ケーブルを介して曳航される滑空機系の固有値解析 (第1報)*¹

Eigenvalue Analysis of a Cable-Towed Glider System (Part I)

佐藤 親 俊*²・柚原 直 弘*³
Chikatoshi SATOH and Naohiro YUHARA

Key Words: Stability and Control, Towed Glider, Cable Dynamics, Eigenvalue Analysis

Abstract: An analysis model for numerical estimation of eigenvalues of “a cable-towed glider” system is presented in this paper. This paper takes up longitudinal dynamics of the system. A cable dynamics is formulated as a distributed parameter system with flexibility extensibility and curvature of cable. For a specific example of a horizontal towing validity of the estimated eigenvalues is verified by the results of an identification of dominant modes found in the transient response of the system and stability of the system is analyzed based on root-loci regarding the relative height of a glider to a tug-plane. Modes dominantly affected by curvature of cable are also specified.

1. は じ め に

テザー衛星や標的機の曳航、飛行船や気球あるいはブイの係留等のように、ケーブルを介して物体を曳航あるいは係留するシステム（以下、結合系と呼ぶ）の安定性は運用条件に依存して大きく変化することが知られている。場合によっては結合系が不安定となることもあるため、システム運用の安全上、結合系の安定性解析が重要である。本論は、そのような結合系の例として滑空機の飛行機曳航系を取り上げ、固有値解析の立場から柔軟な弾性体ケーブルと滑空機からなる系の縦面内の運動における安定性と固有振動数特性を論じるものである。

結合系の安定性を固有値解析によって論じているこれまでの研究を概観すると、原典として Glauert¹⁾ の研究を挙げることができるが、そこで用いられている結合系の運動モデルは、ケーブルを質量の無い剛体棒で置き換え、その棒の両端にピン結合された物体の運動を表したものとなっている。その後の、例えば O'hara²⁾ の研究では、Glauert¹⁾ のモデルにケーブルの弾性による伸縮の影響を反映させるよう、ケーブルを質量の無い1本の直線バネで置き換えている。しかし、これらの古典的研究ではケーブル自体の運動が扱われていない。その後、DeLaurier³⁾ の研究や Nakagawa⁴⁾ の研究に見られるように、分布定数系として定式化された柔軟なケーブルの運動を考慮した結合系の運動モデルが扱われている。しかし、これらにおいては、ケーブルを非弾性体としているためにケーブルの軸方向の運動は省略されている。1990年代の研究では、その研究例は少ないものの、さらにケーブルを柔軟な弾性ケーブルとして扱い、

ケーブルの半径方向と軸方向の運動が考慮されている。中でも、1993年の de Matteis⁵⁾ による論文では、結合系として滑空機の飛行機曳航系を取り上げ、曳航機に対する滑空機の高度差（相対高度）によっては系が不安定となることを具体例において示している。また、1998年に Etkin⁶⁾ は揚力を生じないとした標的機のような物体を曳航する結合系の具体例で、相対高度によって不安定となる特性モードを抽出し、系の安定性を論じている。

これらに先立って、1973年に著者ら⁷⁾ は、柔軟な弾性体ケーブルの運動を双曲型偏微分方程式で、曳航される滑空機の運動を常微分方程式で記述して、滑空機を曳航する飛行機は定常飛行を続けるとした場合の結合系の時間応答を求めている。そこでは、飛行機曳航時に曳航機に対する滑空機の相対高度を高い位置に保持する形態（ハイトウ）と低い位置に保持する形態（ロウトウ）それぞれにおいて、滑空機の昇降舵インパルス入力に対する滑空機の過渡応答に、固有振動数が1 (rad/sec) 以下の卓越的振動モードが現れ、ハイトウでの振動モードの方がより高い固有振動数を持ち、より明確な発散傾向を示すことを明らかにしている。その上で、著者らは、結合系の動特性が相対高度によってこのように異なることが操縦性の違いの要因になっていると論定している。その発端は、従来、滑空機パイロットによって指摘されていた位置保持操縦の難易、すなわち「ハイトウでの操縦の方が、ロウトウでのそれよりも難しい」とされている事象の要因究明であった。さらに、著者らは、このような結論の妥当性を固有値解析によって検証するため、単純化した結合系ダイナミクスに対して相対高度をパラメータとする根軌跡を求め、系の安定性や固有振動数の変化を調べている⁸⁾。しかし、その結果からは、上述の卓越的振動モードは見出されなかった。ケーブルの運動方程式の線形化を行うと、半径方向の作用力項には、「結合系の平衡状態におけるケーブルの曲率（平衡曲率）と変動張力

*¹ © 2007 日本航空宇宙学会

平成 19 年 1 月 30 日原稿受理

*² 日本大学理工学部航空宇宙工学科

*³ 日本大学総合科学研究所

との積」が現れるが、著者ら⁸⁾は、具体例では平衡曲率が小さいため、この積を無視できるとした。本論では、このことが一因であると考え、ケーブルの運動の定式化を見直すと共に、結合系の固有値推定のための検討を加え、所期の目的を果たしている。ちなみに、著者ら⁸⁾による定式化と固有値解析法が異なるため直接の比較はできないが、de Matteis⁹⁾による定式化では、この積に関する作用力が考慮されている。また、そこでは、ケーブルの質量を小さくし相対高度が無いようにしてケーブルの平衡形状を直線的にしてみると、結合系の一つの特性モードの固有振動数が弾性振動 (Von Flotow ら⁹⁾ のいうバウンス) の値に近づくと述べられているが、その理由が平衡曲率の影響によるものであると言明されていない。本論では、結合系の推定された特性モードを詳しく吟味し、曳航時の滑空機の相対高度が各特性モードに与える影響ならびにケーブルの平衡曲率の影響を受ける特性モードも明らかにしている。

本論は以下のように構成されている。2章では、まずケーブルの運動方程式について述べる。次に、この式に文献8)で用いた離散化手法を適用して、結合系の固有値推定のための離散化モデルを導く。3章では、離散化モデルによる結合系の特性方程式 (振動数方程式) を示す。4章では、文献8)の具体例を引用して固有値推定を行う。その前段階で、離散化数による特性モードの固有値の違いを検討し、推定固有値と定めるに必要な離散化数を設定している。その上で、結合系における滑空機の時間応答に現れる卓越振動モードを同定して、推定固有値の妥当性を確かめている。また、平衡曲率の影響を強く受ける特性モードについて述べる。これらを踏まえて、相対高度をパラメータとする根軌跡を求め、結合系の相対高度に対する動特性の変化について論じる。5章は、得られた結果のまとめである。

2. 結合系の固有値推定のための離散化モデル

本論で取り上げる「滑空機の飛行機曳航系」、すなわち、曳航機・ケーブル・滑空機の結合系の縦面内の運動モデルは、1本の捩りを受けない柔軟な弾性体ケーブルの運動方程式とケーブルの両端での境界条件から構成される。

2.1 柔軟な弾性体ケーブルの運動方程式 第1図に示すように、 Z_E 軸を鉛直上方とする地面軸系 ($O_E - X_E, Z_E$) に対して、単位長さ当りの質量 μ 、縦弾性係数 E 、断面積

第1図 一様気流中のケーブルの微小要素

A_c のそれぞれが異なるケーブルが、速度 U_0 で水平飛行している場合のケーブルの運動を考える。曳航機側の結合点を原点 O とし、地面軸系に対して平行移動している動座標系 ($O - XZ$) において、原点 O を同じくするケーブル座標 s と、時間 t を独立変数とする軸方向と半径方向の微小要素の運動方程式は次の双曲型偏微分方程式^{7, 8)} によって記述される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_c}{\partial s} + \frac{\partial F_a}{\partial s} &= \mu \left(\frac{\partial V_a}{\partial t} - V_r \frac{\partial \theta_c}{\partial t} \right) \\ T_c \frac{\partial \theta_c}{\partial s} + \frac{\partial F_r}{\partial s} &= \mu \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_a \frac{\partial \theta_c}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial V_a}{\partial s} - V_r \frac{\partial \theta_c}{\partial s} &= \left(\frac{1}{EA_c} \right) \frac{\partial T_c}{\partial t} \\ \frac{\partial V_r}{\partial s} + V_a \frac{\partial \theta_c}{\partial s} &= \left(1 + \frac{T_c}{EA_c} \right) \frac{\partial \theta_c}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、ケーブルの状態量 T_c 、 θ_c 、 V_a そして V_r それぞれは張力、傾角 (水平に対するケーブルの微小要素の姿勢角)、絶対速度の軸方向成分と半径方向成分を表す。 F_a と F_r は空気力と重力からなる外力 F の軸方向成分と半径方向成分を示す。式中、第1行は軸方向の運動方程式を、第2行は半径方向のそれを表している。そして、第3行は軸方向の連続の式から得られる歪速度を、第4行は半径方向の連続の式から得られるケーブルの傾角の時間変化率を表す。

2.2 ケーブルの平衡状態 平衡状態では、ケーブルの微小要素はケーブル座標の原点に対して相対速度を持たないので、絶対速度の軸方向成分と半径方向成分はそれぞれ次式で書ける。

$$\begin{aligned} V_{a0}(s) &= -U_0 \cos(\theta_{c0}(s)) \\ V_{r0}(s) &= U_0 \sin(\theta_{c0}(s)) \end{aligned}$$

ケーブルの平衡方程式は、(1) 式から

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_{c0}(s)}{ds} + \frac{dF_{a0}(s)}{ds} &= 0 \\ T_{c0}(s) \frac{d\theta_{c0}(s)}{ds} + \frac{dF_{r0}(s)}{ds} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と書ける。ここに、ケーブルの状態量と外力に添字 0 をつけて、それぞれの平衡状態での値を表している。以下、 $T_{c0}(s)$ を平衡張力、 $\theta_{c0}(s)$ を平衡傾角と呼ぶ。 $\theta_{c0}(s)$ の s に関する変化率 $d\theta_{c0}(s)/ds$ すなわち平衡曲率を $\kappa_0(s)$ と表し、平衡状態での歪 (平衡歪) $T_{c0}(s)/EA_c$ を $\varepsilon_0(s)$ と記す。

次に、動座標系 ($O \rightarrow XZ$) の面内に位置する平衡状態でのケーブルの形状 (平衡形状) を以下のようにして求める。まず、ケーブルに作用する空気力のケーブルの軸方向の空力係数 C_{Fa} 、半径方向のそれを C_{Fr} とし、それぞれは文献7, 8) で用いているように $\theta_c(s, t)$ 、 $|\theta_c(s, t)| \leq \pi/2$ による次の関数で与えられるとする¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} C_{Fa}(\theta_c(s, t)) &= 0.02 \cos(\theta_c(s, t)) \\ C_{Fr}(\theta_c(s, t)) &= -[0.02 + 1.1 |\sin(\theta_c(s, t))|] \sin(\theta_c(s, t)) \end{aligned}$$

第2図 曳航された滑空機

そして、大気密度を ρ 、ケーブル直径を D_c 、重力加速度を g で表すと、無風下での平衡状態での外力の s に関する変化率、すなわち (2) 式の $dF_{a0}(s)/ds$ と $dF_{r0}(s)/ds$ のそれぞれは、

$$\begin{aligned}\frac{dF_{a0}(s)}{ds} &= \frac{1}{2}\rho U_0^2 D_c C_{Fa}(\theta_{c0}(s)) - \mu g \sin(\theta_{c0}(s)) \\ \frac{dF_{r0}(s)}{ds} &= \frac{1}{2}\rho U_0^2 D_c C_{Fr}(\theta_{c0}(s)) - \mu g \cos(\theta_{c0}(s))\end{aligned}$$

と書くことができる。

従って、 $T_{c0}(s)$ と $\theta_{c0}(s)$ を求める問題は (2) 式の初期値問題となる。初期値として $T_{c0}(L)$ とその作用方向 $\theta_{c0}(L)$ を与えることにする。この場合、第2図に示す、質量 M_b の滑空機に作用する、重力 $M_b g$ 、水平定常飛行中の揚力 $Lift_0$ と抗力 $Drag_0$ 、並びに平衡張力 $T_{c0}(L)$ に関する力の釣合い方程式

$$\begin{aligned}M_b g + T_{c0}(L) \sin(\theta_{c0}(L)) - Lift_0 &= 0 \\ T_{c0}(L) \cos(\theta_{c0}(L)) - Drag_0 &= 0\end{aligned}$$

に対して、滑空機の釣合い迎角 α_0 に対する $Lift_0$ と $Drag_0$ が与えられると、 $T_{c0}(L)$ と $\theta_{c0}(L)$ は

$$\begin{aligned}\theta_{c0}(L) &= \tan^{-1}((Lift_0 - M_b g)/Drag_0) \\ T_{c0}(L) &= Drag_0 / \cos(\theta_{c0}(L))\end{aligned}$$

で求まる。そこで、ケーブル座標 s に対して逆向きに (2) 式の数値積分を行うと、滑空機側フック点を原点とする、ケーブル座標における平衡張力、平衡歪それに平衡傾角、さらにケーブルの位置が定まることになる。その上で、計算結果を動座標系 ($O-XZ$) に置き換えると、 X (横位置) と Z (相対縦位置) によって平衡形状が定まる。なお、相対高度は平衡形状の、曳航機側フック点に対する滑空機側フック点の相対縦位置をいう。

2.3 ケーブルの運動方程式の線形化 ケーブルの状態量を平衡状態量と微小擾乱量との和で表し、平衡状態まわりに (1) 式を線形化する。平衡状態量 $T_{c0}(s)$ 、 $\theta_{c0}(s)$ 、 $V_{a0}(s)$ と $V_{r0}(s)$ それぞれについての微小擾乱量を τ_c 、 θ_c 、 v_a と v_r とすると、状態量 T_c 、 θ_c 、 V_a と V_r は

$$\begin{aligned}T_c(s, t) &= T_{c0}(s) + \tau_c(s, t) \\ \theta_c(s, t) &= \theta_{c0}(s) + \theta_c(s, t) \\ V_a(s, t) &= -U_0 \cos(\theta_{c0}(s)) + v_a(s, t) \\ V_r(s, t) &= U_0 \sin(\theta_{c0}(s)) + v_r(s, t)\end{aligned}$$

で書けるので、(1) 式は微小擾乱量を状態変数とする、次の変係数の双曲型偏微分方程式で書き改められる。

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \tau_c}{\partial s} &= \mu \frac{\partial v_a}{\partial t} + f_{a\theta_c}(s)\theta_c + f_{av_r}(s)v_r \\ \frac{\partial \theta_c}{\partial s} &= \frac{1}{T_{c0}(s)} \left\{ \mu \frac{\partial v_r}{\partial t} - \kappa_0(s)\tau_c + f_{r\theta_c}(s)\theta_c + f_{rv_r}(s)v_r \right\} \\ \frac{\partial v_a}{\partial s} &= \frac{1}{EA_c} \frac{\partial \tau_c}{\partial t} + \kappa_0(s)v_r \\ \frac{\partial v_r}{\partial s} &= (1 + \varepsilon_0(s)) \frac{\partial \theta_c}{\partial t} - \kappa_0(s)v_a\end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、第2行右辺の $\{ \}$ 内の第2項が文献8) で省略している「平衡曲率と変動張力との積」である。なお、外力の微小擾乱量として、 θ_c と v_r による空気力の変動と、 θ_c による重力の変動を考慮しており、(3) 式の第1行と第2行のこれらに関する微係数 $f_{a\theta_c}$ 、 f_{av_r} 、 $f_{r\theta_c}$ 、 f_{rv_r} それぞれは $\theta_{c0}(s)$ で定まるので、変係数になっている。

2.4 柔軟な弾性体ケーブルの運動方程式の離散化 曳航機と曳航される滑空機の運動は、通常、定係数常微分方程式によって表現される。対して、これら両機を結ぶ柔軟な弾性体ケーブルの運動は (3) 式のような変係数の偏微分方程式で表現される。このままであると、結合系の固有値解析が困難であることから、固有値は変係数偏微分方程式に何らかの離散化法を適用して数値解析的に推定されている。ちなみに de Matteis⁵⁾ は選点法を、Etkin⁶⁾ は有限差分法を用いて、変係数偏微分方程式を定係数常微分方程式として表し、結合系全体を定係数常微分方程式系で表現している。それによって、特性方程式の次数は限定され、推定される固有値の数は有限となる。しかしながら、偏微分方程式を含む結合系の固有値は理論的に無限個存在するので、特性方程式の次数が限定されない離散化が望ましい。この見地から、ケーブルを軸 (長手) 方向に分割し、分割要素ごとの変係数を定係数化するという離散化法^{8, 11)} を用いて、(3) 式の離散化を行う。

まず、時間 t に関するラプラス変換の演算子を σ として、(3) 式をラプラス変換する。ここで、ラプラス変換後の (3) 式を行列形式で表すと、次式で示せる。

$$\frac{dX_c(s, \sigma)}{ds} = F_c(s, \sigma) X_c(s, \sigma) \quad (4-a)$$

ここで、状態ベクトル $X_c(s, \sigma)$ は

$$X_c(s, \sigma) = [\hat{\tau}_c(s), \hat{\theta}_c(s), \hat{v}_a(s), \hat{v}_r(s)]^T \quad (4-b)$$

であり、 t に関するラプラス変換後の状態変数を表すため変数それぞれに記号 $\hat{\cdot}$ を付している。(4-a) 式の変係数の伝

達行列 $F_c(s, \sigma)$ は

$$F_c(s, \sigma) = \begin{bmatrix} 0 & f_{a\theta_c}(s) & \mu\sigma & f_{av_r}(s) \\ \frac{-\kappa_0(s)}{T_{c0}(s)} & \frac{f_{r\theta_c}(s)}{T_{c0}(s)} & 0 & \frac{\mu\sigma + f_{rv_r}(s)}{T_{c0}(s)} \\ \frac{\sigma}{EA_c} & 0 & 0 & \kappa_0(s) \\ 0 & (1 + \varepsilon_0(s))\sigma - \kappa_0(s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-c)$$

である．

次いで，ケーブルを N 個の要素に分割して，ケーブルの曳航機側から要素ごとに順番付けし，各要素における (4-c) 式の伝達行列の変係数を定係数で置き換える．ちなみに s の変域 ($s_{i-1} \leq s \leq s_i$, $\Delta l_i = s_i - s_{i-1}$) における i 番目のケーブルの分割要素について，(4-a) 式は，

$$\frac{d\xi_i(s, \sigma)}{ds} = F_{ci}(\sigma)\xi_i(s, \sigma) \quad (5-a)$$

と書ける．ここで， $\xi_i(s, \sigma)$ は， $X_c(s, \sigma)$ に対応するケーブルの分割要素 i での状態ベクトル

$$\xi_i(s, \sigma) = [\tilde{\tau}_c(s), \tilde{\theta}_c(s), \tilde{v}_a(s), \tilde{v}_r(s)]_i^T \quad (5-b)$$

である．なお， $X_c(s, \sigma)$ の離散化後の状態変数を示すため， $\xi_i(s, \sigma)$ の状態変数それぞれに $\sim$ 記号を付している．また， $F_{ci}(\sigma)$ はケーブルの分割要素 i での定係数伝達行列

$$F_{ci}(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & f_{a\theta_{ci}} & \mu\sigma & f_{av_{ri}} \\ \frac{-\kappa_{0i}}{T_{c0i}} & \frac{f_{r\theta_{ci}}}{T_{c0i}} & 0 & \frac{\mu\sigma + f_{rv_{ri}}}{T_{c0i}} \\ \frac{\sigma}{EA_c} & 0 & 0 & \kappa_{0i} \\ 0 & (1 + \varepsilon_{0i})\sigma - \kappa_{0i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-c)$$

を表す．定係数伝達行列の要素の中で，添字 i を付した係数それぞれには，ケーブルの分割要素 i の (4-c) 式の伝達行列 $F_c(s, \sigma)$ の変係数の代表値として， Δl_i 間における平均値を与えることにする．ちなみに Δl_i 間の平衡形状は平衡曲率 κ_{0i} の円弧で表現される．

以上によって，ケーブルの運動方程式は，変係数が分割区間ごとに定係数化された偏微分方程式 (5-a) 式の N 個の連結によって記述されることになる．なお，両端が固定された場合のケーブル単体の運動モデルについては次節の④に述べている．

2.5 ケーブルの境界条件 曳航機側と滑空機側のフック点でピン結合されたケーブルの境界条件には文献 7, 8) で与えている条件，すなわち曳航機側では飛行速度が一定に維持されるとして変動速度が無いという条件を与えると，変動速度 $\tilde{v}_a(0)$ と $\tilde{v}_r(0)$ は零複素量 $\tilde{0}$ となり，ケーブルの分割要素 1 で曳航機側の境界値 $\xi_1(0, \sigma)$ は次式で書ける．

$$\xi_1(0, \sigma) = [\tilde{\tau}_c(0), \tilde{\theta}_c(0), \tilde{0}, \tilde{0}]^T \quad (6)$$

一方，ケーブルの分割要素 N で滑空機側の境界条件を表す境界値 $\xi_N(L, \sigma)$ は次式で書ける．

$$\xi_N(L, \sigma) = [\tilde{\tau}_c(L), \tilde{\theta}_c(L), \tilde{v}_a(L), \tilde{v}_r(L)]^T \quad (7)$$

フック点 A (第 2 図) に作用する滑空機への入力，すなわち (7) 式の変動張力 $\tilde{\tau}_c(L)$ と張力の作用方向の変化を表す $\tilde{\theta}_c(L)$ によって滑空機は非定常運動することになる．その運動中の滑空機側のケーブルとの結合条件は，フック点 A における滑空機の変動速度と (7) 式のケーブルの変動速度とがつねに合致しているという条件となる．この結合条件は次のようにして求められる．質量 M_b ，ピッチ軸まわりの慣性モーメント I_Y の滑空機 (第 2 図) の運動を安定軸系 ($O_{CG}-X_S, Z_S$) による有次元運動方程式によって記述する¹²⁾．その式を線形化し，安定微係数 $Z_{\dot{w}}$ を無視できるとすれば，時間 t に関するラプラス変換した滑空機の運動方程式は次のようになる．

$$\left. \begin{aligned} & [\sigma - X_u]\hat{u} - X_w\hat{w} - X_{\theta}\hat{\theta} \\ & = X_{\tau}\tilde{\tau}_c(L) + X_{\theta_c}\tilde{\theta}_c(L) \\ & - Z_u\hat{u} + [\sigma - Z_w]\hat{w} - [\sigma(U_0 + Z_q) + Z_{\theta}]\hat{\theta} \\ & = Z_{\tau}\tilde{\tau}_c(L) + Z_{\theta_c}\tilde{\theta}_c(L) \\ & - M_u^*\hat{u} - M_w^*\hat{w} + [\sigma^2 - M_q^*\sigma - M_{\theta}^*]\hat{\theta} \\ & = M_{\tau}^*\tilde{\tau}_c(L) + M_{\theta_c}^*\tilde{\theta}_c(L) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに， $\hat{u}$, $\hat{w}$, $\hat{\theta}$ は，それぞれ第 2 図に示す滑空機の X_S 軸方向の変動速度， Z_S 軸方向の変動速度，姿勢角変化を表し，滑空機のラプラス変換後の状態変数である．本論では，文献 13) を参考に有次元安定微係数を推算している．なお，(8) 式で，ケーブルから受ける X_S 方向と Z_S 方向の入力の係数それぞれを以下に示す．

$$\begin{aligned} X_{\tau} &= \cos(\theta_{c0}(L))/M_b, & X_{\theta_c} &= -T_{c0}(L)\sin(\theta_{c0}(L))/M_b \\ Z_{\tau} &= \sin(\theta_{c0}(L))/M_b, & Z_{\theta_c} &= T_{c0}(L)\cos(\theta_{c0}(L))/M_b \\ M_{\tau}^* &= M_{\tau} + M_{\dot{w}}Z_{\tau}, & M_{\theta_c}^* &= M_{\theta_c} + M_{\dot{w}}Z_{\theta_c} \\ M_{\tau} &= -L_A\sin(\beta^*)/I_Y, & M_{\theta_c} &= -T_{c0}(L)L_A\cos(\beta^*)/I_Y \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} M_u^* &= M_u + M_{\dot{w}}Z_u, & M_w^* &= M_w + M_{\dot{w}}Z_w, \\ M_q^* &= M_q + M_{\dot{w}}(U_0 + Z_q), & M_{\theta}^* &= M_{\theta} + M_{\dot{w}}Z_{\theta} \end{aligned}$$

である．ここに， β^* は角 $(\theta_{c0}(L) - (\beta - \theta_0))$ を表し， β は X_{body} 軸に対してフック点 A と滑空機の重心を結ぶ線分 L_A のなす角 (第 2 図) であり， β と θ_0 との差角 $(\beta - \theta_0)$ は水平線に対して線分 L_A のなす角である．ちなみに， β^* が零の場合には，平衡張力 $T_{c0}(L)$ の水平線に対してなす傾角 $\theta_{c0}(L)$ は差角 $(\beta - \theta_0)$ と一致し， $T_{c0}(L)$ は滑空機の重心を通過して作用する．

以上により，(8) 式を行列表現すると

$$A_b(\sigma)X_b = \beta[\tilde{\tau}_c(L), \tilde{\theta}_c(L)]^T \quad (9-a)$$

と書くことができ、滑空機の状態ベクトル X_b は、

$$X_b = [\hat{u}, \hat{w}, \hat{\theta}]^T \quad (9-b)$$

システム行列 $A_b(\sigma)$ は、

$$A_b(\sigma) = \begin{bmatrix} [\sigma - X_u] & -X_w & -X_\theta \\ -Z_u & [\sigma - Z_w] & -[\sigma(U_0 + Z_q) + Z_\theta] \\ -M_u^* & -[M_w^*] & [\sigma^2 - M_q^* \sigma - M_\theta^*] \end{bmatrix} \quad (9-c)$$

である。ケーブルからの入力ベクトル $[\tilde{\tau}_c(L), \tilde{\theta}_c(L)]^T$ に関する入力行列 B は次式で書ける。

$$B = \begin{bmatrix} X_\tau & X_{\theta_c} \\ Z_\tau & Z_{\theta_c} \\ M_\tau^* & M_{\theta_c}^* \end{bmatrix} \quad (9-d)$$

ここで、フック点 A でのケーブルの軸方向と半径方向の変動速度 $[\tilde{v}_{aA}, \tilde{v}_{rA}]$ と (9-a) 式で支配される滑空機の状態ベクトル X_b との運動学的関係が結合行列 $C(\sigma)$

$$C(\sigma) = \begin{bmatrix} -\cos \theta_{c0}(L) & -\sin \theta_{c0}(L) & U_0 \sin \theta_0 + \sigma L_A \sin \beta^* \\ \sin \theta_{c0}(L) & -\cos \theta_{c0}(L) & U_0 \cos \theta_0 + \sigma L_A \cos \beta^* \end{bmatrix}$$

を用いて

$$[\tilde{v}_{aA}, \tilde{v}_{rA}]^T = C(\sigma) X_b$$

と書けるので、ケーブルと滑空機との結合条件は

$$[\tilde{v}_a(L), \tilde{v}_r(L)]^T = [\tilde{v}_{aA}, \tilde{v}_{rA}]^T = C(\sigma) X_b \quad (10)$$

として表される。

以上により、時間 t に関するラプラス変換後の結合系の運動モデルは、

① ケーブルの分割要素区間それぞれで離散化されたケーブル座標 s に関する常微分方程式 (5-a) 式の N 個の連立によるケーブル全体の運動方程式、

② その曳航機側の境界条件 (6) 式、

③ ケーブルによって拘束された滑空機側の境界条件 (7) 式、すなわち滑空機とケーブルとの結合条件 (10) 式) によって構成される。本論では、この結合系の運動モデルを離散化モデルと呼ぶ。

④ 両端が固定された場合のケーブル単体の運動モデルは、(5-a) 式の N 個の連結によって記述されたケーブルの運動方程式、曳航機側の境界条件 (6) 式、そして滑空機側の境界条件 (7) 式) において結合点 A での変動速度が無い条件 $([\tilde{v}_a(L), \tilde{v}_r(L)]^T = [\tilde{0}, \tilde{0}]^T)$ 、すなわち

$$\xi_N(L, \sigma) = [\tilde{\tau}_c(L), \tilde{\theta}_c(L), \tilde{0}, \tilde{0}]^T$$

から構成される。任意な $[\tilde{\tau}_c(0), \tilde{\theta}_c(0)]^T$ に対するケーブル単体の自由運動の同次方程式は次章に示す (14) 式で $[\tilde{v}_a(L), \tilde{v}_r(L)]^T = [\tilde{0}, \tilde{0}]^T$ と置くことによって得られる。この場合の固有値を定める特性方程式はその同次方程式の行列式 $|\Phi_{21}(\sigma)|$ を零とする式となる。

3. 結合系の特性方程式

離散化モデルの特性方程式 (振動数方程式) を導くに際し、ケーブル座標 s に関するラプラス変換の演算子を λ とする。まず、ケーブルの分割要素 i の区間のケーブルの運動の一般解を求める。(5-a) 式の補助方程式は、曳航用ケーブルの材質では重根を持たないので、補助方程式の根それぞれを $\lambda_j (j = 1, 2, 3, 4)$ で表すと、 λ_j の固有ベクトル p_j を列ベクトルに持つ変換行列 $P_i = [p_1, p_2, p_3, p_4]^T$ を用いて (5-a) 式は対角化され、一般解は 4 個の指数関数 $\exp(\lambda_j \Delta l_i) (j = 1, 2, 3, 4)$ によって与えられる。この場合の遷移行列 $\Phi_i(\sigma)$ は

$$\Phi_i(\sigma) = P_i \text{diag}[\exp(\lambda_j \Delta l_i)] P_i^{-1}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (11)$$

と表され、 $\Phi_i(\sigma)$ を介して、ケーブルの分割要素 i の両端での状態ベクトル $\xi_i(s_{i-1}, \sigma)$ と $\xi_i(s_i, \sigma)$ とは、

$$\xi_i(s_i, \sigma) = \Phi_i(\sigma) \xi_i(s_{i-1}, \sigma)$$

の関係で結ばれる。従って、ケーブル全体の遷移行列 $\Phi_i(\sigma)$ はケーブルの分割要素の遷移行列の連結形で記述でき、滑空機側の境界値 $\xi_N(L, \sigma)$ と曳航機側の境界値 $\xi_1(0, \sigma)$ とは

$$\begin{aligned} \xi_N(L, \sigma) &= \Phi(\sigma) \xi_1(0, \sigma) \\ \Phi(\sigma) &= \prod_{i=1}^N \Phi_{N+1-i}(\sigma) \end{aligned} \quad (12)$$

なる関係で結ばれる。勿論、この関係は遷移行列の性質からケーブル座標に関して可逆である。

次に、(12) 式に (6)、(7) 式の境界条件を与えて特解を求める。(6) 式の $\tilde{v}_a(0)$ 、 $\tilde{v}_r(0)$ が零であるため、行列演算上、遷移行列 $\Phi(\sigma)$ を 2×2 の正方副行列から成る次のブロック行列

$$\Phi(\sigma) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(\sigma) & \Phi_{12}(\sigma) \\ \Phi_{21}(\sigma) & \Phi_{22}(\sigma) \end{bmatrix}$$

で表すと、(12) 式は次式で書ける。

$$[\tilde{\tau}_c(L), \tilde{\theta}_c(L)]^T = \Phi_{11}(\sigma) [\tilde{\tau}_c(0), \tilde{\theta}_c(0)]^T \quad (13)$$

$$[\tilde{v}_a(L), \tilde{v}_r(L)]^T = \Phi_{21}(\sigma) [\tilde{\tau}_c(0), \tilde{\theta}_c(0)]^T \quad (14)$$

ここで、(9-a) 式の入力ベクトルを (13) 式で、(10) 式の変動速度を (14) 式で表すと、任意な $[\tilde{\tau}_c(0), \tilde{\theta}_c(0)]^T$ に対する (7) 式の滑空機側の境界条件が定まるので、結合系の自由運動に関する同次方程式は次式で書ける。

$$[C(\sigma) A_b^{-1}(\sigma) B \Phi_{11}(\sigma) - \Phi_{21}(\sigma)] \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_c(0) \\ \tilde{\theta}_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \end{bmatrix} \quad (15)$$

従って、離散化モデルの特性方程式は (15) 式の行列式を零とする式で記述される。なお、特性方程式の文字式は長くなるため、その記述を省略する。

第1表 滑空機の仕様

質量: M_b (kg)	420	揚力傾斜 (1/rad)	5.99
慣性モーメント: I_b (kg m^2)	703	尾翼容積 (m^3)	11.34
主翼面積 (m^2)	16	主翼取付角 (rad)	0.075
縦横比	16	L_A (m)	2.5
最大揚抗比	28	β (rad)	0.07

相対高度 ($-15\text{ m} < H < 15\text{ m}$) に対する有次元安定微係数

(X_u)	$-0.0253 \sim -0.0256$	(Z_u)	$-0.70 \sim -0.72$	(M_u^*)	$0.0238 \sim 0.0243$
(X_w)	$0.258 \sim 0.264$	(Z_w)	-3.89	(M_w^*)	-0.286
(X_θ)	$-9.75 \sim -9.97$	(Z_θ)	$0.351 \sim 0.356$	(M_θ^*)	$-0.532 \sim -0.555$
(X_q)	0.0	$(U_0 + Z_q)$	26.15	(M_q^*)	-5.23
(X_r)	$0.0231 \sim 0.0211$	(Z_r)	$-0.003 \sim 0.01$	(M_r^*)	$0.0064 \sim -0.0138$
(X_{θ_c})	$0.0469 \sim -0.1687$	(Z_{θ_c})	$0.351 \sim 0.356$	$(M_{\theta_c}^*)$	$-0.532 \sim -0.555$

4. 結合系の固有値推定

4.1 具体例 ここで取り上げる結合系の具体例⁽⁸⁾は、海面付近の高度を、時速 100 km で水平定常飛行を続ける飛行機が滑空機を曳航する系である。滑空機と曳航用ケーブルの仕様をそれぞれ第1表と第2表に示す。

また、飛行安全のため、ケーブル張力による過度な縦揺れモーメントが飛行機と滑空機に作用しないように、通常、相対高度 H はケーブル長 50 m に対して概ね $-10 \sim 10$ m の範囲内に採られている。想像されるように、計算結果は、相対高度が高い場合の方が低い場合に比べて、ケーブルの平衡状態における平衡曲率は大きく、平衡張力は高い値となっている。例として、相対高度が -10 m と 10 m の場合の、横位置 X に対する、相対縦位置による平衡形状、平衡曲率及び平衡張力を第3図に示す。なお、相対高度 -10 m で滑空機の釣合い姿勢角 θ_0 すなわち釣合い迎角 α_0 は 0.02208 (rad)、 10 m では 0.02385 (rad) で、相対高度 $-10 \sim 10$ m の範囲で θ_0 の変化は概ね線形であった。

4.2 結合系の固有値

4.2.1 固有値の探索方法と範囲 結合系 (15) 式の特性方程式の実部と虚部それぞれに二分法を適用して、これらを同時に零とする複素パラメータ σ すなわち固有値の実部 σ_{Re} と虚部 σ_{Im} の探索を行う。結合系は理論的に無限個の固有値を持つが、実際に推定対象となる固有値は有限個であるため探索範囲は限られることになる。1章で、曳航された滑空機自体の昇降舵のインパルス入力による過渡応答に現れた卓越振動モードの固有振動数が 1 (rad/sec) よりも低いことを述べたが、曳航時の相対高度によっては、これよりも高くなる場合も想定されるので、本論では、固有値の探索範囲を $0 \sim 10$ (rad/sec) の低周波数領域と定める。

4.2.2 ケーブルの分割要素数について 離散化モデルの固有値は、ケーブルの分割要素数 N (離散化数) を予め定めた上で探索される。従って、探索固有値 (探索値) を推定固有値とするには、探索値に影響を与えない離散化数を設定する必要がある。上述の低周波数領域に存在した6個の探索値に及ぼす離散化数の影響の一例を第4図に示す。本図は、相対高度 -10 m での結合系の、 N が1の場合の探索値と N を 50 まで増やした場合の探索値との比 (%) を示したものである。図中の特性モードには、探索値虚部

第2表 曳航用ケーブルの仕様

長さ: L (m)	50	直径: D_c (m)	0.014
線密度: μ (kg/m)	0.084	ヤング率: E (N/m ²)	5.73×10^8

第3図 曳航ケーブルの平衡形状、平衡曲率及び平衡張力

第4図 固有値の探索値に及ぼすケーブルの分割要素数の影響 (相対高度: -10 m)

第 3 表 探索結果と固有振動数 (rad/sec)

結合系の 特性モード	相対高度：-10 (m)		相対高度：0 (m)		相対高度：10 (m)		(16) 式による 固有振動数
	実部	虚部	実部	虚部	実部	虚部	
第 1	0.139	0.159	0.022	0.211	-0.098	0.222	0.21 ~ 0.24
第 2	-0.121	1.541	-0.076	1.006	0.036	0.867	1.54 ~ 0.87
第 3	-4.589	2.799	-4.515	2.750	-4.494	2.894	5.34 ~ 5.35
第 4	-0.030	4.227	-0.002	5.340	-0.027	5.301	4.24 ~ 5.30
第 5	-0.030	5.387	-0.001	5.704	-0.036	6.631	5.39 ~ 6.63
第 6	-0.032	8.016	-0.004	8.352	-0.067	9.121	8.02 ~ 9.12

σ_{Im} の小さい順に、第 1 特性モード、第 2 特性モードのように名を付けている。図中、 N が 10 ~ 50 では、モードの比はいずれも一定となっている。すなわち、具体例の結合系においては、全長 50 m のケーブルの分割要素長を 5 m から 1 m に設定すると、探索値には離散化数の影響が現れないものと判断できる。同様の結果が他の相対高度でも得られている。そこで、本論では、少ない誤差とすることから、結合系の推定固有値に N が 50 の場合の探索値を用いることにする。以上のようにして求めた、相対高度 -10, 0, 10 m における推定固有値を第 3 表に示す。表中の固有振動数は、 $\sqrt{-1}$ を j で表して、各特性モードの探索値 (σ_{Re} , $j\sigma_{Im}$) を、減衰比 ζ と固有振動数 ω_n の 2 次振動系の固有値 ($-\zeta\omega_n, j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$) に対応させた、

$$\omega_n = \sqrt{\sigma_{Re}^2 + \sigma_{Im}^2} \quad (16)$$

から計算される値である。

4.2.3 結合系の特性モード ここでは、結合系の特性モードの特徴について述べる。それには、結合系の滑空機側フック点に作用する平衡張力 T_{c0} (牽引力) を推力とみなした滑空機単体 (T_{c0} 付滑空機単体という) の運動、ケーブル単体の運動それぞれが参考になる。擾乱を受けた後の滑空機には、牽引力のみがその作用方向を変えずにフック点に作用していると仮定すると、(9-c) 式の有次元安定微係数に相対高度で異なる T_{c0} が考慮される。なお、この場合の滑空機の運動は (9-a) 式においてケーブルからの入力を零とおくことによって表現される。 T_{c0} が 140 ~ 185 (N) の範囲で変る具体例では固有振動数の離れた二つの振動根が得られた。この T_{c0} 付滑空機単体の、縦短周期モードの固有値は (-4.52 (rad/sec), j 2.70 (rad/sec)) の近傍に、長周期モードの固有値は (-0.05 (rad/sec), j 0.33 (rad/sec)) の近傍に位置していた。ここで、第 4 表に、相対高度 -10 m の場合の、結合系の第 1 特性モードと第 3 特性モードにおける滑空機の固有ベクトル各要素の、姿勢角変化 θ に対する大きさの比を示す。同表には、 T_{c0} 付滑空機単体の長周期モードと縦短周期モードの固有ベクトルの各要素の比を併記している。第 3 表および第 4 表から、次のことが推察される。

1) 結合系の第 1 特性モードの推定固有値は T_{c0} 付滑空機単体の長周期モードの固有値近傍に位置していることから、本特性モードを長周期モードと称する。第 4 表を見ると、本長周期モードはいわゆるフゴイドモードの特徴を示している。本特性モードにおける X_S 軸方向の変動速度 u は、

第 4 表 滑空機の固有ベクトル要素の大きさの比 (相対高度：-10 m)

特性モード	長周期	第 1 特性	縦短周期	第 3 特性
$ u/\theta $	30.8	5.66	0.85	1.53
$ w/\theta $	2.7	2.02	1.0	49.1
$ \theta/\theta $	1	1	1	1
$ \alpha/\theta = w/U_0\theta $	0.10	0.077	0.038	1.84

T_{c0} 付滑空機単体の長周期モードにおける変動速度 u と比べて小さい。このことから、本特性モードでの滑空機の運動はケーブルによって拘束されていることが伺える。従って、本特性モードは T_{c0} 付滑空機単体の長周期モードとは異質と言える。

2) 結合系の第 3 特性モードの推定固有値は他の特性モードのそれらと大きく離れ、 T_{c0} 付滑空機単体の縦短周期モードの固有値近傍に位置していることから、本特性モードを短周期モードと称する。第 4 表から、本特性モードにおける姿勢角変化 θ と迎角変化 α は縦短周期モードにおけるそれらとほぼ同じ大きさで変化することが伺える。従って、本特性モードは、主に滑空機の回転運動の動特性を表していると考えて良い。

次に、結合系の第 2, 第 4, 第 5 及び第 6 特性モードの特徴を把握するため、ケーブルの平衡形状まわりに形成される固有モード形状を計算した。それには、境界値 ((13) 式) の中の $\tilde{\tau}_c(L)$ に正の微小な変動張力 $\tilde{\tau}_c^*(L)$ (実部：9.8 N, 虚部：0 N) を設定した。例として、相対高度 -10 m でのケーブル座標に対する固有モード形状を第 5-1 図と第 5-2 図に示す。第 5-1 図はケーブルの平衡形状の位置からの軸方向と半径方向の変位 $\tilde{e}_a(s)$, $\tilde{e}_r(s)$ それぞれを X_E 軸方向に座標変換した変位 ΔX (実部) である。第 5-2 図は Z_E 軸方向に座標変換した変位 ΔZ (実部) である。なお、変位の虚部は実部と比べて微小であった。第 4, 第 5 及び第 6 特性モードの形状それぞれは、両端が固定された系、すなわち弦の振動 1 次、2 次及び 3 次モードの、良く知られた固有モード形状それぞれに酷似している。このことから、これら特性モードは主としてケーブル自体の振動によって支配されているものと推察される。ここで、線密度 μ 、長さ L のケーブルを伸びない系で置き換え、その両端を平衡張力 T_{c0} で直線とした弦の n 次モードの固有振動数 ω_{tn}^* は $(n\pi/L)\sqrt{T_{c0}/\mu}$ となる。この式にケーブル仕様 (第 2 表) と上述の相対高度で変る T_{c0} を適用すると、2 次モードの ω_{t2}^* は 5.2 ~ 6.0 (rad/sec)、3 次モードの ω_{t3}^* は 7.9 ~ 9.0 (rad/sec) となる。結合系の第 5 と第 6 特性モードの、(16)

第5-1図 ケーブルの固有モード形状 ΔX (相対高度: -10 m)

第5-2図 ケーブルの固有モード形状 ΔZ (相対高度: -10 m)

式による固有振動数（第3表）それぞれは弦の ω_{t2}^* と ω_{t3}^* に近似しているが、第4特性モードのそれは弦の1次モードの ω_{t1}^* (2.6 ~ 3.0 (rad/sec)) よりも高い値を示している。本論では、弾性体ケーブルのこれらの振動を、非弾性体の弦の振動とは区別して、横振動と呼び、結合系の第4、第5、第6特性モードをそれぞれ横振動1次モード、横振動2次モード、横振動3次モードと名付ける。残る結合系の第2特性モードは、固有モード形状が第4特性モード（横振動1次モード）のそれと良く似ているものの、滑空機側結合点に変位があることから、第2特性モードは滑空機の運動にも支配されていることが推察される。このことを裏付けるため、結合系の第2特性モードと第4特性モード（横振動1次モード）について、上述の変動張力 $\tau_c^*(L)$ に対する、結合系における滑空機の固有ベクトル及び滑空機側結合点での変動速度 ($\dot{v}_a(L)$ と $\dot{v}_r(L)$) と変位 ($\tilde{e}_a(L)$ と $\tilde{e}_r(L)$) の大きさを求め、その結果を第5表に示す。明らかに、滑空機の運動の影響は、第2特性モードに認められるものの、第4特性モード（横振動1次モード）では微小である。従って、結合系の第2特性モードは滑空機の運動とケーブルの運動との干渉によって支配されているものと推断される。

4.2.4 推定された固有値の妥当性の検討 第3表に示した具体例の推定固有値の妥当性を、曳航された滑空機の昇降舵インパルス入力に対する結合系の60秒間の過渡応答から検討した。そのために、本論では、双曲型偏微分方程式(3)式で表したケーブルの運動方程式を、特性曲線法を用いて解いた。例として、第6図及び第7図に相対高度10 m及び0 mでの滑空機の X_S 軸（前後）方向の変動速度 $u(t)$ と姿勢角 $\theta(t)$ のそれぞれを示す。ここで、卓越振動モードを2次振動系の振動モードと見れば、その応答の対

第5表 結合系における滑空機の固有ベクトルと滑空機側結合点の変動速度と変位（相対高度: -10 m）

固有ベクトルの要素	結合系の第2特性モード	結合系の第4特性モード
$ u \times 10^{-2}$ (m/sec)	1.9	0.59
$ w \times 10^{-2}$ (m/sec)	0.79	0.27
$ \theta \times 10^{-2}$ (rad)	0.1	0.018
$ v_a(L) \times 10^{-2}$ (m/sec)	1.3	0.14
$ v_r(L) \times 10^{-2}$ (m/sec)	1.7	0.088
$ e_a(L) \times 10^{-2}$ (m)	0.81	0.0086
$ e_r(L) \times 10^{-2}$ (m)	1.1	0.0050
$ \tau_c^*(L) $ (N)	9.8	9.8

第6図 滑空機の X_S 軸方向の変動速度 $u(t)$ と姿勢角 $\theta(t)$ の過渡応答（相対高度: 10 m）

第7図 滑空機の X_S 軸方向の変動速度 $u(t)$ と姿勢角 $\theta(t)$ の過渡応答（相対高度: 0 m）

数減衰率は固有値の実部に、減衰固有振動数は虚部に対応する。そこで、これら特性値を求めてみると、以下のことが推断される。

1) 第6図の $u(t)$ と $\theta(t)$ に現れている卓越振動モードは対数減衰率 0.043 (rad/sec) で発散しながら減衰固有振動数 0.89 (rad/sec) で振動しており、これは第3表に示した結合系の第2特性モードの推定固有値（実部: 0.036 (rad/sec), 虚部: 0.867 (rad/sec)）と一致している。この

ことから、相対高度 10 m での滑空機の前後方向の変動速度と姿勢角変化は第 2 特性モードによって支配されていると言える。

2) 第 7 図の $u(t)$ に現れている卓越振動モードは対数減衰率 -0.08 (rad/sec) で減衰しながら減衰固有振動数 0.95 (rad/sec) で振動しており、これは第 3 表の結合系の第 2 特性モードの推定固有値 (実部: -0.076 (rad/sec), 虚部: 1.00 (rad/sec)) に一致している。また、 $\theta(t)$ の卓越振動モードは対数減衰率 0.02 (rad/sec) で発散しながら減衰固有振動数 0.20 (rad/sec) で振動しており、これは結合系の第 1 特性モード (長周期モード) の推定固有値 (実部: 0.022 (rad/sec), 虚部: 0.21 (rad/sec)) に一致している。従って、相対高度 0 m における滑空機の前後方向の変動速度は減衰する結合系の第 2 特性モードによって、その姿勢角変化は結合系の第 1 特性モード (長周期モード) によって支配されていると言える。

以上により、本論の固有値推定の妥当性と結合系における滑空機の過渡応答を支配する特性モードが確認された。

4.2.5 平衡曲率の影響を受ける特性モード 平衡曲率は離散化モデルの定係数行列 (5-c) 式) 内に現れる。それ故に、平衡曲率の影響はすべての特性モードに及ぶことになるが、ここでは、具体例の結合系において、その影響を特に強く受ける特性モードを明らかにした。それには、まず、離散化モデルにおけるケーブルの分割要素それぞれを直線 (零の平衡曲率) として表現した。このことによって (5-a) 式で表されるケーブルの運動は、連続の式において軸方向と半径方向に完全に分離され、ケーブルの半径方向の運動には張力変動の影響が及ばないことになる。この場合の推定固有値を (16) 式に当てはめると、(5-a) 式における平衡曲率の有無の違いによる影響が、特に結合系の第 2 特性モードと第 4 特性モード (横振動 1 次モード) の固有振動数に認められた。ちなみに、第 3 図に示したケーブルの平衡状態における平衡曲率をケーブルの分割要素それぞれにおいて零とした場合 (ケーブルの折線近似) の第 2 特性モードと第 4 特性モードの推定固有値と (16) 式による固有振動数との比較を第 6 表に示す。

1) 第 6 表の第 4 (横振動 1 次) 特性モードの固有振動数は、いずれも 4.2.3 に述べた、弦の 1 次振動の ω_{t1}^* に近い値を示している。対して、第 3 表の平衡曲率が考慮されている場合の第 4 特性モードの固有振動数は ω_{t1}^* よりも大きく、相対高度 -10 m で 1.6 倍、10 m では 1.8 倍の値を示

している。4.1 で述べたように、相対高度が高くなると平衡曲率は大きくなることから、第 4 特性モードの固有振動数の増加は平衡曲率に依存していることがわかる。

2) ケーブルの伸縮や歪の変動を表すケーブルの軸方向の運動を、ケーブルの分割要素数を 1, かつ、その平衡曲率を零 (直線ケーブル近似) として考える。この直線の弾性体ケーブルを、長さ L , 断面積 A_c , 縦弾性係数 E の 1 本の直線バネで置き換え、一端を固定して他端に滑空機の質量 M_b に相当する質点を結合させる。このバネ-質点系の固有振動数 ω_{sp}^* は $\sqrt{EA_c/M_b L}$ によって与えられる。これに滑空機の質量 M_b (第 1 表) とケーブル仕様 (第 2 表) を適用すると、 ω_{sp}^* は 2.05 (rad/sec) となる。第 6 表に示した、ケーブルの分割要素それぞれの平衡曲率を零とした場合の、結合系の第 2 特性モードの固有振動数は、この ω_{sp}^* に近いものとなっている。このことから、第 2 特性モードをバネ振動モードと呼ぶことにする。第 3 表に示した結合系の第 2 特性モード (バネ振動モード) の固有振動数は、平衡曲率が大きくなるにつれて、 ω_{sp}^* よりも減少して、相対高度 -10 m で ω_{sp}^* の 75% 値、10 m では ω_{sp}^* の 42% 値となっている。

以上のことから、相対高度が高くなるにつれて、すなわち平衡曲率の増加に伴って、結合系の第 4 特性モード (横振動 1 次モード) の固有振動数は増加し、第 2 特性モード (バネ振動モード) のそれは減少することが確認された。

4.2.6 相対高度に対する根軌跡 結合系のそれぞれの特性モードが曳航時の相対高度によって変化する様子を詳細に見るため、相対高度をパラメータとする固有値の軌跡を求めた。第 8 図に相対高度 $-15 \sim 15$ m の範囲の根軌跡 (実軸目盛に対する虚軸目盛の比は 1:10) を示す。本図から、以下のような結合系の安定性や固有振動数の変化を知ることができる。

1) 長周期モードは相対高度約 2 m で安定限界を示し、これより低い相対高度で不安定である。根虚部は 4.2.3 に述

第 6 表 ケーブルの各分割要素の平衡曲率を零とした場合の推定固有値と (16) 式による固有振動数

相対高度	結合系の第 4 特性 (横振動 1 次) モード		結合系の第 2 特性 モード	
	実部	虚部	実部	虚部
-10 m	-0.026	2.689	-0.091	2.194
	固有振動数: 2.69		固有振動数: 2.20	
10 m	-0.020	2.720	0.328	2.418
	固有振動数: 2.72		固有振動数: 2.44

第 8 図 滑空機の飛行機曳航系の根軌跡

べた, T_{c0} 付滑空機単体の長周期モードの 0.33 (rad/sec) よりも小さな約 0.21 (rad/sec) を示し, 相対高度に対してほぼ一定となっている。

2) バネ振動モードは相対高度約 7 m が安定限界であり, これよりも高い相対高度で不安定である。虚部の値は相対高度 $-15 \sim 7 \text{ m}$ の安定領域で $2.2 \sim 0.87 \text{ (rad/sec)}$ を示し, 相対高度が高くなるにつれて低下する。相対高度 $7 \sim 15 \text{ m}$ の不安定領域では虚部の値は約 0.87 (rad/sec) と, ほぼ一定となっている。

3) 短周期モードの根は 4.2.3 に述べた, T_{c0} 付滑空機単体の縦短周期モードの根 (-4.52 (rad/sec) , $j \ 2.70 \text{ (rad/sec)}$) 近傍に位置し, 特に実部の変化を見ると, 安定性は相対高度が低くなるにつれて若干強くなっている。

4) 横振動 1 次, 2 次そして 3 次モードはいずれも弱い安定を示している。相対高度の増加と共に, 虚部の値は大きくなり, 横振動 1 次モードの固有振動数は $2.7 \sim 5.5 \text{ (rad/sec)}$, 横振動 2 次モードのそれは $5.3 \sim 7.4 \text{ (rad/sec)}$, 横振動 3 次モードのそれは $7.8 \sim 10.1 \text{ (rad/sec)}$ を示している。

5) 相対高度 $2 \sim 7 \text{ m}$ の範囲で, 以上に述べた 6 個の特性モードすべてが安定である。

ところで, 1 章で述べたように, 著者らは, 滑空機のパイロットによって指摘されている位置保持操縦の難易の要因は, 結合系における滑空機の過渡応答の卓越的振動モードの特性が相対高度によって異なることにあった⁷⁾。本論 4.2.4 で, その特性の違いをより詳細に述べ, 本節で上記結論を裏付けている。すなわち同定された結合系の第 2 特性モード (バネ振動モード) と第 1 特性モード (長周期モード) の根軌跡 (第 8 図) からわかるように, 滑空機のパイロットには, 相対高度 7 m 以上のハイトウでバネ振動モードの, 2 m 以下のロウトウでは長周期モードの安定化のための操縦が要求されることになる。特に, 長周期モードの固有振動数に比べ約 $4 \sim 8$ 倍高い固有振動数を持つバネ振動モードの安定化の方がパイロットのワークロードが大きく, このことが飛行機曳航時の滑空機のハイトウでの位置保持操縦が難しいとされている原因であると推断される。

5. む す び

本論では, 「曳航機・ケーブル・滑空機」の結合系の固有値を推定するための離散化モデルを示した。これを滑空機の飛行機曳航の具体例に適用して, 低周波数領域における固有値を推定し, 曳航形態による位置保持操縦の難易をもたらす要因について論じた。以下に, その結果をまとめる。

1) 結合系の特性モードの特徴を明らかにし, それらは, ケーブルの運動と滑空機の運動との干渉に支配されるバネ振動モード, 主として滑空機単体の運動に支配される長周期モードと短周期モード, そして主にケーブルの運動に支配される横振動 1 次, 2 次, 3 次モードであると判別された。

2) 本論で行った固有値推定によって, 曳航された滑空機

の昇降舵インパルス入力による過渡応答に卓越的に現れる振動モードは第 1 特性モード (長周期モード) と第 2 特性モード (バネ振動モード) であることが明確に同定された。

3) 特定された特性モードの中でも, とりわけ, 横振動 1 次モードとバネ振動モードの固有振動数に平衡曲率の影響が認められた。相対高度が高くなるにつれて, すなわち平衡曲率が大きくなるにつれて, 横振動 1 次モードの固有振動数は増加し, バネ振動モードのそれは減少する。

4) 結合系の推定固有値の相対高度による変化を根軌跡として求めた。これにより, 特性モードすべてが安定である曳航時の相対高度の範囲が存在すること, その範囲よりも高い相対高度ではバネ振動モードが不安定で, 低い相対高度では長周期モードが不安定であることが判明した。さらに, 長周期モードの固有振動数と比べてバネ振動モードのそれは約 $4 \sim 8$ 倍高く, このことがロウトウに比べてハイトウでの位置保持操縦を難しくしていると推断した。

終りに, 上記 3) の, 結合系のバネ振動モードと横振動 1 次モードの固有振動数に平衡曲率が影響する理由, ならびに 4) の, バネ振動モードと長周期モードが相対高度によって不安定化するメカニズムについては第 2 報で論じる。

参 考 文 献

- 1) Glauert, H.: The Stability of a Body Towed by a Light Wire, R&M 1312, Aeronautical Research Council, Great Britain, London, 1930.
- 2) O'hara, F.: Extension of Glider Tow Cable Theory to Elastic Cables Subject to Air Forces of a Generalized Form, R&M 2334, Aeronautical Research Council, Great Britain, London, 1945.
- 3) DeLaurier, J. D.: A Stability Analysis of a Cable-Body System Totally Immersed in a Fluid Stream, NASA CR 2021, 1972.
- 4) Nakagawa, N. and Obata, A.: Longitudinal Stability Analysis of Aerial-Towed Systems, J. Aircraft, **29** (1992), pp. 978-985.
- 5) de Matteis, G.: Longitudinal Dynamics of a Towed Sailplane, J. Guid. Control Dynam., **16** (1993), pp. 822-829.
- 6) Etkin, B.: Stability of a Towed Body, J. Aircraft, **35** (1998), pp. 197-205.
- 7) 柚原直弘, 佐藤親俊, 高橋哲昭: 飛行機によって曳航される Glider の飛行性について, 第 11 回飛行機シンポジウム講演集, 1973, pp. 125-128.
- 8) 柚原直弘, 佐藤親俊: 曳航体の動安定解析について, 第 23 回飛行機シンポジウム講演集, 1985, pp. 298-301.
- 9) Von Flotow, A. H. and Wereley, N. M.: Insight and Approximations in Dynamic Analysis of Spacecraft Tethers Mechanics and Control of Large Space Structures, Progress in Astronautics and Aeronautics, Junkins, J. L., ed., AIAA, Washington, DC, 1990, pp. 667-696.
- 10) Hoener, S. F.: Fluid Dynamic Drag Hoener, Midland Park, NJ, 1958.
- 11) Pestel, E. C. and Leckie, F. A.: Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, New York, 1975.
- 12) 日本航空宇宙学会編: 航空宇宙工学便覧, 丸善, 東京, 1974, pp. 254-256.
- 13) Etkin, B.: Dynamics of Atmospheric Flight, John Wiley & Sons, New York, 1972.