射流を含む水流の計算に就て¹⁾

本 間 仁²⁾

On the calculation of flow containing jet.

Masashi Honma, Member

Abstract

When we calculate the equation of flow by a numerical method, the calculation must be advanced in upward direction from the lower end of flow in the case of ordinary flow; that is when the flow is lower than the wave in the channel. While in the case of jet flow, that is when the flow is faster than the wave, the calculation must be advanced in downward direction.

In some problems it is possible for the state of flow to change from ordinary to jet in the course of running, and then the initial point of calculation can not be given artificially.

The author explains when such cases will happen and how the calculation is to be done in such cases.

河川の堤防の高さをきめる場合を初め、色々な水路の大きさを設計する際には、ある区間毎に一樣な流れと假定して計算して行くのが普通である。即ち断面の變化などによる影響は多くの場合に局部的であるから、以上のような考へ方でも全體的な設計は出来る。然し利根川の水害の例を見ると、極めて一局部に於ける Over flow が大災害の原因になつてゐる。従つて局部的な計算もおろそかにする事は出来ないのである。特に流れの中に射流部の現れる場合にはその計算上に特別な注意が必要である。

水面を傳わる波(長波)よりも速い流速を持つた流れを射流(Jet flow)と名付けて、波速以下の流れを常流(Ordinary flow)と呼んで區別する。従つて水深 h 、速度 v の水流に於て Froude 数を $\frac{v}{\sqrt{gh}}$ と取ると、射流では Froude 数が 1 より大きく、常流では之が 1 より小さい事になる。Dam を Overflow する水は頂上で Froude 数が 1 になり、その上下で夫々に常流及び射流になるのである。又、一樣な流れでは、ある限界の勾配

第 1 圖

を境として、之より急は勾配では射流、之より緩かな勾配では常流となるのであるが、この限界の勾配は水路面の粗さに關係し、實驗室内の水路などでは $\frac{1}{300}$ 前

後、實際の河川では $\frac{1}{150} \sim \frac{1}{200}$ 程度であつて、我國の河川には平地部に出てからも尙この程度の勾配を持つてゐるものがある。

一樣な底勾配 i の Open channel の定常的な流水の平均流速を v 、水深を h とすると、鉛直方向の加速度を無視すれば、水壓の強さは

$$p = \rho g z + \text{const.}$$

となるから、運動方程式は次の形で與へられる。

$$-i + \frac{dh}{dx} + \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + f_1 v^2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Pot. Energy Kinetic Energy Loss of Energy

但し α は流速に平均流速を用いた爲の補正係数で、 f_1 は Chezy 型の抵抗公式を採用する事にすれば $f_1 = \frac{1}{C^2 R}$ (R は Hydraulic mean depth) となるものである。この中の C は粗さと Reynolds 数とに關係するものであるが、計算に必要な程度の概略値は何時でも求められる。

連續方程式は流量を Q とした時に

$$v = f(Q, b, h)$$

で與えられる。但し水路の断面形を幅の廣い矩形と假定して、その幅を b と書く。

例えば幅の一樣な水路では

$$b = \text{const.} \quad v = \frac{Q}{bh(x)}$$

幅の變化する水路では

1) 昭和 22 年 11 月 22 日日本應用力學會第 1 回講演會にて發表。

2) 正會員 東京大學第 1 工學部

$$b=b(x) \text{ (given), } v=\frac{Q}{b(x)h(x)}$$

貯水池の餘水吐水路、或は道路の側溝の様に、流れながら横から一定の水の供給を受けてゐる場合には

$$Q=Q(x) \text{ (given), } v=\frac{Q(x)}{b(x)h(x)}$$

但しどの場合にも、 b や Q の變化は急激でないとして置いておく。即ち餘り幅が急に擴がれば側壁から流線が離れる事になり、又鉛直速度成分を無視した假定に反する場合も起る。何れにしても

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{h} \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{b} \right) - \frac{Q}{bh^2} \frac{dh}{dx}$$

$\frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{b} \right)$ は計算出来る量である。

$$\therefore \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{\alpha}{g} \frac{Q}{bh^2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{b} \right) - \frac{Q}{b} \right]$$

之を (1) に代入して整理すると

$$\frac{dh}{dx} \left[1 - \frac{\alpha}{g} \frac{Q^2}{b^2 h^3} \right] = i - f_1 \frac{Q^2}{b^2 h^2} - \beta \frac{\alpha}{g} \frac{Q}{bh^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{b} \right)$$

$Q=\text{const.}$ の時は $\beta=1$, $Q \neq \text{const.}$ ならば $\beta=1.5$ 但し横からの流入のある場合には、運動方程式の中に流入する水が位置エネルギーだけを持つて入る事と假定すると、(1) 式には $\frac{dQ}{dx} dx \times \frac{\alpha v^2}{2g}$ の項が加はるから補正係数 β が必要になる。

v を平均流速とすれば、Froude 数は $\frac{\sqrt{\alpha v}}{\sqrt{gh}}$ となつて、射流と常流との限界水深 h_0 は

$$\frac{\sqrt{\alpha v}}{\sqrt{gh_0}} = 1. \quad \text{即ち} \quad h_0 = \sqrt{\frac{\alpha Q^2}{g b^3}}$$

で與へられる。従つて (2) から

$$\frac{dh}{dx} \left(1 - \frac{h_0^3}{h^3} \right) = i - f_1 \frac{Q^2}{b^2 h^2} - \beta \frac{\alpha}{g} \frac{Q}{bh^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{b} \right)$$

$$\text{或は} \quad \frac{dh}{dx} = \frac{F_2(h, x)}{F_1(h, x)} \quad \dots \dots \dots (3)$$

と書かれ、 $F_1(h, x)=0$ の根は $h=h_0$ である。又 Chezy の公式 $v=C\sqrt{hi}$ を満足する h の値を h_0 で表はせば

$$F_2(h, x) = i \left(1 - \frac{h_0^3}{h^3} \right) - \beta \frac{\alpha}{g} \frac{Q}{bh^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{b} \right)$$

そこで $F_2(h, x)=0$ を満足する h の値を h' とする。

第 2 圖

$Q=\text{const.}$, $b=\text{const.}$ の時は $h_0=h_0$ であつて、普通の Backwater の公式になる。

(3) 式を與へられた境界条件の下に數値積分

と行へば、水面の Profil が求められる。先づこの Profil の性質を調べる爲に、 $h=h_0$ 及び $h=h'$ の兩曲線を圖に書き込むと、底勾配の比較的緩い場合には、幅が下流の方に向つて擴がる水路や、横からの流入のある水路に對しては、一般にこの兩曲線が一點 P で交つてゐる。そして水面の Profil は $h=h'$ に交わる點では底に平行、 $h=h_0$ に交はる點では鉛直になる。

尙この Profil は射流の時は $x \rightarrow \infty$ に於て漸近的に $h=h'$ に近付き、常流の時には $x = -\infty$ に於て漸近的に $h=h_0$ に近づく。この事は二種類の流れの性質上の大きな違いを示すものである。即ち、

1. Jet flow では或る地點で水深の變化が起ると、その變化は下流側には無限に傳はるが、上流側には或る範圍しか得はらない。
2. Ordinary flow ではこの様な變化は上流側には無限に傳はるが、下流側には傳はらない。

第 3 圖

圖 3 はその例を示してゐる。

水路を設計して、與へられた流量に對する Profil を計算する際には、既に述べた様に、(3) 式を與へられた境界条件 $h=h_1$ at $x=x_1$

から出發して數値積分して行くのであるが、上に述べた性質を知つて計算を行はないと、實際には起り得ない状態を計算すると言ふ場合が起り勝ちである。

一般に言つて Ordinary f. ならば下流端の條件から出發して上流に向つて計算し、Jet. f. ならば上流端の條件から出發して下流に向つて計算する事が必要であつて、反對方向に計算すると實際には control 出来ない状態を計算する結果になる。尙特別の注意を必要とするのは Profil が兩線の交點 P を通り、流れが Ordinary から途中で Jet に變り、Hydraulic jump によつて再び Ordinary に戻る場合である。之は Ordinary f. の水流に對して下流端での條件 $h=h_1$ が或る限界値以下になつた時に起るのであつてこの時は下流端でどの様に h_1 の條件を變えても、 h_1 が限界値の範圍内にある限り Profil は途中で Hydraulic jump が現はれ、それから上の形は境界条件に無關係に unique である。即ちこの様な範圍内では我々は水面の Profil を control する事が出来ないのであつて、従つて計算は P から出發して上下流に向つて進めなければならない。 P に於ける

第4圖

但し $h=f(x)$

から $\left[\frac{dh}{dx}\right]_P$ に関する方程式を作つて、 $\left[\frac{dh}{dx}\right]_P$ の値を求め、之を利用して計算を進めねばならないのである。

Dam の Overflow の場合には、遠心力の影響が入つて、(1) 式中の

$-i + \frac{dh}{dx}$ の項が補正されねばならない。假りに遠心力の爲に壓力分布が

$$p = \rho g \zeta - \alpha \zeta^n$$

で表わされるものと考へると、

Hydraulic

gradient =

$$= \frac{d}{dx} \left[z + (h - \zeta) + \frac{p}{\rho g} \right]$$

そこで $\alpha \zeta^n$ の鉛直断面を通じての平均値を求めると

$$\frac{1}{h} \int_0^h \alpha \zeta^n d\zeta = \frac{\alpha}{n+1} h^n$$

h 及び x の値は直ちに計算出来るから、之に對して

$$\left[\frac{dh}{dx}\right]_P = \lim_{x \rightarrow x_P} \left[\frac{d}{dx} \left(F_2(h, x) - \frac{d}{dh} F_1(h, x) \right) \right]$$

$$= \frac{d}{dx} F_2(h, x) - \frac{d}{dh} F_1(h, x)$$

$$= \frac{d}{dx} F_2(h, x) - \frac{d}{dh} F_1(h, x)$$

第5圖

従つて Hydraulic gradient は $i - \frac{dh}{dx}$ の代りに次の形になる。

$$i - \frac{dh}{dx} + b h^{n-1} \frac{dh}{dx}$$

従つてこの場合は

$$F_1(h, x) = 1 - b h^{n-1} - \frac{h_c^3}{h^3}$$

となる。そこで $F_1(h, x) = 0$ の根は $h = h_c$ とは少し違つた $h = h_c'$ になる。

この場合にも $h = h'$ と $h = h_c'$ の兩曲線は Dam の Crest の上で交はり、水面の Profil は境界條件が或る範囲内にある間は、條件に無關係に一定のエネルギーに對して u にきまつてゐる。而も一般に考へてゐる Free overflow の状態は常にこの範囲内に含まれてゐるのである。故に若しこの Free overflow の Profil を計算するのに、上流の方で水深と流速を與へると、之は全エネルギーを與へると共に流量も與へた事になつて、計算される曲線は一般には P を通る曲線とはならないのである。この事は流量測定堰で上流の方の水深（實際は之をエネルギーの總和と見做す）さえ測れば、流量が一義的にきめられる事からも確認出来る所である。

そこで計算はやはり P の位置から上下に向つて初められるべきものであつて、普通に Dam の流量を與へる公式を導く際には、 P に於ける條件を最小エネルギーの法則で代用してゐるのである。

合併號についてのお知らせ

第4號は頁數が増し、印刷も遅れてゐますので、4.5合併號と致します。第6號をも年内に刊行し、第7號より新しい編集方法に依る會誌を發行致す豫定です。

新しい編集方法並びに新執筆要項は別紙を御覽下さい。