3 温度モデルを用いた水素 MPD スラスタの電磁流体解析^{*1}

Numerical Simulation of a Hydrogen MPD Thruster with Temperature Nonequilibrium

佐藤 博 紀^{*2}・窪田 健 一^{*3}・船木 一 幸^{*3}

Hiroki SATO, Kenichi KUBOTA and Ikkoh FUNAKI

Key Words : Electric Propulsion, MPD Thruster, Hydrogen Plasma Flow, Temperature Non-Equilibrium

Abstract : Plasma flowfields and performances of an MPD thruster (MY-II thruster), which uses hydrogen as a propellant, are studied by solving axi-symmetrical two-dimensional magnetoplasdynamic equations. The three-temperature model including the translation T_{tr} , vibration T_{vib} , and electron T_e temperatures is incorporated into the flow solver. When the mass flow rate ($\dot{m}$) is 1.37 g/s, there is reasonable agreement on the thrust with measured data, especially at a discharge current (J_{dis}) of 7, 8 kA. Under the conditions of $\dot{m} = 0.4$ g/s and $J_{dis} = 5$ kA, the calculated thrust, specific impulse and thrust efficiency are 7.50 N, 1,911 s and 21.3% (without considering sheath voltage drop), respectively. The calculated flow shows a temperature nonequilibrium state ($T_e = 2.53$ eV, $T_{vib} = 1.32$ eV, $T_{tr} = 0.60$ eV) at the edge of the straight part, and it is found that the relaxation time between the vibration and the electron energy is equal to the characteristic time of the flow at $(z, r) = (30 \text{ mm}, 20 \text{ mm})$. Along the symmetrical axis, the dissociation and ionization fractions reach 1.0 (fully dissociation) and 0.2, respectively. Because the discharge current path by the three-temperature model can explain the important feature of hydrogen MPD (current expansion to the downstream), it is concluded that the three-temperature model can reproduce the experimental results.

記 号 の 説 明

B : 磁束密度ベクトル
 E : エネルギー
 e : 素電荷
 F : 推力
 k : Boltzmann 係数
 k_b : 再結合係数
 k_f : 前進反応係数
 j : 電流密度ベクトル
 J_{dis} : 放電電流
 m_{atom} : 水素原子質量
 n : 数密度
 Q_{i-j} : エネルギー i - j 間の緩和項
 T : 温度
 p : 圧力
 R : 気体定数
 u : 流速ベクトル
 V_{diss} : 解離エネルギー (= 4.4 eV)
 V_{ion} : 電離エネルギー (= 13.6 eV)
 α_{diss} : 解離度
 α_{ion} : 電離度
 γ_i : i 種のモル質量比

λ : 熱伝導係数
 μ : 粘性係数
 μ_0 : 真空の透磁率
 ρ : 質量密度
 σ : 導電率
 τ : 粘性テンソル
 ψ : 電流の流れ関数
 添え字
 diss : 解離
 e : 電子
 h : 重粒子
 H : 水素原子
 H_2 : 水素分子
 H^+ : 水素イオン
 rot : 回転
 tr : 並進
 vib : 振動

1. は じ め に

MPD スラスタ (MPDT) は宇宙機用電気推進機の一つであり, 自己誘起磁場型と外部磁場型に分類することができる. 本研究で扱う自己誘起磁場型 MPDT (SF-MPDT) は大電力作動に適しており, 高比推力, 高推力密度といった特徴を持つことから, 将来の大型惑星探査機用主エンジンとして期待されている. SF-MPDT の推進効率を実用レベルまで高めるためには, 推進剤の選定が重要である. 上松ら¹⁾は, 水素やアルゴンなど11種の推進剤についてSF-MPDT

*1 © 2012 日本航空宇宙学会

平成 22 年 11 月 20 日原稿受付

*2 総合研究大学院大学物理科学研究科宇宙科学専攻

*3 宇宙航空研究開発機構

の推進性能の比較を行い、水素推進剤の優位性を明らかにした。この優位性は、数多くの実験によって裏付けられている²⁾。したがって、水素を推進剤とする SF-MPDT の設計最適化が重要であるが、スラスタ形状等を実験のみで最適化することは容易ではない。そこで、数値解析による設計支援が不可欠となる。過去の研究を振り返ると、水素を推進剤とする SF-MPDT の数値解析的研究はいくつか報告^{3~7)} されているものの、推進性能予測に必要な放電電圧を正しく評価することができないなど、実験結果を十分模擬できているとは言い難い。放電電圧の予測精度を向上させるためには、SF-MPDT 放電室内のプラズマ密度、中性粒子密度、電子温度などを正確に見積もる必要がある。

そこで、本研究では、水素の解離、電離、振動エネルギー励起などの各種実在気体効果を考慮した物理モデルを構築し、同軸型 SF-MPDT の数値シミュレーションを実施した。数値シミュレーション結果と実験結果の比較により物理モデルの妥当性を評価するとともに、温度非平衡性と解離・電離反応の特性についても調べる。なお、本論文ではこれ以降、MPDT と言えば SF-MPDT を指す。

2. 計算モデル

2.1 スラスタ形状 本解析で用いる同軸型スラスタ形状を第 1 図に示す。この形状は、過去に田原らが開発した MY-II⁸⁾ をベースとしており、推進剤は $z = 0$ mm 面から一様に流入すると仮定した。

2.2 解析における仮定 本解析の仮定を以下に示す。

- ・ MPDT 内部のプラズマ流を電磁流体として扱う。
- ・ 流れ場と電磁場は軸対称 2 次元とする。
- ・ 周方向の流れは生じないとする。
- ・ SF-MPDT なので、磁場 $\mathbf{B}$ は自己誘起磁場の周方向成分 B_θ のみ考慮する。
- ・ スラスタ内部のレイノルズ数 Re は $10^2 \sim 10^3$ 程度であるため、流れ場は層流とする。
- ・ シースは考慮しない。
- ・ 水素の反応式は第 1 表に示すものとする。
- ・ 温度評価には 3 温度モデルを採用し、 T_{tr} ($= T_{rot}$), T_{vib} , T_e を独立に扱う。

第 1 図 MY-II スラスタ形状⁸⁾

・ 一般化されたオームの法則において、ホール効果を考慮する。また、電子の圧力勾配は無視する。

2.3 基礎方程式 本解析で用いた基礎方程式は、プラズマ流体に関する保存則と、磁場の誘導方程式から構成される。以下にプラズマ流体に関する質量保存則、水素原子および水素イオンの質量保存則、運動量保存則、重粒子、振動⁹⁾、電子エネルギーの各エネルギーの保存則を示す。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}) = \dot{\rho}_s \quad (s = H, H^+) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I}) = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_h}{\partial t} + \nabla \cdot [(E_h + p) \mathbf{u}] \\ = p_e \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \\ + \nabla \cdot ((\lambda_{tr} + \lambda_{rot}) \nabla T_{tr}) + \nabla \cdot (\lambda_{vib} \nabla T_{vib}) \\ + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \mathbf{u}) - Q_{tr-e} + Q_{e-vib} - Q_{diss}^h \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{vib}}{\partial t} + \nabla \cdot [E_{vib} \mathbf{u}] \\ = \nabla \cdot (\lambda_{vib} \nabla T_{vib}) + Q_{tr-vib} + Q_{e-vib} - Q_{diss}^h \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_e}{\partial t} + \nabla \cdot [E_e \mathbf{u}] = -p_e \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T_e) \\ + Q_{tr-e} - Q_{e-vib} - Q_{diss}^e - Q_{ion}^e \end{aligned} \quad (6)$$

式 (4)~(6) の E_h , E_{vib} , E_e はそれぞれ重粒子のトータルエネルギー、振動エネルギー、電子エネルギーを表す。式 (2) の右辺は水素原子および水素イオンの生成率を表し、以下の式で与えられる。

$$\dot{\rho}_H = \sum_{s=1}^4 2 (k_{f,s} n_{H_2} - k_{b,s} n_H^2) n_s m_{atom} \quad (7)$$

$$\dot{\rho}_{H^+} = (k_{f,5} n_H n_e - k_{b,5} n_{H^+} n_e^2) m_{atom} \quad (8)$$

前進反応係数 $k_{f,s}$ は文献 10) を、再結合係数 $k_{b,s}$ は文献 4) を参考にした。ここでの添え字 s は第 1 表の反応式 No. に対応する。式 (3), (4) の $\boldsymbol{\tau}$ は粘性応力テンソルを表す。

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (9)$$

式 (4) の重粒子のトータルエネルギー E_h および式 (6) の電子エネルギー E_e は以下のように定義される。

第 1 表 解離および電離の反応式

No.	反応式
【解離反応】	
1	$H_2 + e^- \longleftrightarrow H + H + e^-$
2	$H_2 + H_2 \longleftrightarrow H + H + H_2$
3, 4	$H_2 + M \longleftrightarrow H + H + M \quad (M = H, H^+)$
【電離反応】	
5	$H + e^- \longleftrightarrow H^+ + e^- + e^-$

$$E_h = E_{tr} + E_{rot} + E_{vib} + \frac{1}{2}\rho u^2$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{s \neq e} \rho_s R_s T_{tr} + \rho_{H_2} R_{H_2} T_{tr} \quad (10)$$

$$+ \frac{\rho_{H_2} R_{H_2} \theta_{vib}}{\exp(\theta_{vib}/T_{vib}) - 1} + \frac{1}{2}\rho u^2$$

$$E_e = \frac{3}{2} n_e k T_e = \frac{3}{2} p_e \quad (11)$$

式(10)にて右辺第1項から4項は、それぞれ重粒子の並進エネルギー、水素分子の回転エネルギー、水素分子の振動エネルギー、運動エネルギーである。また $\theta_{vib} (= (U(1) - U(0))/k = 6,320 \text{ K})$ は振動特性温度を意味し、 $U(i)$ は振動準位 i におけるエネルギーである。輸送係数 μ , λ , σ と各エネルギー間の緩和項 Q_{tr-e} , Q_{e-vib} , Q_{tr-vib} , 重粒子どうしの衝突解離反応によるエネルギー増減 Q_{diss}^h , 電子との衝突による解離反応のエネルギー増減 Q_{diss}^e , 電離反応によるエネルギー増減 Q_{ion}^e の式は付録に記載した。

また、磁場の誘導方程式は以下の式で与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$= -\nabla \times \left\{ \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0 e n_e} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right\} \quad (12)$$

以上の方程式に加え、状態方程式 (式(13)) とアンペールの法則 (式(14)) を用いることで方程式系は閉じる。

$$p = \sum_{s \neq e} n_s k T_{tr} + n_e k T_e \quad (13)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \quad (14)$$

3. 数値解析手法

3.1 計算格子と計算領域 計算格子を第2図に示す。 $z = 0 \sim 140 \text{ mm}$ は MPDT 内部であり、 $z = 140 \text{ mm}$ の面より右側はプルーム領域である。プルーム側 $z = 140 \sim 409 \text{ mm}$ の領域は長方形で、右端ならびに上端に流出部分がある。格子数はスラスタ内部側で 50×30 、プルーム側で 25×45 とする。また、軸対称を仮定しているため、対称軸より上半面のみを計算領域とする。

3.2 数値解析手法 本解析では基礎方程式を有限体積的に離散化して時間発展的に解く。非粘性流束の評価には、ロバストな空間2次精度の TVD Lax-Friedrich スキームを用いる。制限関数には minmod 関数を用い、時間積分には1次精度のオイラー陽解法を用いる。

3.3 境界条件と計算条件 計算条件を第2表に示す。電流分布と流れ場に関する議論は、電流分布の実験データがある $\dot{m} = 0.4 \text{ g/s}$, $J_{dis} = 5 \text{ kA}$ の条件で計算を行った。推力評価については、質量流量 0.4 g/s に対する実験データが存在しないため、実験結果の存在する $\dot{m} = 1.37 \text{ g/s}$ の条件で計算した。推力は入口条件に依存し、入口における温度、解離度、電離度をそれぞれ $2,000 \sim 6,000 \text{ K}$, $0.001 \sim 0.01$,

第2図 計算格子

第2表 計算条件

推進剤	H ₂	
計算目的	流れ場評価	推力評価
推進剤の質量流量, g/s	0.4	1.37
放電電流, kA	5	7~10
入口温度, K	$T_{tr} = 3,000 (= 0.259 \text{ eV})$ $T_{vib} = 5,000 (= 0.431 \text{ eV})$ $T_e = 5,000 (= 0.431 \text{ eV})$	
入口電離度, —	0.001	
入口解離度, —	0.005	

第3表 壁面温度境界条件 (設定温度以下では断熱条件)

アノード壁面温度, K	$T_{tr} < 1,300 (= 0.112 \text{ eV})$ $T_{vib} < 1,300 (= 0.112 \text{ eV})$ $T_e < 20,000 (= 1.72 \text{ eV})$
カソード壁面温度, K	$T_{tr} < 2,000 (= 0.172 \text{ eV})$ $T_{vib} < 2,000 (= 0.172 \text{ eV})$ $T_e < 25,000 (= 2.16 \text{ eV})$

0.0005~0.005 の範囲で変化させたとき最大で 12% の差があった。そこで本計算の入口条件は、実験による推力測定例がある $\dot{m} = 1.37 \text{ g/s}$, $J_{dis} = 7 \text{ kA}$ のとき、推力の実験値と計算値がほぼ一致するように設定した。 $\dot{m} = 0.4 \text{ g/s}$, $J_{dis} = 5 \text{ kA}$ の計算でも同じ入口条件とした。第3表に壁面温度境界条件を示す。壁における並進温度の制限値は、電極材料の融点程度とした。想定した材料は、アノードは銅、カソードはタングステンである。振動温度の制限値も並進温度と同様に設定した。また、壁における電子温度は、本来はシースモデルから評価すべきであるが、シースは考慮していない。入口における半径方向の磁束密度 $B_{\theta, in}$ は全放電電流値 J_{dis} をもとにアンペールの法則から、式(15)を用いて評価する。

$$B_{\theta, in} = -\frac{\mu_0 J_{dis}}{2\pi r} \quad (15)$$

壁面での磁束密度は、等ポテンシャル条件から求める¹¹⁾。なお、質量流量の残差が $O(10^{-3})$ まで減少し、推力が時間的に一定になった場合に収束とした。このとき、質量流量は設定値 0.4 g/s で z 軸方向に沿って一定になっている。

4. 数値計算結果と考察

4.1 放電電流経路 最初に、電流経路を田原らの実験結果⁸⁾と比較する。第3図に電流経路を示し、参考として以前の2温度モデル ($T_{tr} (= T_{vib})$, T_e) を用いた数値計算による電流経路¹²⁾も示した。2温度モデルによる解析結果 (第3図(a)) は、第3図(c)の実験結果と異なり、 $z = 0 \sim 75 \text{ mm}$

(a) 2 温度モデルによる電流経路

(b) 3 温度モデルによる電流経路

(c) 田原らによる実験結果⁸⁾

Reprinted with permission of the American Institute of Aeronautics and Astronautics.

第3図 電流経路の比較 (H_2 , $J_{dis} = 5 \text{ kA}$, $\dot{m} = 0.4 \text{ g/s}$)
コンター線上の値は電流の流れ関数 $|\psi| = |rB_\theta|$ であり, 2つのコンター線間の放電電流は一定である.

の上流部分にほとんどの電流が流れている. 一方, 本解析 (第3図 (b), 3 温度モデル) では, $|\psi| = 0.9$ の電流経路はアノード上 $z = 60 \text{ mm}$ の位置に付着し, 実験結果に近い. 第3図 (b)において, カソード上の $|\psi| \leq 0.7$ の電流付着点はカソード先端側 $z > 30 \text{ mm}$ に寄っているが, 実験結果で見られるようなカソード先端への強い放電集中は得られなかった. カソード周りの実験と計算の差異に関しては今後の検討課題である. 本解析で放電電流経路が下流側へシフトした原因については, 次節で考察する.

4.2 温度非平衡性および解離・電離特性 次に, 温度非平衡性と解離・電離特性について調べる. 第4図において各温度を比較すると, ほとんどの領域でプラズマ流は $T_e > T_{vib} > T_{tr}$ の温度非平衡状態になっている. また, カソード先端 $z = 45 \text{ mm}$ において, 電子温度は並進温度よりも高い. 一方, スラスタ出口付近 $z = 120 \text{ mm}$ より下流側の中心軸上において, 並進温度と電子温度が等しい温度平衡状態になっている. 一方, フレア部分のアノード近傍 ($z, r = (130 \text{ mm}, 40 \text{ mm})$) の周辺では, 電子温度が振動温度や並進温度よりも高い状態になっている. 本計算では陽極表面上における振動温度, 並進温度の上限値が電子温度に対するそれよりも低く設定してある (第3表参照). しかし, アノード境界条件の3温度すべてを断熱条件にした場合でも, この点の電子温度は並進温度や振動温度よりも高

(a) 並進温度

(b) 振動温度

(c) 電子温度

第4図 各温度の分布, eV (H_2 , $J_{dis} = 5 \text{ kA}$, $\dot{m} = 0.4 \text{ g/s}$)
中段: 振動温度分布内の白破線より中心軸側は完全解離領域である. この領域での T_{vib} は物理的に意味を持たないが, 表示の便宜上 T_{tr} の値を表示している.

第5図 3 温度モデルによる各温度の z 軸方向分布 ($r = 20 \text{ mm}$, H_2 , $J_{dis} = 5 \text{ kA}$, $\dot{m} = 0.4 \text{ g/s}$)

くなることが確認されているので, $T_e > T_{vib}$, T_{tr} となる主な原因はジュール加熱だと考えられる. また, カソード先端より下流側において, 並進温度は徐々に低下する. これは, フレア形状のノズルによって, 熱エネルギーが空力的推力へと変換されているためである. また, 後述するように, 振動エネルギーと電子エネルギーは並進エネルギーへ近づくように緩和されるため, 振動温度および電子温度も並進温度とともに徐々に低下する.

第6図 3 温度モデルによるエネルギー緩和特性時間と流れの特性時間の z 軸方向分布 ($r = 20$ mm, H_2 , $J_{dis} = 5$ kA, $\dot{m} = 0.4$ g/s)

第5図に $r = 20$ mm 線上の各温度の z 軸方向分布を示す。電子温度は $z = 25$ mm から 75 mm にかけて、徐々に増加している。電子温度の上昇後、これに遅れて並進温度と振動温度が上昇している。これは、放電によってまず電子にエネルギーが与えられるためである。ストレート部端の $z = 75$ mm において、 $T_e = 2.53$ eV, $T_{vib} = 1.32$ eV, $T_{tr} = 0.60$ eV の温度非平衡状態が見られる。振動温度は $z = 25 \sim 90$ mm で増加し、その後、電子温度と振動温度はそれぞれ $z = 75$ mm, 90 mm より下流側のフレア・ノズル部分で低下し、スラスタ出口 $z = 140$ mm で $T_{tr} \sim T_{vib} \sim T_e$ の温度平衡状態となる。この理由についてエネルギー緩和時間の観点から考察する。

第6図は並進-振動間 τ_{tr-vib} 、電子-振動間 τ_{e-vib} 、電子-並進間 τ_{tr-e} のエネルギー緩和時間と流れの特性時間 $\tau_{flow} = z/u$ (z : z 軸方向位置, u : z 軸方向流速) の軸方向分布である。エネルギー緩和時間は、並進と振動エネルギーなどの2つのエネルギーが平衡状態に達するまでに要する時間を指す。その評価方法は付録 A.3「エネルギー緩和項」を参照されたい。第6図より、 $z = 30$ mm にて $\tau_{flow} \sim \tau_{e-vib}$ の非平衡状態になっており、流れと振動-電子エネルギー緩和過程はカップリングして解く必要がある。電子-並進間の緩和時間 τ_{tr-e} は全領域で $\tau_{tr-e} > \tau_{flow}$ になっているため、電子エネルギーと並進エネルギーの緩和はゆっくりと進む。したがって、 $z = 25 \sim 75$ mm で電子温度 T_e はジュール加熱によって増加するが(第5図)、重粒子並進温度 T_{tr} はすぐには増加せず $T_e > T_{tr}$ となる。 $z \geq 75$ mm のフレア・ノズル部分でジュール加熱は減少していき、電子温度も低下して、出口 $z = 140$ mm にて T_{tr} は T_e とほぼ等しくなる。一方、並進-振動間の緩和時間に関しては $\tau_{tr-vib} > \tau_{flow}$ の凍結流状態になっており、スラスタ内部で並進-振動間のエネルギー緩和は進みにくい。電子-振動間のエネルギー緩和時間は、 $z > 30$ mm の領域で $\tau_{e-vib} < \tau_{flow}$ の平衡状態になっているため、 $T_{vib} \sim T_e$ になりやすい。したがって、 $z = 25$ mm で電子温度増加に追従するように振動温度も増加し始める。そして、フレア・ノズル部分で振動温度も電子温度とともに低下して、スラスタ出口で $T_{tr} \sim T_{vib} \sim T_e$ の温度平衡状態となる。

(a) 解離度分布

(b) 電離度分布

第7図 解離度および電離度分布 (H_2 , $J_{dis} = 5$ kA, $\dot{m} = 0.4$ g/s)

第8図 導電率分布, S/m (H_2 , $J_{dis} = 5$ kA, $\dot{m} = 0.4$ g/s)

次に、解離および電離特性について調べる。解離度 α_{diss} 、電離度 α_{ion} は以下のように定義する。

$$\alpha_{diss} \equiv \frac{n_H + n_{H^+}}{2n_{H_2} + n_H + n_{H^+}} \quad (16)$$

$$\alpha_{ion} \equiv \frac{n_e}{2n_{H_2} + n_H + n_{H^+}} \quad (17)$$

第7図の解離度および電離度の分布において、プラズマ流がスラスタ内部を進むにつれて、解離度、電離度ともに徐々に増加していることが分かる。カソード先端 $z = 45$ mm より下流側、中心軸付近において、解離度は完全解離 ($\alpha_{diss} = 1$) に達する。一方、カソード先端から下流側の対称軸上において、電離度は最大で0.2程度になるが、完全電離 ($\alpha_{ion} = 1$) には達しない。また、アノード付近の領域において、電離度は0.02以下であり、ほとんど電離していない。

第8図に導電率の分布を示す。カソード先端 $z = 45$ mm 周辺で導電率が最大値に達している。これは、前述したようにカソード先端付近で電子温度と電離度が高いためである。このような導電率分布になることで、カソード先端より下流を電流が流れやすくなり、放電電流経路はスラスタ下流側へシフトしたと考えられる。

第9図 放電電流と推力 (H_2 , $\dot{m} = 1.37 \text{ g/s}$, 実験データは文献 15) を参照, 理論電磁推力 “theory, min”, “theory, max” は $r_a/r_c = 38.5/4.75$ として算出)

第10図 放電電流と放電電圧 (H_2 , $\dot{m} = 1.37 \text{ g/s}$, 実験データは文献 15) を参照)

4.3 数値解析による推進性能評価 数値解析による推進性能評価を推進剤流量 1.37 g/s の計算結果によって示す。推力および放電電圧の評価式は文献 11) を参照した。第9図は推進剤流量 1.37 g/s としたときの放電電流と推力の関係を示している。図中の $J_{\text{dis}} = 7, 8 \text{ kA}$ のとき、適切な入口条件を設定したことで、数値計算による推力 F_{calc} は実験結果をほぼ再現できている。数値計算による電磁推力 F_{self} は理論曲線 (図中: 破線) によく一致している。一方, $J_{\text{dis}} > 9 \text{ kA}$ のとき, F_{calc} は F_{exp} に比べて過小評価になっている。この原因としては, すべての放電電流 J_{dis} において同じ入口条件に設定していること (入口条件による推力の誤差) が考えられる。

第10図は放電電流と放電電圧の関係を実験結果と比較した図である。本計算結果から評価した放電電圧 V_{calc} は実験の放電電圧 V_{exp} に比べて低い。その差は中田ら¹³⁾ によって測定されたシース電圧約 20 V (ただし推進剤はアルゴン) を上回っている。アルゴンと水素でシース電圧が同じとは限らないが, シース電圧が数 10 V 程度であると仮定すれば, 本解析は実験に比べてバルク電圧を過小評価している可能性がある。この原因としては, 1) イオン・中性粒子間の速度スリップ, 2) 異常抵抗, 3) 反応モデルや導電率モデルの違い, が考えられる。杵淵らの実験結果¹⁴⁾ ではイオン・中性粒子間の速度スリップが観測されており, $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$

第4表 推進性能 (H_2 , $\dot{m} = 0.4 \text{ g/s}$, $J_{\text{dis}} = 5 \text{ kA}$)

	3 温度 モデル	2 温度 モデル ¹²⁾
スラスト形状	MY-II	MY-II
放電電流, kA	5.0	5.0
推力 F , N	7.50	5.26
比推力, s	1911	1342
放電電圧, V	66.0	40.2
推進効率%	21.3	17.2
	(シースなし)	(シースなし)

の逆起電力によって放電電圧が増加している可能性が示唆されている。また, 2) が生じた場合, 導電率が減少して放電電圧が増加する。3) の反応モデルは, 電子数密度分布などを介して導電率評価にも影響する。また, 導電率モデルも高精度化する必要がある。バルクプラズマのモデルに関して, 1)~3) の正確なモデリングは今後の課題である。さらに, シースモデルの構築およびそれとのカップリング計算も課題である。

前節で議論した条件 (推進剤流量 0.4 g/s , $J_{\text{dis}} = 5 \text{ kA}$) での推進性能を第4表に示す。放電電圧は以前の2温度モデル¹²⁾ の結果より大きな値になっている。これは第3図で示したように, 3温度モデルによる電流経路のアノード-カソード間距離が2温度モデルのときよりも長くなったためである。これに伴って投入電力が増加して空力的推力も増えたことで, 3温度モデルによる推力は2温度モデルの推力より大きな値になっている。

5. 結 論

本研究は MPDT (フレア型 MY-II 形状) の数値シミュレーション結果と実験結果の比較により, 推進剤である水素の解離・電離過程や振動エネルギー励起などの各種実在気体効果を考慮した水素 MPDT のモデルの妥当性を評価し, 温度非平衡性と解離・電離反応の特性について調べた。その結果, 以下のことが明らかになった。

1) 適切な入口条件を設定することで, 推進剤流量 1.37 g/s , 放電電流 $7, 8 \text{ kA}$ のとき, 計算による推力は実験結果をほぼ再現できていた。推進剤流量 0.4 g/s , 放電電流 5 kA のとき (以下の結論はこの計算条件のもの), 実験による電流経路を比較的よく再現できた。しかし, 数値計算結果におけるカソード上の電流経路は実験ほどカソード先端に集中しなかった。数値解析結果から評価した推進性能は, 推力 7.50 N , 比推力 1911 s , 放電電圧 66 V であった。

2) 温度分布を調べたところ, ほとんどの領域で $T_e > T_{\text{vib}} > T_{\text{tr}}$ の温度非平衡状態であることが明らかになった。振動-電子間のエネルギー緩和時間と流れの特性時間が同程度の非平衡状態の領域が存在するので, 本解析のように流れと振動-電子エネルギーの緩和過程をカップリングして解く必要がある。

3) 電子温度および電離度はカソード先端で高いため, 導電率はカソード先端で最大値となり, 放電電流分布はスラスト下流側へシフトする。また, 解離度は中心軸付近で1 (完全解離) に達するが, 電離度は1 (完全電離) には達せ

ず、最大で 0.2 程度であった。

4) 推進剤流量 1.37 g/s のとき、数値計算の放電電圧は実験結果より低かった。数値計算による放電電圧の予測精度向上のために、中性粒子とイオンの速度スリップのモデルやシースモデルなどの導入が今後の課題である。

参考文献

- 1) Uematsu, K., Morimoto, S. and Kuriki, K.: MPD Thruster Performance with Various Propellants, *J. Spacecraft*, **22** (1984), pp. 412–416.
- 2) Sovey, J. S. and Mantieneks, M. A.: Performance and Lifetime Assessment of Magnetoplasmadynamic Arc Thruster Technology, *J. Propul. Power*, **7** (1991), pp. 71–80.
- 3) Sumida, M. and Toki, K.: Scaling Law and Real Gas Effect of MPD Thruster, *AIAA Paper*-87-1066, 1987.
- 4) Shoji, T. and Kimura, I.: Analytical Study on the Influence of Nonequilibrium Ionization for Current Flow Pattern and Flow Field of MPD Arcjets, *AIAA Paper* 90-2609, 1990.
- 5) Funaki, I., Toki, K. and Kuriki, K.: Nonequilibrium Flow Analysis of a Two-Dimensional MPD Arcjet, *IEPC*-97-112, 1997.
- 6) Mikellides, P. G.: Modeling and Analysis of a Megawatt-Class Magnetoplasmadynamic Thruster, *J. Propul. Power*, **20** (2004), pp. 204–210.
- 7) Sato, H., Kubota, K. and Funaki, I.: Numerical Study on the Effects of Propellant Species in a Self-Field Magnetoplasmadynamic Arcjet, *IEPC*-2009-232, 2009.
- 8) Tahara, H., Yasui, H., Kagaya, Y. and Yoshikawa, T.: Experimental and Theoretical Researches on Arc Structure in a Self-Field Thruster, *AIAA Paper* 87-1093, 1987.
- 9) Kuchi-ishi, S. and Nishida, M.: Numerical Simulation of a Nonequilibrium Plasma Flow in a Nitrogen Arcjet Thruster Using a Three-Temperature Kinetic Model, *IEPC*-97-084, 1997.
- 10) Fujita, K. and Arakawa, Y.: Performance Computation of a Low-Power Hydrogen Arcjet, *J. Propul. Power*, **15** (1999), pp. 144–150.
- 11) Kubota, K., Funaki, I. and Okuno, Y.: Numerical Study of Plasma Behavior in a Magnetoplasmadynamic Thruster around Critical Current, *J. Propul. Power*, **25** (2009), pp. 397–405.
- 12) 佐藤博紀, 窪田健一, 船木一幸: 振動温度を考慮した水素 MPD アークジェットの数値解析, 第 54 回宇宙科学技術連合講演会, 3C04, 2010.
- 13) 中田大将, 都木恭一郎, 船木一幸, 清水幸夫, 國中 均, 荒川義博: 5ch 平行平板 MPD を用いた電極降下電圧の推定とその妥当性について, 平成 19 年度宇宙輸送シンポジウム, 2008, pp. 435–438.
- 14) 杵淵紀世志, 船木一幸, 都木恭一郎, 清水幸夫: 2 次元型 MPD アークジェットの速度場と電力収支計測, 日本航空宇宙学会論文集, **53** (2005), pp. 25–33.
- 15) Tahara, H., Kagaya, Y. and Yoshikawa, T.: Quasi-Steady MPD Arcjets with Applied Magnetic Fields, *AIAA Paper* 85-2001, 1985.
- 16) Gnoffo, P. A., Gupta, R. N. and Shinn, J. L.: Conservation Equations and Physical Models for Hypersonic Air Flows in Thermal and Chemical Nonequilibrium, *NASA TP*-2867, 1989.
- 17) Yos, J. M.: Transport Properties of Nitrogen, Hydrogen, Oxygen, and Air to 30,000°K, *RAD-TM*-63-7, 1963.
- 18) Stallcop, J. R., Levin, E. and Partridge, H.: Transport Properties of Hydrogen, *J. Thermophys. Heat Transfer*, **12** (1998), pp. 514–519.
- 19) Gupta, R. N., Yos, J. M., Thompson, R. A. and Lee, K. P.: A Review of Reaction Rates and Thermodynamic and Transport Properties for an 11-Species Air Model for Chemical and Thermal Nonequilibrium Calculations to 30 000 K, *NASA RP*-1232, 1990.
- 20) Sharma, S. P. and Schwenke, D. W.: Rate Parameters for Coupled Rotation-Vibration-Dissociation Phenomena in H₂, *J. Thermophys.*, **5** (1991), pp. 469–480.
- 21) Park, C.: Nonequilibrium Ionization and Radiation in Hydrogen-Helium Mixtures, *AIAA Paper* 2010-814, 2010.

付 録

A.1 輸送係数 ここでは、各輸送係数の評価方法について説明する。粘性係数以外の各評価式は文献 16) を参考にしている。なお、添え字の i, j の番号は 0~3 の範囲で、それぞれ H₂, H, H⁺, e を表す。

A.1.1 熱伝導係数 以下に並進温度、回転温度、振動温度、電子温度それぞれの熱伝導係数 λ_{tr} , λ_{rot} , λ_{vib} , λ_e の評価式を示す。

$$\lambda_{tr} = \frac{15}{4} k \sum_{i=0}^2 \frac{\gamma_i}{\sum_{j=0}^2 a_{ij} \gamma_j \Delta_{ij}^{(2)}(T_{tr}) + 3.54 \gamma_e \Delta_{ie}^{(2)}(T_e)} \quad (A1)$$

$$\lambda_{rot} = k \frac{\gamma_{H_2}}{\sum_{j=0}^2 \gamma_j \Delta_{H_2-j}^{(1)}(T_{tr}) + \gamma_e \Delta_{H_2-e}^{(1)}(T_e)} \quad (A2)$$

$$\lambda_{vib} = \lambda_{rot} \quad (A3)$$

$$\lambda_e = \frac{15}{4} k \frac{\gamma_e}{\sum_{j=0}^3 1.45 \gamma_j \Delta_{ej}^{(2)}(T_e)} \quad (A4)$$

各式中の修正衝突積分 $\Delta_{ij}^{(1)}$, $\Delta_{ij}^{(2)}$ は以下の通り評価した。

$$\Delta_{ij}^{(1)}(T_s) = \frac{8}{3} \left[\frac{2m_i m_j}{\pi k T_s (m_i + m_j)} \right]^{1/2} \pi \bar{\Omega}_{ij}^{(1,1)} \quad (A5)$$

$$\Delta_{ij}^{(2)}(T_s) = \frac{16}{5} \left[\frac{2m_i m_j}{\pi k T_s (m_i + m_j)} \right]^{1/2} \pi \bar{\Omega}_{ij}^{(2,2)} \quad (A6)$$

ここで下添え字 s は tr あるいは e である。衝突積分 $\pi \Omega_{i,j}$ は温度の関数であり、中性粒子との衝突によるものは文献 17, 18) を引用した。また、荷電粒子どうしの衝突積分は文献 19) の Gvosgover cross section for Coulomb collisions から評価した。

A.1.2 粘性係数 粘性係数 μ の評価式を以下に示す。

$$\mu = \frac{(\lambda_{tr} + \lambda_{rot}) Pr}{c_p} = \frac{(\lambda_{tr} + \lambda_{rot}) Pr}{5R_H/2} \quad (A7)$$

式中のプラントル数 Pr は 2/3 とした。

A.1.3 導電率 導電率 σ の評価式を以下に示す。

$$\sigma = \frac{e^2}{kT_e} \frac{\gamma_e}{\sum_{i \neq e} \gamma_i \Delta_{ei}^{(1)}(T_e)} \quad (A8)$$

A.2 解離・電離反応によるエネルギー増減 式 (4), (5) の解離反応によるエネルギーの増減は以下の式から求められる。

$$Q_{diss}^h = \frac{1}{2} c e V_{diss} \sum_{s=2}^4 2 (k_f n_{H_2} - k_b n_H n_H) n_s \quad (A9)$$

式中の係数 c は解離モデルを選択する係数であり、本解析

では $c = 1$ とした. 式 (6) 中の電子衝突による解離および電離反応のエネルギー増減は以下のように評価する.

$$Q_{\text{diss}}^e = \frac{1}{2} c e V_{\text{diss}} 2 (k_{f,1} n_{\text{H}_2} n_e - k_{b,1} n_{\text{H}} n_{\text{H}} n_e) \quad (\text{A10})$$

$$Q_{\text{ion}}^e = e V_{\text{ion}} \frac{\dot{\rho}_{\text{H}^+}}{m_{\text{atom}}} \quad (\text{A11})$$

各反応係数は, 以下の通り^{4, 10)} である. なお, 温度 T_s の単位は [K] である. 完全解離した場合, T_{vib} は物理的な意味を持たないため, $T_{\text{vib}} = T_{\text{tr}}$ として算出した.

$$k_{f1} = 7 \times 10^{-16} T_e^{0.33} \exp(-103,900/T_e) \quad (\text{A12})$$

$$\begin{aligned} k_{f2} &= k_{f3} \\ &= k_{f4} \\ &= 9.1 \times 10^{-12} \sqrt{T_{\text{tr}} T_{\text{vib}}}^{-1} \\ &\quad \times \exp(-51,900/\sqrt{T_{\text{tr}} T_{\text{vib}}}) \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

$$k_{f5} = 2.5 \times 10^{-17} T_e^{0.57} \exp(-158,000/T_e) \quad (\text{A14})$$

$$k_{b1} = 2.8 \times 10^{-39} T_e^{-1} \quad (\text{A15})$$

$$k_{b2} = k_{b3} = k_{b4} = 5.0 \times 10^{-42} \sqrt{T_{\text{tr}} T_{\text{vib}}}^{-1} \quad (\text{A16})$$

$$k_{b5} = 1.09 \times 10^{-20} n_e^2 n_i T_e^{-9/2} \quad (\text{A17})$$

A.3 エネルギー緩和項 並進-振動エネルギーの緩和項 $Q_{\text{tr-vib}}$ は Millikan-White による式²⁰⁾ から評価する. 完全解離の領域において $\rho_{\text{H}_2} = 0$ となるため, 振動エネルギーに関する緩和項はゼロとした.

$$Q_{\text{tr-vib}} = \rho_{\text{H}_2} \frac{e_{\text{vib}}(T_{\text{tr}}) - e_{\text{vib}}(T_{\text{vib}})}{\tau_{\text{tr-vib}}} \quad (\text{A18})$$

単位質量あたりの振動エネルギー e_{vib} と緩和時間 $\tau_{\text{tr-vib}}$ については, それぞれ以下のように評価する²⁰⁾.

$$e_{\text{vib}}(T_s) = \frac{R_{\text{H}_2} \theta_{\text{vib}}}{\exp(\theta_{\text{vib}}/T_s) - 1} \quad (\text{A19})$$

$$\tau_{\text{tr-vib}} = \frac{1}{p[\text{atm}]} \exp \left[A \left(T_{\text{tr}}^{-1/3} - 0.015 \mu^{1/4} \right) - 18.42 \right] \quad (\text{A20})$$

電子-振動エネルギーの緩和項 $Q_{\text{e-vib}}$ は以下のように評価する. 式中の電子・振動間の緩和時間 $\tau_{\text{e-vib}}$ は文献 21) から引用した.

$$Q_{\text{e-vib}} = \rho_{\text{H}_2} \frac{e_{\text{vib}}(T_e) - e_{\text{vib}}(T_{\text{vib}})}{\tau_{\text{e-vib}}} \quad (\text{A21})$$

並進-電子エネルギーの緩和項 $Q_{\text{tr-e}}$ は以下のように評価する.

$$Q_{\text{tr-e}} = 3 \sum_{s=0}^2 \frac{m_e n_e}{m_s} \nu_{e-s} k(T_{\text{tr}} - T_e) \quad (\text{A22})$$

本文中の電子-並進間のエネルギー緩和時間 $\tau_{\text{tr-e}}$ は以下のように評価した.

$$\tau_{\text{tr-e}} = \sum_{s=0}^2 \frac{m_s}{2m_e \nu_{e-s}} \quad (\text{A23})$$

A.4 全エネルギーの保存則 式 (4) の重粒子エネルギー保存則と式 (6) の電子エネルギー保存則を足し合わせると, 以下の式となる. これは全エネルギー保存則である.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (E_{\text{h}} + E_{\text{e}}) + \nabla \cdot [(E_{\text{h}} + E_{\text{e}} + p) \mathbf{u}] \\ &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} \\ & \quad + \nabla \cdot [(\lambda_{\text{tr}} + \lambda_{\text{rot}}) \nabla T_{\text{tr}} + \lambda_{\text{vib}} \nabla T_{\text{vib}} + \lambda_{\text{e}} \nabla T_{\text{e}}] \\ & \quad + \nabla \cdot (\tau \mathbf{u}) - Q_{\text{diss}}^{\text{h}} - Q_{\text{diss}}^{\text{e}} - Q_{\text{ion}}^{\text{e}} \end{aligned} \quad (\text{A24})$$