小変歪翼理論に於ける基礎問題に就いて

近 藤 一 夫

On the Fundamental Problem in the Wing Theory of Small Disturbances.

By Kazuo Kondo member

Abstract

This paper forms a fundamental part of the investigations on the theory of the aerodynamical lift, which have been developed by the author during the last years of the Pacific War. He takes the point of view of the acceleration potential propounded by L. Prandtl in 1936, as the starting point, which presents a special convenience to the treatment of the high speed problems and oscillating airfoils.

We obtain, by application of Huygens' principle and the idea of Lorentz transformation concerning the classical wave equation, which governs the potential function of the field of small disturbances caused by the motion of the lifting system at high speed, the fundamental formulas of the acceleration and velocity field. The expression of the former obtained from Kirchhoff's formula concerning the field of pressure around the airfoil, linearly and automatically splits into two parts, one of which is the effect of the camber form of the wing section, while the other is the effect of the thickness.

We also obtain the fundamental formula of the oscillating lifting surface which is proved to be equivalent to Küssner's.

緒 論 流體運動の基礎条件を示す Euler の微分方程式及び連続の方程式は相當複雑な非線型である。故に揚力を生ずる物體の理論に於て空氣の流動を考察する際にもこれらの方程式の形が簡單なものになるやうに實際上差支へない程度の假定を導入して居る。

是迄最も屢々用ひられた假定は

(i) 空氣が無渦運動を爲す事と

(ii) 空氣の體積變化を無視する事である。

第一の假定は Helmholtz の定理等によつて殆んど恒に許容される。第二の假定も差支へを生じない事が多いが翼が相當な高速運動を爲す場合には周囲の空氣に急激な衝撃を與へるから密度や體積の變化を全く無視するのは妥

當を欠く。斯る省略の第一の難點は攪亂の傳播速度を無限に大きなものと考へて居る事である。微小量に關する高次の量を省略し基礎方程式を線型化する事が問題の取扱ひを容易にする所以であるが、これは音速を無限大とする事とは必ずしも一致しない。音速は有限として取扱はれるべきである。その立場に於て小変歪翼理論が成立する。

特に三次元的な翼の特性を概観するにはこれで充分であり、これ以上精しく翼による流場の攪亂を有限大のものとして取扱ふ事は實際上不可能である。從來よく行はれた翼の渦理論も最近數年間に發達しつつある加速度³⁾テンシヤル理論⁴⁾も共に此範疇に屬するのであるが今後は

1) 昭和 22 年 5 月 19 日、日本科學文化協會第 4 回講演會にて講演。

2) 正會員、東京大學第一工學部。

3) L. Prandtl: Tragflügeltheorie, I. u. II. Göttinger Nachrichten, Math-physik. Klasse (1918). 48/497, (1919) 107/137.

4) L. Prandtl: Theorie des Flugzeugtragflügels im zusammendrückbaren Medium. Luftfahrt to. frschung Bd. 13. (1936) 313/319

後者の活用が期待される。此論文の目的はこれに関する基本的な問題を鮮明にする事である。就中線型重疊の可能性が如何に重要な結果を招来するかと云ふ點を認識して我々の常識を今一度反省する事を努めてある。

§ 1. 基礎方程式の線型化 翼の迎角や厚さが充分小さいと考へ、速度成分や壓力 p 密度 ρ の勾配等自然微小と見做される量を省略する事によつて Euler の運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} \delta p \quad (1.1)$$

連続の方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \mathbf{q} = \rho m \quad (1.2)$$

となる。こゝに m は吹出しの分布密度であつて矢張り一次の微小量を表し、 $\delta \rho, \delta p$ は密度と壓力の平均値からの偏倚であつて

$$\delta \rho = c^2 \delta p, \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (1.3)$$

であり、 c^2 は音速に等しい。かくの如く書いて仕舞へば ρ と c^2 は常數として取扱はれる。

時間に関して (1.1) を積分すれば、grad に無関係に行はれ

$$\mathbf{q} = -\text{grad} \left[\int \frac{dp}{\rho} dt + F(t) \right] + \mathbf{q}_\infty(x, y, z) \quad (1.1.1)$$

を得る。 $\mathbf{q}_\infty$ は攪亂が未だ起らぬ以前の速度の初期値を示す。又 $F(t)$ は t のみの任意の函數を表す。無限時間前には揚力系が有限の領域に無く、流れの状態はその影響を受けない。即ち静止して居る。よつて我々は $\mathbf{q}_\infty = 0$ の場合だけを考慮すればよい。これは速度がスカラー量のポテンシャル

$$\phi = - \int \frac{dp}{\rho} dt - F(t) \quad (1.3)$$

の勾配になつて居る場合を意味する。故に速度の廻轉は無い。逆に云へば渦領域の流體運動は以下の議論の外でする。

かくして (1.3.1) は

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \Delta \phi = m \quad (1.4)$$

と書改められる。こゝに Δ は Laplace の演算記號を表はす。

所で Euler の方程式の左邊は加速度を表はす。故に小變歪條件の有無にかゝらず (1.1) は加速度が

$$\phi = - \int \frac{d\delta p}{\rho} - f(t) \quad (1.5)$$

なるスカラーの勾配になつて居る事を示す。此量を加速

度ポテンシャルと名附ける。小變歪條件により

$$\phi = - \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\delta p}{\rho} - f(t), \quad F'(t) = f(t) \quad (1.6)$$

なる關係がある。 $f(t)$ は t に関する任意の函數である。併し無限遠點では流れが静止して居ると考へられるから一般に常數となり

$$\phi = - \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\delta p}{\rho} + \text{const.}, \quad \phi = \int_{-\infty}^t \phi dt \quad (1.7)$$

である。

無限大氣中に翼やプロペラが運動する場合には揚力系が流場の特異點であつて吹出しの集りとして表現される。翼の外部に於ては壓力は到る處連続であるから (1.7) により、加速度ポテンシャルも矢張り連続である。然るに速度ポテンシャルは渦理論的考察の示す通り渦層の如き不連続面を有するから簡單には扱ひ得ない。よつて我々は先づ取扱ひ容易な加速度場を求め、これを型式的に積分して速度の場を求める。こゝに渦理論に對立する新しい方法が考へられる。

(1.7) を時間について偏微分して、(1.4) と組合せれば、

$$\square \phi = m(x, y, z, t) \quad (1.8)$$

が得られる。こゝに $\square$ は D'Alembert の演算記號

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

であり、(1.8) は所謂古典波動方程式である。故にポテンシャルの波は一定と見做された速度 c を以て媒體中を傳る。空氣の場合にはこれが「音速」である。速度ポテンシャルを支配する方程式が斯様に線型であるから、 ϕ に線型の演算子 $\partial/\partial t$ を作用させて得られる加速度ポテンシャルも同型の方程式即ち古典波動方程式を満足する。特に翼の外側では

$$\square \phi = 0 \quad (1.9)$$

である。かくして媒體の運動と力學的状態を支配する法則はすべて波動方程式に還元される。そうして所謂空氣壓縮性は悉く單に音速 c によつて代表される。

§ 2. 古典波動方程式の特性 古典波動方程式の一つの重要な特性はそれが Lorentz 變換に關して不變な形を保つ事である。Mach 數を $\beta = V/c$ として現實の時空間坐標系 $K(x, y, z, t)$ と

$$\bar{x} = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y, \quad z = z, \quad ct = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$x = \frac{\bar{x} + Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y, \quad z = z, \quad ct = \frac{ct + \beta \bar{x}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(2.1)

なる Lorentz 變換で結びつけられた假想の時空間

$K(x, y, z, t)$ を導入すれば

$$\square \phi = m, \quad \square \phi = 0 \quad (2.2)$$

等が成立する。こゝに $\square$ は新しい時空間に関する D'Alembert の演算記號

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

である。故に兩系に於ける音速は同一である。斯様な Lorentz 變換の空氣力學的解釋は別に述べてある。此處では此論文の内容と関係のある重要な綱目文を採録する。

(i) 岐點壓は Lorentz 變換によつて變化せず $\frac{1}{2} \rho V^2$ である。

即ち不變量である。

(ii) 變換に際して速度ポテンシャルは變化を受けない。加速度ポテンシャルは變化する。即ち新坐標 K に関するものを ϕ , ϕ とすれば

$$\phi = \bar{\phi}, \quad \phi = \frac{\bar{\phi}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.3)$$

である。

(iii) 亜音速では K , $\bar{K}$ 何れに於ても前進ポテンシャルは存在を許されない。

今一つの重要な特徴は Huygens の原理となる。流場内の着目點 $P(x, y, z)$ と吹出し點 $Q(x', y', z')$ の距離を

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (2.4)$$

とすれば任意の時刻 t に P に到達する攪亂の波は $t' = t - r/c$ なる時刻に Q を出發したものであつて、遅滯ポテンシャルの表示はこれら素波を重疊した結果

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{m(x', y', z', t - \frac{r}{c})}{r} dx' dy' dz' \quad (2.5)$$

で與へられる。

吹出し分布域が無限に長く柱状を成しその分布密度が空間直角坐標の一成分例へば z に無関係な場合にはそれによつて惹起される流體運動も矢張り z に無関係となり、 z 軸に垂直な何の断面を取つても全然同一である。併し斯様な二次元波動の表現は超越函數を含み三次元波動よりも却つて複雑な形相を呈する。例へば任意の點 P では無限遠方の點を含めてすべての吹出しの點から出發した波が通り過ぎる迄 P 點の攪亂は繼續するから、たとへ吹出しの活動が或有限時間内丈行はれた場合にも P 點に於ける攪亂に明確な開始點は認められるが、終止點は認められない。

例へば振動率 ω なる調和振動をなす點吹出しの遅滯ポテンシャルは

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{Ae^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} dx' dy' dz' \quad (2.6)$$

で與へられるが、直線狀分布即ち二次元點吹出しの場合には二次元極坐標 (w, θ) で表した波動方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial w^2} + \frac{1}{w} \frac{\partial \phi}{\partial w} + \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = Ae^{i\omega t}$$

の θ に無関係な特解として

$$\phi = -\frac{i}{4} \int H_0^{(2)} \left(\frac{xw}{c} \right) Ae^{i\omega t} dx' dy' \quad (2.7)$$

により與へられる。こゝに

$$w = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (2.8)$$

である。Hankel 函數は

$$H_0^{(2)}(z) = \frac{2}{\pi i} \int_1^\infty e^{-izt} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

なる無限積分で表される。これは (2.6) の如き三次元素波を無限に重疊したものと一致し、無限積分がその無限の重疊に相當する。

§ 3' 翼面の境界條件 翼自身の迎角や厚さも矢高及びその垂直運動の速度等も一次の微小量であると考へる。故に攪亂の波源と考へられる翼の特異點は上下の翼面から恒にこれらの量と同程度の小さな距離内にあり、或任意の基準面例へば前進方向に並行な母線によつて作られる面への射影上に分布して居ると考へても實際との差はより高次の微小量に過ぎない。

更に揚力系上下面の實際位置に於ける速度場の代りにこの射影面に於ける速度場を用ひ實際の翼面への法線の代りにこの射影面への法線を用ひてもその差はすべて二次の微小量であつて無視する事が出来る。故に斯様な特異點分布によつて揚力系を代表させて差支へない。すると揚力系に對する境界條件とはこの特異點分布面に於ける流體粒子の運動が常に翼面の形と姿勢及びその變動と矛盾しないやうに行はれるといふ事である。

従つて斯様な境界條件を満たす速度の場を求める境界値問題を取扱はねばならぬ。併し直接速度の場を取扱ふ代りに先づ加速度即ち壓力の場から出發する方が都合がよい。何故ならば加速度場の特異點は翼のある位置に表現はれ有限の閉曲線内に含まれる。故に加速度ポテンシャルはその外側では特異點のない古典波動函數であつて Huygens の原理に従ひ Kirchhoff の定理によつて與へられる。従つて

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Omega_\nu dS \quad (3.1)$$

によつて與へられる。但し S は翼系を包む任意の閉曲面で Ω_ν は

$$\Omega_\nu = \left(\phi \frac{\partial 1/r}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \frac{1}{cr} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \nu} \right)_{t'} \quad (3.2)$$

即ち、 ν を S 面上の面素 dS に立てた外向きの法線とし、その点 (x', y', z') と流場の着目点 (x, y, z) との距離を r 、 S の上のポテンシャルの値を ϕ として作つた (3.2) の右邊の括弧 () 内の式の遅滞時刻 t' に於け

第 1 圖

る値を表す。積分は勿論此閉曲面全體に亘つて行ふ (第 1 圖)。但し此定理が適用されるには二、三の副條件があり、それらは悉く満足されて居るものとする。

揚力は基準面の上下の壓力差から生ずるものであるから、壓力及びそれに比例する加速度ポテンシャルの上下面に於ける値を夫々 $p_0, p_u; \phi_0, \phi_u$ と記し、上記の基準面の面素を dS' とすれば (3.1) を

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \iint \left[(\phi_0 - \phi_u) \frac{\partial 1/r}{\partial \nu'} - \frac{1}{r} \frac{\partial (\phi_0 - \phi_u)}{\partial \nu'} - \frac{1}{cr} \frac{\partial (\phi_0 - \phi_u)}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \nu'} \right]_{t'} dS' \quad (3.2)$$

と書表す事が出来る。こゝに積分は基準面の片側 S' に亘つて行はれは、 ν' は一方の側即ち揚力と反對 (下向) に dS' に立てた法線である。 r を微分する際には

$$\frac{\partial r}{\partial \nu'} = \frac{\partial r}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \nu'} + \frac{\partial r}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \nu'} + \frac{\partial r}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial \nu'}$$

なる法則による。或は (3.3) を書き改めて

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu'} \left[\frac{(\phi_0 - \phi_u)_{t'}}{r} \right] - \frac{2}{r} \left[\frac{\partial (\phi_0 - \phi_u)}{\partial \nu'} \right]_{t'} \right\} dS' \quad (3.3.1)$$

或は

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \iint \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial \nu'} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \nu'} (\log r) \right) \frac{\partial}{\partial t'} \right] (\phi_0 - \phi_u) \right]_{t'} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (\phi_0 - \phi_u)}{\partial \nu'} \right]_{t'} \right\} dS' \quad (3.3.2)$$

と書くと次の考察に都合がよい。

一見複雑な翼の形状や運動も各種の單純な要素から線型重疊によつて作られて居ると考へてよい。故に各要素を別々に取出して其境界條件を論じ、しかる後これらの適當なものを選んで實際の問題に適する組合せを作ればよい。例へば任意の翼を

(i) 前後縁を結ぶ所謂翼弦直線と迎角零に於ける平均矢高線について定められる厚さ零の翼。

(ii) その翼型と同一肉厚分布を有する迎角零の對稱翼の二要素から重疊合成されるものと考へる事が出来る。故にその各々に對する風壓、ポテンシャル等を夫々指標によつて區別し $p(1), p(2); \phi(1), \phi(2)$ 等の如く記すことにしよう。勿論各要素共更に數多の要素から合成され、其何れもが時間的に識化するものであつて差支へない。

就中指標 (2) は肉厚の影響を表すが、肉厚が時間的に變化する事は實際に殆ど無い。故にこれは定常な對稱翼に還元して仕舞ふ場合が多い。これに反し指標 (1) は時間的變化により影響される事も多く軌近の翼理論に於ける重要な研究題目である。故にこれを特に「揚力面」と稱する。次に述べる様に揚力面に於ては (3.3.2) の被積分函數の第二項が消失し、肉厚のみを取出して論ずる際には (3.3.1) の第一項が消失する。

(A) 揚力面 時間に関する偏微分と ν に関する偏微分は無關係に行はれるから (1.7.2) により得られる關係

$$\frac{\partial (\phi_0 - \phi_u)}{\partial \nu'} = \frac{\partial^2}{\partial \nu' \partial t} (\phi_0 - \phi_u)$$

の右邊の微分を行ふ順序を交換して、下向き法線速度 $w = \frac{\partial \phi}{\partial \nu'}$ に關して

$$\frac{\partial (\phi_0 - \phi_u)}{\partial \nu'} = \frac{\partial}{\partial t} (w_0 - w_u) \quad (3.4)$$

が得られる。所が揚力面が通過する際にその上側の流體粒子は押上げられ、下側の粒子は押下げられ、何れもその横坐標位置に於ける揚力面矢高 z' の變化

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{\partial z'}{\partial t} - \frac{\partial z'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t}$$

に等しい上下運動を行ふ。但し $\frac{\partial x'}{\partial t}$ は揚力系の前進する速さであり等速直進翼では V に等しい。故に境界條件としては當該位置に於て下向きの吹下しが

$$w = -\frac{dz'}{dt} = -\frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial z'}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) \quad (3.5)$$

なる値を有すべきであると云ふ結論が得られる(第2圖)

揚力面に於ける吹下しの値は矢高分布とその變形のみによつて定まるから上面同一である。故に

$$w_0 - w_u = w_{(1)} \quad (3.6)$$

が成立する。よつて(3.1)により當然(3.3.2)の積分記號内の第二項が消失する。故に加速度ポテンシャルは第一項のみによつて與へられ

$$\phi_{(1)} = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial}{\partial \nu'} \left[\frac{(\phi_0 - \phi_u)'}{r} \right] dS' \quad (3.7.1)$$

である。

しかるに dS' 上に強さが $(\phi_0 - \phi_u)dS'$ に等しい單純吹出しがある場合の遲滯ポテンシャルを表す。單純吹出しを ν' によつて微分した $\phi_{(1)}$ は ν' の方向に並んだ正負二つの單純吹出しが無限に近接した極限の場合に相當するから(3.7)次の如く結論を引出す事が出来る。即ち「揚力面の運動によつて超る流場の加速度ポテンシャルは面密度が揚力面の上下のポテンシャル差に等しい。」

特に定常翼の如き場合は簡單であつて揚力要素と共に運動する單位の強さの單純吹出しのポテンシャルを ϕ とすれば、任意の時刻に於ける揚力面の加速度ポテンシャルは

$$\phi_{(1)} = \iint \frac{\partial [(\phi_0 - \phi_u)\phi^*(x, y, z; x', y', z')]}{\partial \nu'} dS' \quad (3.7.2)$$

よつて與へられる。故に我々は揚力系に隨伴運動する單純吹出しのポテンシャル場を知る必要がある。これは等速直進翼では(2.7)によつて直ちに與へられる。又プロペラ翼素の如き螺旋定常運動をなす場合にも同様の方針が成立し單純吹出しは多少複雑ではあるが既に求められて居る。

最後に揚力密度を Π とすれば

$$\phi_0 - \phi_u = \frac{p_u - p_0}{\rho} = \frac{\Pi}{\rho} \quad (3.8)$$

であるから(3.7.1), (3.7.2)は夫々

$$\phi_{(1)} = -\frac{1}{4\pi\rho} \iint \frac{\partial}{\partial \nu'} \left(\frac{[\Pi]'}{r} \right) dS',$$

$$\text{及び } \phi_{(1)} = \frac{1}{\rho} \iint \frac{\partial}{\partial \nu'} [\Pi \phi^*] dS' \quad (3.9)$$

と書く事が出来る。

(B) 肉厚 上下對稱な翼断面に於て迎角が零である限り總ての條件が上下同一である事は自明である。従つて上下面の壓力は約合つて全體としては揚力に貢獻しない。これは厚さが時間的に變動しても、それが上下對稱である限り成立つ事である。

壓力に比例する加速度ポテンシャルも當然時間にかゝらず上下同一の値を取る。従つて(3.3)の積分記號内の第二項以外(3.3.2)の積分記號内の最後の項以外は恒に消失する。故に對稱翼に對する加速度ポテンシャルの表示は

$$\phi_{(1)} = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \nu'} (\phi_0 - \phi_u)' \right] dS' \quad (3.10)$$

である。但し S' に關する積分は基準面について行ふ。

或は又上、下面に於ける吹下しを(3.4)に於けると同様 w_0, w_u と記せば

$$\phi_{(2)} = \frac{1}{4\pi} \iint \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial t} (w_0 - w_u) \right] dS'$$

と書ける。然るに此場合には(3.6)と異り

$w_0 = -w_u = w_{(2)}$ であるから

$$\phi_{(2)} = \frac{2}{4\pi} \iint \left[\frac{2}{r} \frac{\partial w_{(2)}}{\partial t} \right] dS' \quad (3.11)$$

となる。

更に(3.7.2)と同様 ϕ^* を用ひると

$$\phi_{(2)} = -4 \iint \left[\frac{\partial w_{(2)}}{\partial t} \phi^*(x, y, z, x', y', z') \right] dS' \quad (3.11.1)$$

と表はす事も出来る。 $\frac{\partial w_{(2)}}{\partial t}$ は境界條件によつて與へられる。故に肉厚分布に對しては單なる積分によつて加速度ポテンシャル即ち壓力が得られる。

§ 4. 速度の場 すべての公式を揚力系に對して移動しない坐標 $\bar{K}$ 即ち

$$\bar{x} = x - Vt, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = t \quad (4.1)$$

について書表して置く方が便利である。 $\bar{K}$ 系に於て一定空間位置を保つ點は $\bar{K}$ 系に於ても一定空間位地を保つ。故に $\bar{x}$ に無關係な $\bar{t}$ のみの任意の函數 $\bar{f}(\bar{t})$ が $\bar{K}$ 系に

6) 近藤一夫, 翼及びプロペラの理論に於ける壓縮性流體の小變型問題に就いて。九州帝國大學工學彙報第17巻第4號(昭和17年)195/226頁

7) 近藤一夫, プロペラの誘導速度に對する空氣壓縮性の影響に就いて。日本航空學會誌第11巻第108, 109, 110號(昭和19年)237頁

於て如何に表現されるかを試べて見よう。

Lorentz 變換 (2.1) を $\bar{K}$ と K に関して書けば

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \\ \bar{t} &= \sqrt{1-\beta^2} \left[t - \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\bar{x}}{V} \right] \quad (4.2)\end{aligned}$$

である。故に $\bar{K}$ 系の坐標原点から出發する波が

$\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}$ なる距離に達する場合の遲滯時刻を $\bar{K}$ 及び K によつて表せば

$$\begin{aligned}t = t - \frac{\bar{r}}{c} &= \sqrt{1-\beta^2} \left[t - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \frac{\bar{x}}{V} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{1-\beta^2} \frac{\sqrt{\bar{x}^2 + (1-\beta^2)(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)}}{V} \right] \quad (4.3)\end{aligned}$$

となる。攪亂波の出發點を原点と限らず、任意の點 $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ とすれば

$$\bar{t}' = \sqrt{1-\beta^2} \left[t - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{V} - \frac{\beta}{1-\beta^2} \frac{\bar{R}}{V} \right] \quad (4.3.1)$$

である。こゝに

$$\bar{R} = \sqrt{(\bar{x} - \bar{x}')^2 + (1-\beta^2)\{(\bar{y} - \bar{y}')^2 + (\bar{z} - \bar{z}')^2\}} \quad (4.4)$$

とする。

故に $\bar{f}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}')$ なる函数が Lorentz 變換で $\bar{f}$ となり、その際短縮して α 倍になるものとすれば、

$$\begin{aligned}\bar{f}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}') &= \frac{1}{\alpha} \bar{f}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}') \\ &\quad - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{V} - \frac{\beta}{1-\beta^2} \frac{\bar{R}}{V} \quad (4.5)\end{aligned}$$

である。右邊の $\bar{f}$ は $\bar{K}$ 系に於ける空間位置 (x, y, z) によつて異なる。併し $\bar{x} = \bar{x}', \bar{y} = \bar{y}', \bar{z} = \bar{z}'$ なる點に於ては

$$\bar{f}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}') = \frac{1}{\alpha} \bar{f}(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}') \quad (4.5.1)$$

となる。

特に f を K に於ける吹出しの密度とすれば、これは速度ポテンシャルに比例し従つて Lorentz 變換に對して不變である。従つて $\alpha = 1, \bar{f} = f = m'$ である。併し吹出し系全體の強さを Q, Q とすれば、これはその分布體積の Lorentz 短縮に比例して變化するから

$$\alpha = \sqrt{1-\beta^2}, \quad Q = \frac{Q}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.6)$$

である。此關係は吹出し分布が一點に集中して弧立點となつた場合にも成立すると考へられる。

故に $\bar{K}$ 系の一定位置にある單純吹出しのポテンシャル

$$\phi_0 = -\frac{1}{4\pi} \frac{Q(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}' = \bar{t}' - \frac{\bar{r}}{c})}{\bar{r}}$$

を速度ポテンシャルが同一値に保たれる事を考慮して $\bar{K}$ 系に變換すれば、 $\bar{K}$ 系の一定位置にある強さ $\bar{Q}$ なる

單純吹出しのポテンシャル函数

$$\phi_Q = -\frac{Q(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}' - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{V} - \frac{\beta}{1-\beta^2} \frac{\bar{R}}{V})}{4\pi \bar{R}}$$

を得る。これは K 系で速度 V を以つて前進する強さ

$$Q = Q_{r=0} = Q(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}') \quad (4.8)$$

なる單純吹出しのポテンシャル ϕ_Q と同一物である。

以上の結果を用ひると $\bar{K}$ 系の x 軸上を直進する揚力面の加速度ポテンシャルを $\bar{K}$ 系について書く事が出来る。それには前節の考察により揚力密度に比例する複吹出しの分布を考へればよいから其密度を

$$\Pi = \Pi(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}')$$

とすれば

$$\begin{aligned}\phi_{(1)} &= \phi_{(1)} = \\ &= -\frac{1}{4\pi\bar{\rho}} \iint \frac{\partial}{\partial \bar{t}'} \frac{\Pi(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}' - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{V} - \frac{\beta}{1-\beta^2} \frac{\bar{R}}{V})}{\bar{R}} dS' \quad (4.9)\end{aligned}$$

である。

速度ポテンシャルは (4.9) を K 系の時刻 t について積分して求められる。その際 t は t と一見同一であるが $\bar{x}$ の中にも含まれて居るから實際の演算に當つて注意が必要である。 K 系の静止點を取つてその K 系に於ける坐標を現在の着目時刻 $t = t$ に於て $\bar{x}$ 、過去の任意の時刻 $t = \tau$ に於て X と記せば

$$X - \bar{x} = V(t - \tau), \quad X = \bar{x} - V(\tau - t) \quad (4.10)$$

である。しかるに無限時間前から着目時刻迄 ϕ の値を時間 t に關して積分する際には被積分函数が任意の時刻 t に對し K 系の坐標によつて $\phi = \phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ なる形に表現されるとすれば、積分記號の中には過去の時刻 t に於ける ϕ の値 $\phi(X, \bar{y}, \bar{z}, \tau)$ を取つて、これを τ について $\tau = -\infty$ から $\tau = t$ 迄積分すべきである。故に精しく書けば

$$\phi = \int_{-\infty}^t \phi[\bar{x} - V(\tau - t), \bar{y}, \bar{z}, \tau] d\tau \quad (4.11)$$

となる。この際 $\bar{x}, t$ 等は常數の如く取扱はれるから (4.10) により $dX = -V d\tau$ なる關係があり、従つて (4.11) の代りに

$$\phi = -\frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\bar{x}} \phi(X, \bar{y}, \bar{z}, t + \frac{\bar{x} - X}{V}) dX \quad (4.11.1)$$

と書く事も出来る。

(4.11) と (4.11.1) に於ける無限積分の下限は媒體が少しも攪亂を受けて居ない時刻又は場所を意味するのである。この二つの公式は何れを採用しても本質的には差が無い。併し主として (4.11.1) によつて議論を行ふ方が便利である場合が多い。

又最初から基礎方程式を K 系について書表して (4.7.2) に相當する $\phi = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - V \frac{\partial \phi}{\partial t}$ の解を求めても同一の結果を得る。

そこで揚力面の加速度ポテンシャルを表す (4.9) の中にある變數 $\bar{x}, t$ を $X, t + (\bar{x} - X)/V$ によつて置換えこれを (4.11.1) に代入して

$$\phi_{(1)} = \phi_{(2)} = \frac{1}{4\pi\rho V} \iint_F \frac{\partial}{\partial \nu'} \Pi(\bar{x}', y', z', t + \frac{\bar{x} - X}{V} - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \frac{X - \bar{x}}{V} - \frac{\beta}{1 - \beta^2} \frac{R^*}{V}) dXdS' \quad (4.13)$$

を得る。ここに

$$R^* = \sqrt{(X - \bar{x}^2) + (1 - \beta^2)\{(y - y')^2 + (z - z')^2\}}$$

とし、 F は揚力基準面全體について積分する事を意味する。

對稱肉厚の影響についても同様に論じられ、 x', y', z' 及び t の函數 $w_{(2)}(\bar{x}', y', z', t)$ に對して成立つ關係

$$\frac{\partial w_{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial w_{(2)}}{\partial t} - V \frac{\partial w_{(2)}}{\partial \bar{x}} \quad (4.13)$$

により加速度ポテンシャルは

$$\phi_{(2)} = -\frac{p_{(2)}}{\rho} = -\frac{1}{2\pi} \iint_F \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial \bar{x}^*} \right) w_{(2)} \left\{ \bar{x}^*, y', z', t - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} (\bar{x} - \bar{x}') - \frac{\beta}{1 - \beta^2} \frac{R}{V} \right\} \right]_{\bar{x}^* = \bar{x}} dS' \quad (4.14)$$

である。

§ 5. 調和振動 前節の公式 (4.13), (4.14) は定常運動とは限らず一般非定常運動に對しても成立つ。但し前進速度が一定の場合のみである。差當り最も簡単な例題として又一般應用の基礎として振動翼に關する公式を書下して見よう。調和振動に對する解がわかればそれを線型に重疊して任意の時間的變化に對する場合を知る事が出来る。

但し最早 K 坐標系のみについて考察すれば充分で K 系と混同する懼れは無いから上示標 (—) を省いて $\bar{x}, y, \dots, \Pi, \dots$ 等の代りに單に $x, y, \dots, \Pi, \dots$ 等と書く事にしよう。且揚力基準面が xy 面に平行な上反りの無い翼を考へる。

時間因數を複素形に書いて、揚力密度と吹下しを

$$w = \rho V^2 f(x', y') e^{i\lambda t}; \quad w = V e(x', y') e^{i\lambda t}$$

$$w_{(1)}, w_{(2)} = V e_{(1)}, e_{(2)}(x', y') e^{i\lambda t}$$

の如く記す事にしよう。 λ は振動率である。

上反りの無い翼では基準面への法線 ν' の方向は $-z'$ の方向と一致するから (4.13) により

$$\phi_{(1)} = -\frac{V}{4\pi} \iint_F f(x', y') \frac{\partial}{\partial z'} \left(e^{i\lambda(t + \frac{\bar{x} - X}{V} - \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{X - \bar{x}}{V} - \frac{\beta}{1 - \beta^2} \frac{R^*}{V})} \right) dXdS' \quad (5.2)$$

である。

一方加速度ポテンシャルに對する對稱翼厚の貢獻は (4.14) により

$$\phi_{(2)} = -\frac{p_{(2)}}{\rho} = -\frac{V^2}{2\pi} \iint_F \left(\frac{i\lambda}{V} e_{(2)} - \frac{\partial e_{(2)}}{\partial x} \right) \frac{e^{i\lambda(t - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{V} - \frac{\beta}{1 - \beta^2} \frac{R}{V})}}{R} d\bar{x}' dy' \quad (5.3)$$

である。

定常 $x=0$ の場合には夫々

$$\phi_{(1)} = -\frac{V}{4\pi} \iint_F f(x', y') \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{R^2} \right) dXdS',$$

$$\frac{p_{(2)}}{\rho} = \frac{V^2}{2\pi} \iint_F \frac{\partial e_{(2)}}{\partial x'} \frac{d\bar{x}' dy'}{R}$$

となる。

又翼幅が無限に大きく翼断面がすべて同一の大きさと同一の輪廓を有し、同一の位相を以て振動する場合には、翼幅に垂直な何の平面に於てもすべての状態が同一であるから、流れは二次元的である。故に最初から二次元流を假定して (2.7) 等によつて與へられる吹出しを重疊して振動翼の基礎方程式を作る事が出来る。此際前部の方針に従つて K, K, K 等の坐標系を使ひわけける必要がある。或は Küssner の如く三次元振動翼の一般式から出發して、翼幅上の各點に起る攪亂の影響を一々重疊しても所要の公式が求められるが、これは第2節の無限積分を再び繰返して行ふ事に過ぎない。

結局翼弦長なる二次元振動揚力面の速度ポテンシャルは

$$\phi_{(1)} = -\frac{iV}{4\sqrt{1 - \beta^2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x') \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i\lambda(t + \frac{\bar{x} - X}{V} - \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{X - \bar{x}}{V})} \frac{\partial}{\partial z} H_{(0)} \left(\frac{\lambda N}{c\sqrt{1 - \beta^2}} \right) dXd\bar{x} \quad (5.4)$$

であり、對稱翼厚による壓力は

$$\frac{p_{(2)}}{\rho} = -\frac{iV^2}{2\sqrt{1 - \beta^2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{i\lambda}{V} e_{(2)} - \frac{de_{(2)}}{dx'} \right) e^{i\lambda(t - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{V})} H_0 \left(\frac{\lambda N}{c\sqrt{1 - \beta^2}} \right) d\bar{x}' \quad (5.5)$$

となる。こゝにも坐標の原点は基準翼弦の中點にあるとし

$$N = \sqrt{\frac{(X-x')^2 + (1-\beta^2)(z-z')^2}{1-\beta^2}} \quad (5.17)$$

とする。

しかるに極限 $z \rightarrow 0$ に對しては

$$\lim_{z \rightarrow 0} z H_1^{(2)}(z) = -z \frac{d}{dz} H_0^{(2)}(z) = -\frac{2i}{\pi},$$

$$H_0^{(2)}(z) = \frac{2i}{\pi} \log z$$

であるから、特に $c \rightarrow \infty$ に對しては

$$\phi(w) = \frac{V}{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x') \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{ix(t+\frac{w-x}{V})} \frac{1-z'}{(X-x')^2 + (z-z')^2} dX dz'$$

及び

$$\frac{p(z)}{\rho} = -\frac{V^2}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\varepsilon(z)}{dx'} - \frac{ix}{V} \varepsilon(z) \right) e^{ixt} \{ \log[(x-x')^2 + (z-z')^2] + \cos nt \} dx'$$

が得られる。又 $x \rightarrow 0$ に對しては

$$\frac{p(z)}{\rho} = -\frac{1}{2\pi} \frac{V^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d\varepsilon(z)}{dx'} \log[(x-x')^2 + (z-z')^2] dx'$$

となる。但し附加項を除いてある。これは最初から定常二次元吹出しを重ねたものと全く一致する。

結 語 以上は脚注(5)と共に且て發表した小變歪空氣力學の基礎問題に關する覺書を補訂正し、更に根本的な概念の究明と應用への途を拓く目的で行つた考察の結果である。理論の展開に關しては竹田愛郎君の盡力を謝す。

- 9) 近藤一夫、翼理論と有限音速に就て。日本航空學會誌第9巻第80號(昭和17年)637/649頁

アメリカ工學の進歩

天井輻射温燥用ゴム電熱羽目板 輻射燥房用として U. S. Rubber Co. の C. W. Higbee 氏は4フイート角で、化學操作により電導性にしたゴム層を絶縁體のフェノール樹脂數層の間に挟んだ熱板羽目板を作成し、既に12の住宅について試験をした。天井の約7割をこの羽目板で覆い全體に塗料、紙張漆喰塗り、或は布地被覆によりて天井仕上をする。石棉板で裏打ちをなし、剛性を保たて且上方に熱を逃がさぬよう上面にはアルミ箔を張る。ゴムの抵抗により發熱し1平方フイート當り17~22wattである。商品名をアスコン(Uskon)と稱してゐる。(日米科學通信)

超高速迴轉鋼球による塗料の附着性試験法 シンシチナ大學の Walter Soller 博士は、直徑わずか

2分の鋼球に塗料を塗り、真空中につるして回轉磁界で毎分240萬回、迴轉せしめその附着力の試験を行う方法を考案した。(日米科學通信)

中空性プラスチックの刷毛 豚の毛の代りに中空のプラスチック毛でペンキ刷毛をつくると、毛細管現象で毛と毛の間のみでなく毛の中空部までペンキを吸上げるため、一度に吸上げるペンキの量が大いに増すことが出来る。(日米科學通信)

吸水劑 ペントナイトという粘土性物質は吸水性があるが、これに充分吸水させた上これを凍らせて氷とし、次に昇華法によつてその氷を取除くと輕いやわらかいふわふわした吸水性の材料が得られる。(日米科學通信)