二 渦と圓環境界¹⁾

竹 山 壽 夫²⁾

Helical Vortices and Cylindrical Boundaries of Circular Cross Section

By Hisawo TAKEYAMA

Abstract

The velocity potential of helical vortices in the cylindrical boundaries, whose cross sections are circles coaxial with the vortices, is obtained in order to estimate the tip loss and body interference for axial blowers or propellers. In the fixed boundary the circulation is increased near the tip, but in the free one it is decreased. And it is shown that the inner and outer boundaries can be treated separately in usual blowers.

まえおき 直線の随伴渦に対しては円型、楕円型、矩型の境界が誘導速度に及ぼす影響が詳しく論ぜられているが、揚力線が回転している場合には平面内の流れから先端の循環の損失を近似的に求めたもの (Handbuch der Physik) 以外にはないようである。翼理論で知られているように揚力が小さい時には第一次の近似として、随伴される渦は進行方向に軸をもつ螺旋面上にあると考えると差支えなく、無限後方を考えれば螺旋対称の渦の場が考えられる。このようなところではポテンシャルの微分方程式が二次元化されて取扱い易い。渦が単独に存在する場合にはその解が既に求められている (河田三治: 航空研究所報告第172号)。直線渦の場合は境界に対して鏡像の考えから、他の渦をつけ加えて境界の影響をしらべることが出来たが、螺旋渦の場合には断面が円の境界でも直観的に鏡像を促えることが難しく実際鏡像が一本の螺旋渦にならないのである。矩型断面や楕円型の断面では定常なポテンシャルが存在しないので、円断面に限って胴体外壁或は両者が同時にある場合について補正項を求めてみる。

I 単独の二のポテンシャル 無限後方では螺旋渦によつて生ずる速度場のポテンシャルは次の方程式で與えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial \mu} + \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (1)$$

$$\mu = \frac{\omega r}{v} \quad \zeta = \theta - \frac{\omega z}{v}$$

v : 進行速度 ω : 回転の角速度 r : 半径一様循環 Γ で等間隔にある p 本の渦のみによるポテンシャルは

$$\phi_0 = -\frac{p\mu'\Gamma}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{vm}(pm\mu') K_{vm}(pm\mu) \times \sin pm\zeta \quad \mu \geq \mu'$$

$$\phi = -\frac{p\Gamma}{\pi} \left(\frac{p}{2\pi} - \zeta \right) - \frac{p\mu'\Gamma}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} K'_{vm}(pm\mu')$$

$$(pm\mu') I_{vm}(pm\mu) \sin pm\zeta \quad \mu \leq \mu'$$

μ' は渦のついている螺旋面の回転軸からの半径に相当する。

II 胴體の影響 胴体表面 $\mu = \mu_0$ に於ては半径方向の速度成分は零であるから胴体のあるときのポテンシャル Φ は次の条件を満足していなければならない。

$$\mu = \mu_0 \text{ に於て } \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0$$

ポテンシャルは境界があるために ϕ^* だけ補正されるものと考えれば $\Phi = \phi + \phi^*$ と書くことが出来るから $\mu = \mu_0$ に於て

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial \mu} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mu} \quad (2)$$

$\mu \rightarrow \infty$ に於て $\phi^* \rightarrow 0$ とならねばならない。(2) を満足する (1) の解は、

$$\phi^* = p\mu'\Gamma/\pi \sum_{m=1}^{\infty} K'_{vm}(pm\mu') I'_{vm}(pm\mu_0) K_{vm}(pm\mu) / K'_{vm}(pm\mu_0) \cdot \sin pm\zeta^* \quad (3)$$

揚力面に於ける誘導速度の補正は方位角方向に

$$w_{\zeta}^* = p^2\mu'\Gamma / 2\pi r \sum_{m=1}^{\infty} mK'_{vm}(pm\mu') I'_{vm}(pm\mu_0) K_{vm}(pm\mu) / K'_{vm}(pm\mu_0) \quad (4)$$

進行方向に $w_{\mu}^* = -\mu w_{\zeta}^*$

で與えられる。但 $\frac{dI_m(t)}{dt} = I'_m(t)$, $\frac{dK_n(t)}{dt} = K'_n(t)$ $I_{vm}(pm\mu)$, $K_{vm}(pm\mu)$ は変形ベッセル函数であつて

*) 記号の入つた数はそれより前の項と後の項との積とする。即ち $1/a \cdot b = b/a$

(a) 翼数 p が大なる時, (b) 回転角速度 ω が小さいとき, (c) 螺旋のピッチが余り大きくない時等の漸近展開が知られているからそれを用いて誘導速度 (4) の級数の漸近的意味の和をとることが出来る。

(a) 翼数の多いとき

$$w_{t0} + w_{t*} = \lim_{p \rightarrow \infty} p\Gamma / 4\pi r \left[r^p / (r^p - r'^p) - r^p / \{ r^p - (r_0^p / r')^p \} \right] = 0 \quad w_{t*} + w_{t*} \rightarrow p\Gamma / 4\pi r$$

となるから壁の影響は非常に小さくなる。

(b) ω が小さいとき

$$w_{t0} + w_{t*} = -p\Gamma / 4\pi r \left[r^p / (r^p - r'^p) - r^p / \{ r^p - (r_0^p / r')^p \} \right] = w_{t*} + w_{t*}$$

第一項は円盤上に等間隔にならんだ p 本の直線渦で第二項はその鏡像の渦による速度をあらわし、既に知られた結果である。

(c) 螺旋のピッチが余り大でない時 Nicholson の漸近式をつかうと

$$w_{t*} = p\Gamma / 4\pi r + p\Gamma / 4\pi r (1 + \mu^{1/2}) / (1 + \mu^{3/2}) \left[1 / \{ \exp(p t_1 + p t_2) - 1 \} + 1/2 p \left\{ 1/\mu' \cdot (1 + 1/\mu'^2) - 2/\mu_0 \cdot (1 + 1/\mu_0^2) \right\}^{-3/2} \right] \times \log \left\{ 1 / (1 - \exp(p t_1 + p t_2)) \right\} \Bigg]$$

$$t_1 = f(\mu) - f(\mu_0), \quad t_2 = f(\mu') - f(\mu_0)$$

$$f(\mu) = \sqrt{1 + \mu^2} + 1/2 \log \left\{ (\sqrt{1 + \mu^2} - 1) / (\sqrt{1 + \mu^2} + 1) \right\}$$

以上は渦の強さが一定の場合であるが、分布している時には積分すればよく、実際の計算では階段状におきかえて近似するのが便利である。

又流れ函数を $\Psi = \phi + \phi^*$ とおくと

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \phi^*}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial r} = \frac{1 + \mu^2}{r} \frac{\partial \phi^*}{\partial \zeta}$$

なる関係があるから此より ϕ^* を定めることが出来る。

$$\Psi = \frac{p\Gamma}{2\pi} \left[\log \mu + \frac{1}{2} \mu'^2 - 2\mu' \mu \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ I'_{vm} (pm\mu') K'_{vm} (pm\mu) - K'_{vm} (pm\mu') / K'_{vm} (pm\mu_0) \cdot I'_{vm} (pm\mu_0) K'_{vm} (pm\mu) \right\} \cos pm\zeta \right] \quad \mu > \mu'$$

$$\Psi = \frac{p\Gamma}{2\pi} \left[\log \mu + \frac{1}{2} \mu'^2 - 2\mu' \mu \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ K'_{vm} (pm\mu) I'_{vm} (pm\mu') - K'_{vm} (pm\mu') / K'_{vm} (pm\mu_0) \cdot I'_{vm} (pm\mu_0) K'_{vm} (pm\mu) \right\} \cos pm\zeta \right] \quad \mu < \mu'$$

III 外壁の影響 外壁と翼の先端に間隙がなければ先端から随伴渦が出ないが、僅かでも間隙があると渦が出て先端に於て揚力の損失を生ずる。外壁の半径を r_0 とすると、ポテンシャルの満すべき境界の条件は前と同様で、補正ポテンシャル ϕ^* は次のようになる。

$$\phi^* = p\mu' \Gamma / \pi \sum_{m=1}^{\infty} I'_{vm} (pm\mu') / I'_{vm} (pm\mu_0) \cdot K'_{vm} (pm\mu_0) I'_{vm} (pm\mu) \sin pm\zeta$$

翼の位置に於ける補正速度は

$$w_{t*} = p^2 \mu' \Gamma / 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} m I'_{vm} (pm\mu') / I'_{vm} (pm\mu_0) \cdot K'_{vm} (pm\mu_0) I'_{vm} (pm\mu) \quad w_{a*} = -\mu w_{t*}$$

前の如く漸近展開をつかつて和を求めてみると固定壁は誘導速度を単独の時に比して減少するように作用していることがわかる。

次に自由境界の時即送風機に対して流れる空気が或る半径内に限られていてそれより外の空気が静止している時には、この境界面にそうての空気の速度は変化しないから

$$\phi^* = p\mu' \Gamma / \pi \sum_{m=1}^{\infty} K_{vm} (pm\mu_0) / I_{vm} (pm\mu_0) \cdot I'_{vm} (pm\mu') I_{vm} (pm\mu) \sin pm\zeta$$

$$W_{t*} = p^2 \mu' \Gamma / 2\pi r \sum_{m=1}^{\infty} m K_{vm} (pm\mu_0) / I_{vm} (pm\mu_0) \cdot I'_{vm} (pm\mu') I_{vm} (pm\mu)$$

此の時には迎へ角が増大するような作用をしている。

何れの場合も直線渦よりも影響は小さい。壁の影響をあらわす流れ函数の項は固定壁では

$$\phi^* = p\Gamma \mu' \mu \pi \sum_{m=1}^{\infty} K'_{vm} (pm\mu_0) / I'_{vm} (pm\mu_0) \cdot I'_{vm} (pm\mu') I'_{vm} (pm\mu) \cos pm\zeta$$

自由境界では

$$\phi^* = p\Gamma \mu' \mu \pi \sum_{m=1}^{\infty} K_{vm} (pm\mu_0) / I_{vm} (pm\mu_0) \cdot I'_{vm} (pm\mu') I_{vm} (pm\mu) \cos pm\zeta$$

IV 胴體と外壁があるとき 軸流送風機の場合には大きなボスが使われることがあるが、此の場合には

胴体と外壁とを別々に考えて補正しては誤差が大きくなるから双方の影響を同時に考える必要がある。

その場合の補正 ϕ^* は、 μ_0 は胴体があり μ_1 に固定壁があるものとして

$$\phi^* = p\Gamma/\pi \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \Delta_{am}/\Delta_m \cdot K_{vm}(pm\mu) + \Delta_{bm}/\Delta_m \cdot I_{vm}(pm\mu) \right\} \sin pm\zeta$$

$$w_i^* = \frac{p^2\Gamma}{2\pi r} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \Delta_{am}/\Delta_m \cdot K_{vm}(pm\mu) + \Delta_{bm}/\Delta_m \cdot I_{vm}(pm\mu) \right\}$$

$$\Delta_m = K'_{vm}(pm\mu_1)I'_{vm}(pm\mu_0) - K'_{vm}(pm\mu_0)I'_{vm}(pm\mu_1)$$

$$\Delta_{am} = \mu' I'_{vm}(pm\mu_0) \left\{ K'_{vm}(pm\mu_1)I'_{vm}(pm\mu') - K'_{vm}(pm\mu')I'_{vm}(pm\mu_1) \right\}$$

$$\Delta_{bm} = \mu' K'_{vm}(pm\mu_1) \left\{ K'_{vm}(pm\mu_0)I'_{vm}(pm\mu') - K'_{vm}(pm\mu')I'_{vm}(pm\mu_0) \right\}$$

$\omega \rightarrow 0$ では直線渦となり、外側と内側の二つ円に依つて無限に多くの鏡像が生じていることがわかる。

外壁が自由境界の時は

$$\phi^* = p\Gamma/\pi \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \Delta_{am}/\Delta_m \cdot K_{vm}(pm\mu) + \Delta_{bm}/\Delta_m \cdot I_{vm}(pm\mu) \right\} \sin pm\zeta$$

$$\Delta_m = K'_{vm}(pm\mu_0)I'_{vm}(pm\mu_1) - K_{vm}(pm\mu_1)I'_{vm}(pm\mu_0)$$

$$\Delta_{am} = \mu' I'_{vm}(pm\mu_0) \left\{ K'_{vm}(pm\mu_1)I'_{vm}(pm\mu_1) - K_{vm}(pm\mu_1)I'_{vm}(pm\mu') \right\}$$

$$\Delta_{bm} = \mu' K_{vm}(pm\mu_1) \left\{ K'_{vm}(pm\mu_0)I'_{vm}(pm\mu') - K_{vm}(pm\mu')I'_{vm}(pm\mu_0) \right\}$$

流れ函数は省略する。

あとがき 種々の円筒型の境界に対して、渦螺旋渦の単独の誘導速度に対して補正すべき量を求めたが、何れも漸近展開によつて簡単な形の比較的よい近似を求めることが出来る。それによれば外壁が固定境界の時は誘導速度が大きく迎へ角は大きくなり、自由境界の場合はその反対となる。又直径 600mm 数直径 300mm 翼数 10 の軸流送風機*) について外壁と翼端との間隙が 0, 0.3, 0.6, 3 mm ある場合に推内分布を求めてみると胴体は翼端に対して、外壁は根本の部分に対して殆ど影響を與えないことがわかつた。この程度では両者の影響は別々に求め合算してもよいことになる。尚翼数の多い時は間隙を小さくしないと先端の推が損失の変化は大きくあらわれる。以上の計算では粘性、圧縮性は考えに入れてない。

*) Curt Keller: Axialgebläse vom Standpunkt der Tragflügeltheorie の一軸流送風機の實驗に用いられた羽根率のす法を幾分かえたもの

1) 昭和 23 年 11 月 13 日 日本應用力学會第 7 回講演會にて講演 昭和 24 年 4 月 8 日原稿受理

2) 正會員 理工學研究所

On the Vortex Theory and the Acceleration Potential.*

By Kazuo KONDO

University of Tokyo

Introduction and Summary.

We have two different methods in treating the theoretical problems of wings and airscrews, namely, the vortex theory¹⁾ which has been prevailing up to this time and the recent theory by means of acceleration potential.²⁾

They belong both to a class of simplified theories

based on the assumption of small disturbances of the motion of air around the lifting systems.

But it seems to us that their mutual relation has not been explained sufficiently. The apparent difference of their expressions of the condition of small disturbances has made it somewhat difficult.

In the case when we take the theory of the acceleration field, misunderstanding will seldom happen about this fundamental assumption, for we have

*) Read at the 1st Session of the Society of Applied Mechanics of Japan Nov. 22nd, 1947, and received Dec. 6th, 1947.