$$\lambda^2 = \frac{8}{\sqrt{15}} \frac{U}{u'} \nu t_1 = \frac{8}{\sqrt{15\pi}} \frac{U}{u_0'} e^{\frac{\pi}{2\nu t_1}} \nu t_1 \quad (26)$$

渦の直径 λ は乱れの percentage と緩和時間とに関係する。第2表に掲げた値を(26)に入れると、 $x=2$ inches においては、 $\lambda=0.239$ inch となる。 $A=2$ として(2)によつて計算すると $\lambda=0.134$ inch となる。しかし後者は乱れの勢力の消散に必要な最小渦の直径で、この渦は拡散には余り役立たないとして得られたものである。但し何れも $M=0.9$ inch であつた。

尚(24),(26)に従つて $\sqrt{Y^2} = Y'$ の値を計算し、Taylor が(11)によつて計算した値⁷⁾との比較を第3表に掲げる。但し吾々の場合渦を直径 λ なる球と見做し、 $k=1.6$, $c=3\pi\lambda$ とした。

第3表においては u_0' と u_2' とから、 u' の値が u_0'/e に等しくなる点の x の値を知つて t_1 を求め、この t_1 の一定値を用いたが、実際は x の大きい所は小さい所

よりも緩和時間の値が大きくなるから t_1 は x の函数かと思われる。

第 3 表

x (inches)	Y' (inches) cul. by Taylor	Y' (inches)
0	0	0
2	0.039	0.049
4	0.074	0.093
6	0.096	0.131
8	0.118	0.165
12	0.154	0.222
18	0.196	0.281
24	0.231	0.316
30	0.284	0.334
36	0.284	0.351
42		0.334

7) Proc. Roy. Soc. London, A, Vol. 151, p. 473, 1935

偏光弾性実験による軸と楕桿との結合部分の應力分布の研究¹⁾

川 田 雄 一²⁾

Study by Photoelastic Method of Stress Distribution at the Connection between a Shaft and a Crank Arm.

By Yuichi Kawada,

Abstract

There is a type of connection of an arm and a shaft, in which an arm split at its top embraces a shaft and the split part is fastened by a bolt after the shaft was inserted. The stress distribution of the arm, mentioned above, was investigated by photoelastic method.

1. 緒言 楕桿と軸とを結合する方法として、楕桿の軸嵌合用の孔の頂部を切離し、軸を嵌合した後、切離した部分をボルトで締付ける型式のものがある。本研究は、この楕桿の結合部附近の応力分布を偏光弾性実験によつて求め、結合の機構を明かにしたものである。

2. 供試片 本実験に使用した楕桿と軸の試験片の寸法は第1図の通りで、夫々厚さ 6 mm のフェノライト板及厚さ 4 mm のセルロイド板から各1箇宛を、軸の外径と楕桿の孔の内径は旋盤により、その他の部分は手仕上によつて製作した。軸の嵌合代は直径で、0.02~0.05 mm の遊合であつた。

3. 実験装置および実験方法 偏光弾性実験は、先

づフェノライト試験片に対し光源に水銀燈を用いてプリンジ写真を撮影し、次にセルロイド試験片に対し光源にアーク燈を使用して等傾曲線および主応力曲線を求めた。第2図は前者の実験装置である。なお図式積分法によつて各部の主応力を求めた。

楕桿には夫々第1図(b)および(c)の2種の軸を嵌め、同図(a)の締付位置 I および II にそれぞれ 35.7 kg の圧縮荷重を第2図に示したように挺子と分銅で加え、軸の内径と締付位置が応力分布に及ぼす影響をも調べた。軸の嵌合面には鉛丹 (Pb_3O_4) を白皎油に

1) 昭和 23 年 11 月 29 日原稿受理。

2) 正会員、都立機械工業専門学校。

第 1 図

第 2 図

第 3 図

第 4 図

溶解した滑剤を塗布して、嵌合面の局部的な不規則な接触を除くようにした。

4. 実験結果 フェノライト試験片に対するフリンジ写真は第3図の通りで、写真の一締は別の曲げ試験片で検定した結果、 0.215 kg/mm^2 の主応力差に相当している。セルロイド試験片に対する等傾曲線は第4図の通りで、主応力曲線は第5図のようになり、また以上の結果から図式積分法で横桿の内外周の応力を求めると第6図のようになる。この主応力分布図から、横桿の最大応力は外周の締付部のすぐ下の部分に生じており、また孔の内周から軸に垂直に作用する主応力（これを握応力と名付ける）は、上部の横桿を切離した部分の近くが最大であることがわかる。いま握応力

第 5 図

分布の展開図を作り、この曲線の下方面積を求めると、軸を全周から締付ける力、即ち握力が得られる。この握力は第1表の通りで、締付力の位置が軸の中心から遠ざかると大きくなり、また中空軸を使用した場合は最も小さい。握応力の最大値は、締付位置を軸の中心から離れたときが最も大きく、また握応力の最大平均比は中空軸の場合最大で 3.14 に達している。

この型の結合の確実さは握力によつて決定され、一定の締付力に対して握力の大きい程効率が高い。そこで全周の握力 $2Q$ と締付力 $2P$ との比を結合効率と名付けると、この値は第1表の最後の欄に示したようになり、軸 I、締付位置 I の場合 2.66 であつて、この型式の結合効率はかなり高いことを示している。

5. 結合効率の計算式 先づ第7図(a)のよ

第 6 図

軸	締付位置	締付力 P (kg)	握力 2Q (kg)	握 応 力 (σ_2)			結合効率 $\eta = Q/P$
				最大 ($\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$)	平均 ($\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$)	最大 平均	
I	I	35.7	190	0.646	0.253	2.55	2.66
I	II	35.7	237	0.940	0.315	2.98	3.34
II	I	35.7	160	0.665	0.212	3.14	2.25

第 1 表 偏光弾性実験による軸の握力調査結果

うに、軸が矩形断面の柱であり、これを抱く横桿は一定断面の片持真直梁と仮定して結合効率の計算式を求める。ボルトの締付力 P によつて軸は集中反力 Q をうけるから、この問題は同図 (b) をとけばよいことになり、これはまた同図の (c) (d) (e)、即ち b 点に於ける変位 δ_b を生ずべき力 Q' (c 図)、曲げモーメント $P \cdot m$ (d 図) およびこれによつて生じた a 点の傾き θ_1

第 7 図

を打消すべき a 点に於ける曲げモーメント M_{a2} (e 図) を組合せたものに等しいから、 E_1 および E_2 を横桿および軸の材料の縦弾性係数とし、I を横桿に相当す

第 8 図

る梁の様な断面二次モーメント、A を軸に相当する柱の様な断面積とすると、

$$\delta_b = \frac{Qn}{2AE_2} = \frac{Q'l_3}{3E_1I}$$

よつて

$$M_{a1} = Q'l = \frac{3IE_1nQ}{2AE_2l^2}$$

(d) 図および (e) 図より

$$\theta_1 = \frac{Pml}{6E_1I} = \frac{M_{a2}l}{3E_1I}$$

$$\therefore M_{a2} = \frac{Pm}{2}$$

横桿の a 点の曲げモーメントを M_a とすると

$$M_a = M_{a1} - M_{a2} = \frac{3IE_1nQ}{2AE_2l^2} - \frac{Pm}{2} \quad (1)$$

他方

$$M_a = P(l+m) - Ql \quad (2)$$

(1) および (2) 式より、結合効率 η は次のように求まる。

$$\eta = \frac{Q}{P} = \frac{1 + \frac{3m}{2l}}{1 + \frac{3IE_1n}{2AE_2l^3}} \quad (3)$$

次に一歩試験片の形に近づけた第 8 図の場合、即ち軸が外径 D、内径 d、厚さ t なる円板の場合を考える。力 Q による円板の片側の変位 δ_b は

$$d/D=0 \text{ なる場合}^3) \dots \delta_b \approx 5.3 \times 10^{-5} \sqrt{\frac{Q}{dD}} \quad (4)$$

$$d/D=1 \text{ なる場合, } E=21000 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \text{ として} \dots$$

$$\delta_b = 5.3 \times 10^{-6} \frac{Q}{t} \left(\frac{1+d/D}{1-d/D} \right)^3 \quad (5)$$

d/D が 0 と 1 の中間の値に対しては (6) 式で表わされるものと仮定する。但し (6) 式は $d/D=0$ の場合は

軸	締付位置	η_0 (光弾性)	η (計算)	$\frac{\eta - \eta_0}{\eta_0} \times 100$
I	I	2.66	2.72	+2.3 %
I	II	3.34	3.28	-1.5 %
II	I	2.25	2.26	+0.5 %

第 2 表 (8) 式による結合効率と実測値との比較

3) 材料は鋼の場合で、単位は kg および mm とする (4) 式については附録参照のこと。

(4)式に、また $d/D \approx 1$ の場合は(5)式と合致する。

$$\delta_0 = 5.3 \times 10^{-(5+d/D)} \frac{Q^{0.5(1+d/D)}}{D^{0.5(1-d/D)} t^{0.5(1+d/D)}} \left(\frac{1+d/D}{1-d/D} \right)^3 \quad (6)$$

然るときは、第8図もまた第7図(b)によつておきかえられるから、前と同様の計算で(7)式が得られる。

$$Q + 2.66 \times 10^{-d/D} \frac{I \left(\frac{1+d/D}{1-d/D} \right)^3}{D^{(3.5-0.5d/D)} t^{0.5(1+d/D)}} - Q^{0.5(1+d/D)} - \left(1 + 3 \frac{m}{D} \right) P = 0 \quad (7)$$

(7)式を図式にとけば Q が求まり従つて η が求まる。供試片の横棒は眞直梁でないから、(7)式は更に修正を要する。そこで(8)式のように修正し、偏光弾性試

合驗片の数値を代入すると第2表のようになり、計算値と実験値との差は2.3%以内となる。

$$Q + 4 \times 10^{(1-d/D)} \frac{I \left(\frac{1+d/D}{1-d/D} \right)^3}{D^{(3.5-0.5d/D)} t^{0.5(1+d/D)}} - Q^{0.5(1+d/D)} - \left(1 + 2.6 \frac{m}{D} \right) P = 0 \quad (8)$$

(8)式は、供試片に近い形状の横棒の結合効率の計算式と考えてよからう。但し単位はkgおよびmmとする。

(8)式に本実験の締付位置Iの場合の数値を與えて、効率と d/D との関係を図示すると第9図のようになり、 P が実用値附近の大きさに特になく小さい場合は結

合率は $d/D=0.4$ 附近迄略一定で、従つて $d/D \leq 0.4$ なる場合は次の

$$\eta = 1 + 2.6 \frac{m}{D} \quad (9)$$

なる近似式を用いても、第9図鎖線の示すように充分正確である。第8図の横棒と軸の結合効率を求めるに當つて、外力 Q による軸の縮みを外径 D 、内径 d なる輪の薄肉リングとしての撓みと、巾 $D-d$ 、厚さ t 、長さ D なる柱の外力 Q による縮みとの和と見なすと前と同様の計算から、

$$\eta = \frac{1 + 3 \frac{m}{D}}{1 + 12 \frac{I}{tD^3} \left\{ 0.223 \left(\frac{1+d/D}{1-d/D} \right)^3 + \frac{1}{1-d/D} \right\}} \quad (10)$$

(10)式の係数を(11)式のように修正すると実験結果と2%の差で一致し、また d/D との関係は第9図点線のようになる。

$$\eta = \frac{1 + 3 \frac{m}{D}}{1 + \frac{I}{tD^3} \left\{ 1.2 \left(\frac{1+d/D}{1-d/D} \right)^3 + 130 \left(\frac{1}{1-d/D} \right) \right\}} \quad (11)$$

結合効率が求まると、横棒と軸との間に振りモーメントが作用したときに結合面に滑りを起さない為に必要なボルトの締付力を計算

第9図

第10図

軸	締付位置	P (kg)	T (計算)	T (実験)	M (計算)	M (実験)
I	I	35.7	42.8	40	20.4	20
I	II	35.7	56.5	55	46.7	50
II	I	35.7	42.8	45	27.9	26

第3表 T 及 M の計算値と実験値の比較

することが出来る。μ を結合面の摩擦係数、 T_s および P_s をそれぞれ横桿と軸の間に滑りを生ずるときの振りモーメントおよびボルトの締付力とし、 D を軸の外径とすると

$$P_s = \frac{T_s}{\mu \eta D} \quad (12)$$

6. 横桿の最大応力計算式 横桿が軸を抱いている部分を真直梁と仮定して、この梁の外内周の応力から梁に作用する引張力と曲げモーメントを求めると、第10図のようになる。ボルト締付部の直下に生ずる横桿の最大応力 σ もこの引張力 T と曲げモーメントの為に生ずるものと考えられるからその部分の断面積を A 、断面係数を z とすると、

$$\sigma = \frac{T}{A} + \frac{M}{z} \quad (13)$$

第 11 図

T および M は更に

$$T = \alpha \frac{m}{D} P; \quad M = \beta \left(\frac{D+d}{D-d} \right)^{\gamma} \left(m - \frac{D}{2} \right) P \quad (14)$$

にて表わされるものと仮定し、 α, β, γ なる定数を $\alpha = 1.8; \beta = 0.0785; \gamma = 0.25$ とおくと(14)式から計算した T と M は第10図の実験値と第3表に示したように最大7%の偏差で一致する。よつて横桿の最大応力の計算式として(15)式が得られる。

$$\sigma = 1.8 \frac{m}{D} \frac{P}{A} + 0.0785 \sqrt{\frac{D+d}{D-d}} \left(m - \frac{D}{2} \right) \frac{P}{z} \quad (15)$$

7. 結言 横桿と軸とを結合する一方法に対して偏光弾性実験を行い、結合状態に於ける応力分布を調査して結合の機構を明かにした。結合効率の計算式を導いた。その結果、結合部が振りモーメントに耐え得る為に必要なボルトの締付力が計算出来るようになった。又その場合の横桿の最大応力を求める応力計算式を導いた。

附録. 円板を2枚の平板で圧縮した場合の外力方向の変位。

半径 a なる円板を厚い平板で圧縮したときの応力は⁴⁾(第11図参照)。

$$2\alpha\alpha = \frac{4p}{\pi D} (1 - e^{-2\alpha}) \sin 2h [(1 + e^{-4\alpha}) \cos 2\beta + 2e^{-2\alpha} \cos 2h] + \frac{2p}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{\sin 2(h+\beta)}{e^{2\alpha} + \cos 2(h+\beta)} + \tan^{-1} \frac{\sin 2(h-\beta)}{e^{2\alpha} + \cos 2(h-\beta)} \right] \quad (16)$$

$$2\beta\beta = -\frac{4p}{\pi D} (1 - e^{-2\alpha}) \sin 2h [(1 + e^{-4\alpha}) \cos 2\beta + 2e^{-2\alpha} \cos 2h] + \frac{2p}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{\sin 2(h+\beta)}{e^{2\alpha} + \cos 2(h+\beta)} + \tan^{-1} \frac{\sin 2(h-\beta)}{e^{2\alpha} + \cos 2(h-\beta)} \right] \quad (17)$$

但し

$$D = \{1 + e^{-4\alpha} + 2e^{-2\alpha} \cos 2h \cos 2\beta\}^2 - \{2e^{-2\alpha} \sin 2h \sin 2\beta\}^2 \quad (18)$$

よつて $e_1 = \frac{1}{E} \{ \alpha\alpha - \sigma(\beta\beta) \}$, $\delta = \int_{\alpha=\infty}^0 e_1 d\alpha$ なる関係から、 $\beta = \frac{\pi}{2}$ にそつた変位 δ が(19)式のように求まる。但し $2h$ は極めて小さく、 p は一様に分布しているものと仮定し、又円板と平板の接触巾 $2ha$ は、Hertz の式から

$$2ha = 2.15 \sqrt{\frac{(Q/t) \cdot (2a)}{E}}$$

とした。但し (Q/t) は単位厚さの平板への外力である。

$$\delta = \frac{(1+\sigma)}{\pi E} \left(\frac{Q}{ta} \right) \left\{ \log \frac{3.04}{\sqrt{E}} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{Q}{ta} \right) \right\}$$

$$+ \frac{0.76(1+\sigma)}{E^{3/2}} \left(\frac{Q}{ta} \right)^{3/2} - \frac{2.31(1+\sigma)}{\pi E^2} \left(\frac{Q}{ta} \right)^2 - \frac{(1-\sigma)}{3.04\pi\sqrt{E}} \sqrt{\frac{Q}{ta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nh}{n^2} \quad (19)$$

円板および平板の材料が鋼の場合として $E = 21000 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma = 0.3$ を代入し、変位 δ と $\sqrt{\frac{Q}{ta}}$ との関係を図示してみると、近似的に(20)式の直線とみなしてよいことがわかつた。

$$\delta = 37.5 \times 10^{-6} \sqrt{\frac{Q}{ta}} = 5.3 \times 10^{-5} \sqrt{\frac{Q}{tD}} \quad (20)$$

4) J. Kuno : Phil. Mag. Vol. 13 (1932) p. 810 による。