起きず、短波長分断のように表面半径が急激に変化するところで起きる。

3.3 分断特性 第2図の初期状態から出発して噴射液に最初の分断が起きるまでの一連の計算を次の手順で行った。(1) 液体ウェーバー数 We を与える。(2) 指定された初期噴射液長 L_0 の計算で、各時刻における絞り部の最小半径 $r_{\min}$ とその位置 $x_{\min}$ を求める。(3) 無次元最小半径 $r_{\min}/a$ が 0.08 より小さくなったら、その位置で分断が起きたとみなし、このときの時間(ループ時間) τ 、分断距離 L_1 、分断波長(先端から分断位置までの距離) λ を記録する。第9図に $We = 1$ の場合の計算結果を示す。図に記入した2本の水平な点線は、下側が定在表面張力波の波長、上側がレーリーの分断波長⁷⁾に対応する。 L_0 を変化させると、 τ 、 L_1 は不規則に変化するが、大まかに見れば、 L_0 と共に増大しながら、定在表面張力波の半波長に対応する間隔で周期的に変化していることがわかる。比較的 L_0 が小さいときには分断波長は定在表面張力波の波長に近い値を保持しているが、 L_0 が大きくなると、レーリーの分断波長に近い値も現れてくる。 $L_1 = L_0$ となる条件は、 L_1 のグラフが、原点から斜めに引かれた破線と交わる点として与えられる。この条件を満たす L_0 は離散的に存在し、そのときの分断波長 λ はいずれも定在表面張力波の波長に近い値を取っている。

初期条件に用いた第2図の状態は、分断によって作られた新たな先端部を持つ噴射液において、それ以前の表面変形の影響を消去したものに对应する。過去の分断時に作られた表面張力波の重畳によって分断が影響を受けないとすれば、 $L_1 = L_0$ となる条件は、定常的な分断を引き起こすループを与える。そのようなループは複数存在する。各ループ $i = 1, 2, \dots$ は独立であるから、それが起きる頻度は、ループ時間 τ_i の逆数に比例し、平均分断距離は

$$\bar{L}_1 = \sum_i (L_{1,i}/\tau_i) / \sum_i (1/\tau_i)$$

で与えられる。実際には、継続的に分断を繰り返す噴射液

にあつては過去の表面変形の影響が残っている。本研究では実施しなかったが、ノズルに最も近い分断だけに注目し、分断する絞り部の流体を、上流に付着した小球に置き換える操作でもって分断を表現することをすれば、本計算を継続的に繰り返すことによって、過去の履歴を持った噴射液の分断過程を計算することができる。このような計算を行えば、分断距離はある値の周りに分散した統計的な性質を持った量になることは、第9図の計算結果を知れば、想像に難くない。特に、比較的短い L_0 での分断は、表面張力波の重なりによる局所的な不安定化によって生じているので確率的な性質は一層強くなる。

第9図で L_0 の増大に伴って L_1 と τ が周期的に変化する理由は、第3.2節で述べた表面張力波のノズル出口と先端での反射と噴射液の伸びを考えればわかる。考えやすくするには、定在表面張力波で考えればよい。先端の液塊が1波長を占めると仮定し、その上流の液柱に整数倍の半波長が存在する条件(共鳴条件)で分断が起きると考える。すると、先端が一定速度で延びるとき、この条件を満たす時間は L_0 によって周期的に変化する。また、 L_0 が定在表面張力波の波長より短いときは、噴射液が2波長分まで伸びないと分断できないから、 $(\lambda - L_0)/(\text{噴射速度} - \text{先端収縮速度})$ だけ余分に時間がかかる。従って L_0 を小さな値から増大させていくと、はじめ τ は直線的に小さくなり、その後、上述のように周期的に変化するようになる。表面張力波が定在波に近い形になるのに要する時間は、先端に近ければ近いほど短い。そのため、履歴を考慮していない本計算においては、 L_0 が大きいほど共鳴型の分断が発生するまでに長い時間がかかるようになる。

3.4 ウェーバー数と噴射液長の影響 第9図には We を 1.6 に変化させたときのグラフも描いてある。注目されるのは、 We を大きくすると、 $L_1 = L_0$ となる L_1 の下限値は大きくなるが、 $We = 1.6$ では常に $L_1 > L_0$ となっていることである。 We と L_0 を大きくしていったときの分断の様子の変化を調べれば、噴射開始(L_0 が小さい)から第2報で述べた定常分断ループ(L_1 が大きい)に至る過程が明らかになる。以下は、そのために行った考察の結果である。

3.4.1 線形論からの知見 式(1)(2)を線形化した式より正弦波形の微小表面変位(式(8))に対して次の分散式が導かれる²⁾。

$$\rho(-U - c)^2 + \rho_g(0 - c)^2 = \sigma \left(k - \frac{1}{ka^2} \right) \quad (11)$$

ここに、 ρ_g は気体密度を表す。 $c = c_r + ic_i$ は複素位相速度であり、 $c_i = 0$ であれば表面張力波、 $c_i > 0$ なら不安定波を表す。後の説明の便宜のために左辺第2項にテラー⁸⁾型の空力干渉項(第2項)を追加してあるが、以下の計算においては、これまでと同様に無視して考える。式(11)より、表面変位が上流に伝播できるためには

$$c_r = -U + \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \left(k - \frac{1}{ka^2} \right)} > 0 \quad (12)$$

すなわち

$$ka > \frac{We + \sqrt{We^2 + 4}}{2} \quad (13)$$

でなければいけない．この表面張力波がノズル出口で反射して波数 k' の不安定波に転化するとすれば，式 (11) を反射波に対する式 (k を反射波の波数 k' に変えるだけ) として，複素位相速度 c の虚部 c'_i が正値を取る条件より，実部 c'_r が $(-U)$ に等しくなると共に

$$0 < ka \left[\sqrt{\frac{1}{We} \left(ka - \frac{1}{ka} \right)} - 1 \right] = k'a < 1 \quad (14)$$

が成立しなければいけない．ただし，ここに k' に対する表現式は反射条件 $kc_r = k'U$ による．左側の不等式は式 (13) と同じ関係式を与える．右側の不等式より条件

$$(ka)^3 - We(ka)^2 - (1 + 2We)ka - We < 0 \quad (15)$$

を得る．増幅率 $\omega = k'c'_i$ が最大になる反射不安定波の波数は $d\omega/dk' = 0$ を解いて $k'a = k'_m a = 1/\sqrt{3} = 0.577$ と定まるから，この波を与える表面張力波の波数 k は，方程式

$$(ka)^3 - \frac{1}{We}(ka)^2 - \left(1 + \frac{2k'_m a}{We} \right) ka - \frac{(k'_m a)^2}{We} = 0 \quad (16)$$

の解として定まる．

3.4.2 ノズル出口での反射による表面張力波の不安定化に対する限界ウェーバー数 第10図で灰色に塗りつぶした領域は，条件 (13) と (15) を同時に満たす範囲を表す．図には生成不安定波の増幅率が最大になる条件も破線によって示してある．噴射速度がもたらすドップラーシフトによって反射波が不安定化する場合を考えているので，噴射速度が零のときには不安定波に転化する表面張力波は存在しないのは当然である．液体ウェーバー数 We の値を増すに従い，特定の波数範囲の表面張力波が不安定波に転化できる

第10図 ノズル出口反射で不安定化する表面張力波

ようになる．ただし，上記の解析では，表面張力波の起源については何も考慮されていない．噴射液の先端の収縮によって作られる表面張力波を対象にすると，表面張力波が取りうる波数には制約が加わる．噴射液の流れより噴射液先端での波の反射によって波長が長くなることはないと考えられるから，最低の波数は先端の収縮によって作られる表面張力波によって決まる．第1報で述べた定在表面張力波の波数 ($ka = \sqrt{3}$ ，第10図の横線) より大きな波数の波のみが作られると仮定すると，ノズル出口で反射して不安定波が生じるのは， We が約 0.5 より大きい場合に限定されることがわかる．しかし，このことは $We < 0.5$ で噴射液の分断が起きないことを意味する訳ではない．前節で詳しく見てきた共鳴型の分断の可能性が残っているからである．実際，噴射速度 U が噴射液先端の収縮速度 $V = \sqrt{\sigma/\rho a}$ より小さい場合 ($We < 1$) には，ノズルから噴射された液体はノズルの近くに液塊を作り，そのサイズが大きくなることによって表面張力の効きが弱くなり (V が減少することに対応)，液塊は成長し続ける．その間に，ノズル出口直近に形成された絞り部が，表面張力波間の共鳴によって局所的に不安定化すると分断する (この分断は，無重力下でのドリッピングに対応する．実際には，ノズルの濡れ性も影響する)． $We > 1$ の場合に起きる共鳴型分断の特性 (第12図参照) を知るために，第11図に示すように，噴射液 (液柱) 先端から放射されたある表面張力波成分がノズル出口に到達し，反射してきた波 (不安定波とは限らない) が噴射液先端部に存在する表面張力波 (定在表面張力波の波長 $\lambda_\#$ に等しい) と共鳴し，波長 $\lambda_\#$ で分断する場合を考えよう．反射波の伝播速度を一般に U' とすると，分断距離 L_1 は

$$L_1 = L_0 \frac{U'}{V + U' - U} \left(1 - \frac{\lambda_\#}{L_0} + \frac{U - V}{c_r} \right) \quad (17)$$

で得られる．特に，反射波が不安定波の場合には $U' = U$ であり，

第11図 1ループ共鳴型分断過程

第12図 共鳴型分断例

第13図 レーリー不安定波の励起

$$L_1 = L_0 \sqrt{We} \left(1 - \frac{\lambda_{\#}}{L_0} + \frac{\sqrt{We} - 1}{c_r/V} \right) \quad (18)$$

となる．式 (17) より，第 9 図に示した計算結果に一致し， L_0 が $\lambda_{\#}$ と同じ程度の大きさであれば $L_1 = L_0$ となることができるが， L_0 が $\lambda_{\#}$ より十分大きいときには， We がある値 (> 1) より大きくなると必ず $L_1 > L_0$ となることがわかる．しかし，実際の噴射液の分断では繰り返し分断が起き，噴射液は過去の分断の履歴を持つので，共鳴を引き起こす波は式 (17) で考えた 1 ループの波に限らない．そのため，上記の限界のウェーバー数を越えていても，分断距離の短縮が可能になり，最終的に定常的な分断距離に落ち着くことができる．加えて，さらに We が大きくなると，これまで無視してきた気液速度差に基づくガス圧作用の効果 (式 (11) 左辺第 2 項) が効くようになる．この項が表面張力波の不安定化に果たす役割については第 1 報と第 2 報で詳しく論じてきたので，ここで改めて繰り返すことはしない．

このように短波長分断の機構が説明できるようになったことより，残された問題として，最後に，これまでに得られた知見をまとめて，噴射液でのレーリーの不安定性の発現機構を明らかにする．

3.4.3 レーリーの不安定性の発現機構 第 2 報¹⁾ で詳述したように，噴射液の先端の収縮によって作られる上流伝播表面張力波は分散波であり，短い波長の波から順番に先行して伝わる．従って，長い噴射液を考えた場合，まず噴射液先端から位相速度の大きな短波長の表面張力波が小さな振幅を持ってノズル出口に達する．この波は，ノズルで反射して波長が伸びても伝播性を失わないので，反射後も先へ先へと伝わっていく．ノズルに到達する表面張力波の波長が長くなり，第 10 図に示した上限波数の表面張力波がノズルに達するようになると (噴射液が長いので振幅は小さい)，反射によって不安定化し，噴射液と一緒に流下する．かくして，表面張力波のまま反射した波 (速度 $c_r' > U$ で下流に伝播する) と不安定波 (速度 U で流下する) の間隔は時間が経つに従って次第に拡大し，最終的に噴射液は反射不安定波だけによって覆われるようになる．この段階に

なると，増幅率の大きな不安定波の効きが卓越して現れてくるようになるので，それまでの下流から上流に向かって振幅が増大する形になった反射波から，不安定波の発達によって下流に向かって振幅が増大する形へと変化する．レーリーの不安定性は，このようになった段階ではじめて現れると考えられる．実際，第 13 図に， $We = 1$ ， $L_0/a = 20$ に対して無次元時間 $\hat{t} = 16$ のときに作られる表面張力波と反射波のグラフを $\hat{t} = 12$ と 14 のときのものとのノズル出口位置をそろえて示してある．図の作り方は第 5 図と同じである．レーリーの不安定波が数波長入るように，初期噴射液長 L_0 を大きめに設定し，噴射液と同じ速度で移動する波が初期噴射液長を横断するのに要する時間より短い時間の現象を見ているので，ノズルで反射した波が先端で再び反射しノズルに達することはない．また，先端部の液塊の振動によって発生する摂動もノズルの近くまでは及んでいないと考えられる．図を見ると，いずれの時刻においてもノズル出口の右側に示した表面張力波はノズル出口の近くにおいて同じ波長になっている．このことより，ノズル出口の左側の波は，この特定の波長の波がノズル出口で反射し不安定化したものであることが知れる．ノズル近くの表面変位は小さいので，反射波は線形的に振舞う．灰色に塗りつぶした領域にある反射波を調べると，その頂点の移動速度が噴射速度に一致しており，確かに不安定波になっていることがわかる．また，振幅が時間と共に直線的に増大しており，その無次元増幅率は無次元時間 4 の間に 4 倍弱になっていることより 1 弱と評価され，レーリーの最大無次元増幅率 0.6 に近い値になっている．波長もレーリーの最大増幅率波の波長にほぼ一致している．

以上の考察より，伝播性の反射表面張力波の振幅が十分小さく，定在表面張力波に反射表面張力波が重畳しても分断に至らないほど噴射液が長くなると，レーリーの不安定性に基づく規則的な噴射液の分断は発現しないことが知れる．噴射液が長くなったときの特徴的な変化は次のとおりであると考えられる．

1) 分断周期よりもループ時間 (ある分断によってできた噴射液先端から放射された表面張力波がノズル出口での反射によってレーリーの不安定波に転化し，それが成長し

て分断に至るまでの時間)の方が長くなるので、継続的にレーリーの不安定性による噴射液の分断が起きるためには、分断をまたいだ波の伝播によって、ループが完成する形になっていなければいけない。

2) 短波長の波の振幅は不安定波の発達する位置で非常に小さくなるので、短い噴射液の場合(定在波を形成する過程での共鳴による分断が起きる)とは異なり、波の重ね合わせによって分断が起きることはなくなる。その結果、ノズル(あるいは空力干渉点)からの不安定波の流下過程が分断を支配し、最大増幅率を与えるレーリーの不安定波に基づいた分断に至る。

4. お わ り に

1 次元計算に基づいて、分断によって新たにできた噴射液の先端から上流に放射される短波長の表面張力波がノズル出口と干渉する様子を詳しく調べ、以下の事柄が明らかになった。

1) 分断距離が短い条件では、噴射液の変形はどこでも大きく、定在的な表面張力波が形成されていく過程において、波の重畳によって局所的に不安定化して分断が起きる。分断波長は定在波の波長にほぼ等しい。特定の不安定波が成長するのに必要な十分な長さがないため、噴射液の表面形状の時間変化は不規則で、分断距離の揺らぎが大きい。

2) 分断距離が長くなると、ノズル出口で反射し不安定化する表面張力波の振幅が小さくなるため、流下する間に特定の波長の不安定波が卓越して成長するようになる。そのため、分断が卓越不安定波に支配されて起きれば、規則的な分断が可能になる。噴射液でのレーリーの不安定性による分断は、このような条件で発生する。

3) 特に、周囲気体との干渉の効果が無視できる低速流噴射でレーリー波長の分断が継続的に起きる場合には、噴射液に対する擾乱が導入される箇所は、分断箇所とノズル出口しかないので、上述の分断機構は説得的である。

4) ノズル出口から流下する不安定波の波長と噴射液先端から放射される表面張力波の波長の間には大きな開きがあるので、これらの波が互いに強く干渉し合うことはない。そのため、2)に記した自励的な噴射液の不安定化機構は線形論の枠組みで捉えることができる。

液体ウェーバー数が大きくなると、高波数の表面張力波成分が重要になるが、現在の計算方法では、この計算を精度よく行うことはできない。第2報の漸近解を用いた解析は、この欠陥を補ってくれるものになっていることを最後に付記しておく。

本研究は(財)日本宇宙フォーラム宇宙環境利用に関する公募地上研究(次期宇宙環境利用研究)ならびに文部科学省科学補助金(基盤研究(B))の補助を受けて行われた。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 梅村 章: 噴射液の自己不安定化機構の理論的研究, 第2報: 分断フィードバックループ, 日本航空宇宙学会論文集, 55 (2007), pp. 224-231.
- 2) Umemura, A. and Wakashima, Y.: Atomization Regimes of a Round Liquid Jet with Near-Critical Mixing Surface at High Pressure, Proc. Combust. Inst., 29 (2002), pp. 633-640.
- 3) 梅村 章: 微小重力環境を利用した近臨界混合表面液ジェットの不安定性の研究(ノズル出口でのレーリー・テラー不安定波の励起機構と短波長分断機構の解明), 日本燃焼学会誌, 46 (2004), pp. 50-59.
- 4) 梅村 章: 近臨界混合表面液ジェットのテラー型不安定性の研究(乱流微粒化機構を探るための基礎的な考察), 日本燃焼学会誌, 45 (2003), pp. 49-61.
- 5) 梅村 章: 微小重力環境を利用した液体ジェットの不安定性の研究, 日本マイクロ重力応用学会誌, 21 (2004), pp. 293-299.
- 6) 梅村 章: 噴射液の自己不安定化機構の理論的研究, 第1報: 噴射液の不安定化に関連する表面張力波, 日本航空宇宙学会論文集, 55 (2007), pp. 216-223.
- 7) Lord Rayleigh: The Theory of Sound, Vol. 2, Dover, NY, 1945.
- 8) Bachelor, G. K.: Collected Works of G. I. Taylor, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.