非線型振動系における分數調波振動に関する覺書¹⁾

西 野 吉 次²⁾

Some Notes on the Sub-harmonic Resonance in the Non-linear Mechanical Vibratory System

By Kichiji NISHINO

Abstract

The author dealt theoretically with some natures of the subharmonic resonance in the vibratory system with a small nonlinear characteristic. At first he treated the Duffing's Equation with viscous damping and then the case of the restoring force expressed as a curve of n degrees of the displacement.

1. 緒 言 振動系によつては特殊な振動現象を起すことがある。例えば航空発動機の取付部分の微小遊隙のために予想より遙かに大きい回転数で猛烈な振動が起つたり、また矩形や楕円形断面の軸の回転においてみる如く弾性係数が時間と共に変化するような場合に、自己振動数とみなされるものの二倍の外力振動数で催振されて一種の共鳴の現象を起す等は首題の分數調波振動の好例であらう。前者の例の如く、復元力が直線的でない非線型機械振動系の強制振動問題の内、一次共振については既に Martienssen, Hartog, 榎木氏³⁾等により論ぜられているが、上述の分數調波振動については最近二見氏⁴⁾により取り扱われた外余り知らない。機械振動系においても問題によつては重要にして興味ある現象であると考えられるので、本論文ではこの現象の二三の特性を僅小の非線型特性の場合につき理論的に考察を進めてみた。

2. 分數調波振動の發生とその振幅

振動方程式：

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \lambda_0 \sin \nu \tau \quad (2.1)$$

を考える。 $\mu \ll 1$ の場合については既に L. Mandelstam および N. Papalexis⁵⁾ が解析的に詳しく取り扱い分數調波の發生條件を明らかにした。ここでは攝動法によりこれを再考する。すなわち μ の微小なる限り(2.1)の解は

$$x = x^{(0)} + \mu x^{(1)} + \mu^2 x^{(2)} + \dots, \quad (2.2)$$

の如く展開出来る。ここで $x^{(j)}$ は μ を含まない時間の函数である。もし $\mu \approx 0$ の時は運動は線型系の場合すなわち $\ddot{x} + x = \lambda_0 \sin \nu \tau$ ($\nu \neq 1$) の場合の運動と大差ないことが予想されるのであるが、線型系では周知の

如く自由振動と強制振動とが起り前者は僅かの減衰で時間と共に消滅する。しかし(2.1)で微小でも $\mu \neq 0$ の場合にはもはや通称される自由振動、強制振動の区別はなくなるが、ある條件の下では線型系の自由振動に相当するものが減衰の存在にもかかわらず消滅しないで残り得ることがある。これがいわゆる分數調波振動の基本波となるのである。このことにつき以下数式的に辿つてみる。 $f(x, \dot{x})$ に(2.2)を代入して μ につき展開すれば

$$f(x, \dot{x}) = f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) + \mu F_1(\tau) + \mu^2 F_2(\tau) + \dots, \quad (2.3)$$

ただし $f_{xx} = \partial^2 f / \partial x^2$, $f_{xxx} = \partial^3 f / \partial x^3$, $f_{x\dot{x}\mu} = \partial^2 f / \partial x \partial \dot{x} \partial \mu$, $(f_x) = (\partial f / \partial x)_{\mu=0}$ 等として

$$\left. \begin{aligned} F_1(\tau) &= \{f_x \cdot x_\mu + f_{\dot{x}} \cdot \dot{x}_\mu\}_{\mu=0} \\ &= x^{(1)}(f_x) + \dot{x}^{(1)}(f_{\dot{x}}) \\ F_2(\tau) &= (1/2) \{f_{xx} \cdot x_\mu x_\mu + f_{x\dot{x}\mu} \cdot \dot{x}_\mu x_\mu + f_{xx} \cdot x_\mu^2 \\ &\quad + 2f_{x\dot{x}} \cdot x_\mu \dot{x}_\mu + f_{\dot{x}\dot{x}} \cdot \dot{x}_\mu^2\}_{\mu=0} \\ &= x^{(2)}(f_x) + \dot{x}^{(2)}(f_{\dot{x}}) + z_1(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}), \\ &\quad x^{(1)}, \dot{x}^{(1)}) \\ F_3(\tau) &= x^{(3)}(f_x) + \dot{x}^{(3)}(f_{\dot{x}}) + z_2(x^{(0)}, \dots \\ &\quad \dots, \dot{x}^{(2)}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

となる。これを用い(2.2)を(2.1)に代入して μ の同次項を比較すれば

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} + x^{(0)} &= \lambda_0 \sin \nu \tau \quad (\nu \neq 1) \\ \ddot{x}^{(j)} + x^{(j)} &= F_{j-1}(\tau) \quad (j=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

を得る。この第一式の解

$$\left. \begin{aligned} x^{(0)} &= x_0^{(0)} \cos \tau + \dot{x}_0^{(0)} \sin \tau \\ &\quad + \lambda_0 / (1 - \nu^2) \cdot \sin \nu \tau \\ &= r_0 \cos(\tau - \phi) + \lambda_0 / (1 - \nu^2) \cdot \sin \nu \tau \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

が、 $\nu \neq 1$ なる整数の場合、 $r_0 \neq 0$ なる一定値および ϕ の決まつた値を持つと同時に、第二式より求まる

$$x^{(j)} = x_0^{(j)} \cos \tau + \dot{x}_0^{(j)} \sin \tau + \int_0^\tau F_{j-1}(t) \sin(\tau-t) dt \quad (2.7)$$

がすべての j に対して

$$x^{(j)}(2\pi) - x^{(j)}(0) = 0, \quad \dot{x}^{(j)}(2\pi) - \dot{x}^{(j)}(0) = 0 \quad (2.8)$$

なる条件を満足すれば (2.2) の $x(\tau)$ は週期 2π の週期関数となり、 $(1/\nu)$ 次の分数調波振動となる。簡単のために複素記号で書くと (2.8) は (2.7) より

$$\int_0^{2\pi} F_{j-1}(t) e^{it} dt = 0 \quad (2.9)$$

となる。このことは一般に (2.5) の運動方程式の外力項に一次共振を起させる $\sin \tau$ および $\cos \tau$ の成分が含まれてはならないということであつて、この条件から $x_0^{(j)}, \dot{x}_0^{(j)}$ が順次求まってくる。すなわち $j=1$ とすれば、

$$\int_0^{2\pi} F_0(t) e^{it} dt = \int_0^{2\pi} f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) e^{it} dt = 0 \quad (2.10)$$

この条件を満足するように (2.6) の r_0, ϕ (あるいは $x_0^{(0)}, \dot{x}_0^{(0)}$) の実数値が求められねばならない。さらに求まつた r_0, ϕ は $j=2$ 以上に対する (2.9) の条件式に代入すれば $x_0^{(j)}, \dot{x}_0^{(j)}$ が順次求まらねばならないのであるが、これらが一意的に求まるためには

$$\begin{aligned} F_j(\tau) = & (f_x) \{x_0^{(j)} \cos \tau + \dot{x}_0^{(j)} \sin \tau + b_0 \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \sin n\tau + b_n \cos n\tau) \} \\ & + (f_{\dot{x}}) \{ -x_0^{(j)} \sin \tau + \dot{x}_0^{(j)} \cos \tau + b_0' \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n' \sin n\tau + b_n' \cos n\tau) \} \\ & + z_{j-1}(x^{(0)}, \dots, \dot{x}^{(j-1)}) \end{aligned}$$

とかけるから (2.9) より

$$\begin{vmatrix} D_1(2\pi) & E_1(2\pi) \\ D_2(2\pi) & E_2(2\pi) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.11)$$

が成立すればよく、これは r_0, ϕ のみより計算出来る。ただし

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} D_1(2\pi) \\ D_2(2\pi) \end{aligned} \right\} &= \int_0^{2\pi} \left\{ (f_x) \sin \tau + (f_{\dot{x}}) \cos \tau \right\} \frac{\cos \tau}{\sin \tau} d\tau \\ \left. \begin{aligned} E_1(2\pi) \\ E_2(2\pi) \end{aligned} \right\} &= \int_0^{2\pi} \left\{ (f_x) \cos \tau - (f_{\dot{x}}) \sin \tau \right\} \frac{\cos \tau}{\sin \tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.12)$$

以上は分数調波の解の求め方であるがさらに物理的

にみる場合には、得られた解が安定でなければならない。すなわち $\partial x = \xi$ とおいて (2.1) より得られる次式

$$\ddot{\xi} + \xi = \mu (\partial f / \partial x \cdot \xi + \partial f / \partial \dot{x} \cdot \dot{\xi}) \quad (2.13)$$

を満足する ξ が時間と共に 0 に収斂することが必要である。ところが今 $\xi = e^{1/2 \int_0^\tau \mu \partial f / \partial x d\tau} \cdot \eta$ とおけば (2.13) は

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} + \eta [(1 - \mu \partial f / \partial x) - (\mu/2) \partial f / \partial \dot{x}] \\ + (\mu/2) \frac{d}{d\tau} (\partial f / \partial \dot{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

となり、これは Hill の方程式でその解は特定の条件の下に不安定となる領域が生ずる。解は

$$\eta = c_1 e^{\kappa \tau} \phi(\tau) + c_2 e^{-\kappa \tau} \phi(-\tau) \quad (2.15)$$

ここに c_1, c_2 は常数、 κ は特性指数、 $\phi(\tau)$ は (2.14) の η の係数の週期 (この場合は 2π) を週期とする週期関数である。 $e^{2\pi \kappa}$ もしくは $e^{-2\pi \kappa}$ は次の σ に関する二次方程式の根であることはわかつている。^{*}

$$\sigma^2 - \{G(2\pi) + H(2\pi)\} \sigma + 1 = 0 \quad (2.16)$$

ただし $G(\tau), H(\tau)$ は η の特解で、 $G(0)=1; \dot{G}(0)=0; H(0)=0, \dot{H}(0)=1$ となるように選んであるものとする。ここで $\sigma = e^{\mu/2 \cdot \int_0^{2\pi} \partial f / \partial x d\tau} = e^{\mu/2 \cdot \psi} = s$ とすれば (2.16) は

$$s^2 + p \cdot s + q = 0 \quad (2.17)$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} p = & -e^{\mu/2 \cdot \psi} \{G(2\pi) + H(2\pi)\} = \\ & -e^{\mu/2 \cdot \psi} \cdot 2ch(2\pi \kappa) \\ q = & e^{\mu \cdot \psi} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

ξ が時間と共に 0 に収斂するためには $\mu \neq 0$ に対し

$$\left. \begin{aligned} q = s_1 s_2 < 1 \\ 1 + p + q > 0 \text{ or } ch(\mu/2 \cdot \phi) > ch(2\pi \kappa) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

が成立しなければならない。しかるに $\mu=0$ の時はあらかじめ $q=1, 1+p+q=0$ であるから (2.19) の条件は

$$\left. \begin{aligned} (\partial q / \partial \mu)_{\mu=0} < 0 \\ \{\partial(1+p+q) / \partial \mu\}_{\mu=0} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

となる。ここで $\{\partial(1+p+q) / \partial \mu\}_{\mu=0} = (\partial p / \partial \mu)_{\mu=0} + (\partial q / \partial \mu)_{\mu=0} = 0$ となることが (2.18) から導けるから (2.20) の後者の条件は $\{\partial^2(1+p+q) / \partial \mu^2\}_{\mu=0} > 0$ でなければならない。今 (2.13) の特解を $\chi_1(\tau), \chi_2(\tau)$ とすればこれらは

^{*} 例えば Van der Pol の論文 Phil. Mag 5 (1928) p.21 参照。

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(\tau) &= e^{\frac{\mu}{2} \int_0^\tau \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau} \cdot G(\tau) = \cos \tau + \mu g_1(\tau) \\ &\quad + \mu^2 g_2(\tau) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_2(\tau) &= e^{\frac{\mu}{2} \int_0^\tau \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau} \cdot H(\tau) = \sin \tau + \mu h_1(\tau) \\ &\quad + \mu h_1(\tau) + \mu^2 h_2(\tau) + \dots \end{aligned} \right\}$$

の如く展開式で表わして、これより多少の計算の後

$$\left\{ \frac{\partial^2(1+p+q)}{\partial \mu^2} \right\}_{\mu=0} = \frac{1}{2} (\psi^2)_{\mu=0} - 2 \times$$

$$\left[\left(2\pi \frac{\partial \kappa}{\partial \mu} \right)^2 \right]_{\mu=0}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} g_1(2\pi) & h_1(2\pi) \\ g_1(2\pi) & h_1(2\pi) \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

なる等式を得る。しかるに $g_1(\tau)$, $h_1(\tau)$ は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{g}_1(\tau) + g_1(\tau) &= (\partial f / \partial x) \cos \tau \\ &\quad - (\partial f / \partial \dot{x}) \sin \tau \\ \ddot{h}_1(\tau) + h_1(\tau) &= (\partial f / \partial x) \sin \tau \\ &\quad + (\partial f / \partial \dot{x}) \cos \tau \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

の特解であることがわかるから (2.12) の記号を参照して、 $g_1(2\pi) = -E_2(2\pi)$, $\dot{g}_1(2\pi) = E_1(2\pi)$, $h_1(2\pi) = -D_2(2\pi)$, $\dot{h}_1(2\pi) = D_1(2\pi)$ を得る。よつて安定条件 (2.19) は結局

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) d\tau < 0, \quad \begin{vmatrix} D_1(2\pi) & E_1(2\pi) \\ D_2(2\pi) & E_2(2\pi) \end{vmatrix} < 0 \quad (2.24)$$

となる。この条件の第一式は復原性の保有すなわちいわゆる静的安定、第二式は振動的安定いわゆる動安定に対する条件となる。振幅は第 0 次近似として (2.6) が (2.10) より求められ、第一近似は $f(x, \dot{x})$ に $x = x^{(0)} + \mu x^{(1)}$ を代入して (2.7) より計算される。 $\mu \ll 1$ なる限り殆んど第 0 次近似で差支えない。ただ第 0 次近似の変位のみでは外力 $\lambda_0 \sin \nu \tau$ は何らの仕事も供給しないが、 $\mu x^{(1)}, \mu^2 x^{(2)}, \dots$ 中の外力と同週期の運動成分 $A_1 \mu \sin(\nu \tau + \phi_1) + A_2 \mu^2 \sin(\nu \tau + \phi_2) + \dots$ を通じてエネルギー補給が行われ減衰に消費されるエネルギーと釣り合うのである。

3. 復元力が変位の三次曲線で與えられる場合

次の振動方程式：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx(1 + \varepsilon x^2) = P_0 \cos \omega t \quad (3.1)$$

において c ならびに ε は微小量とする。 $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\delta = P_0/k$, $c \ll c_0 = \text{限界減衰係数} = 2m\omega_n$ を使つて (3.1) を書き直せば

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = -2c/c_0 \cdot \omega_n \dot{x} - \omega_n^2 \varepsilon x^3$$

$$+ \omega_n^2 \delta \cdot \cos \omega t \quad (3.2)$$

これを更に $\omega_1 t = \tau$, $\omega/\omega_1 = \nu = \text{整数}$, $\omega_n/\omega_1 = \lambda_0$, $\varepsilon \delta^2 = \gamma$, $x/\delta = y$, $2c/c_0 = \beta$ として整理すれば

$$\begin{aligned} y'' + y &= (1 - \lambda_0^2)y - \gamma \cdot \lambda_0^2 \cdot y^3 \\ &\quad - \beta \lambda_0 y' + \lambda_0^2 \cos \nu \tau \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる。ここに $y' = dy/d\tau$, $y'' = d^2y/d\tau^2$ とする。もし $(1 - \lambda_0^2)$, γ , β が微小であれば前節で取り扱つたように分数調波が発生する可能性があつてその第 0 次近似解は

$$y = r_0 \cos(\tau - \phi) + r_1 \cos \nu \tau \quad (3.4)$$

ここで $r_1 = \lambda_0^2/(1 - \nu^2) = \text{const}$ である。 r_0 , ϕ を求める方程式は

$$\int_0^{2\pi} \{ (1 - \lambda_0^2)y - \gamma \lambda_0^2 y^3 - \beta \lambda_0 y' \} e^{i\tau} d\tau = 0 \quad (3.5)$$

この方程式から求まる r_0 , ϕ の実数値で (2.22) を満足するものが、実際に起るものである。

(i) $\nu \neq 3$ の場合

(3.4) を (3.5) に代入して計算すれば次の結果を得る：

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_0^2) e^{i\phi} (r_0/2) - \gamma \lambda_0^2 \{ 3(r_0/2)^3 \\ + 6(r_0/2)(r_1/2)^2 \} e^{i\phi} \\ + \beta \lambda_0 \{ i(r_0/2) \} e^{i\phi} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

この方程式の左辺には各項共 $e^{i\phi}$ を含む故に ϕ の値は決めることができず、また実数部虚数部に分けて r_0 の値を求めると $r_0 = 0$ 以外の根が存在しない。従つて $\nu \neq 3$ の場合には分数調波は存在し得ない。

(ii) $\nu = 3$ の場合。

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_0^2) \{ (r_0/2) e^{i\phi} - \gamma \lambda_0^2 \{ 3(r_0/2)^3 + 6(r_0/2) \\ (r_3/2)^2 \} e^{i\phi} + 3(r_0/2)^2 (r_3/2) e^{-i2\phi} \} \\ + \beta \lambda_0 \{ i(r_0/2) \} e^{i\phi} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

となり (3.6) との相異は下線のある項が附け加わることである。実数部虚数部に分けると $r_0 \neq 0$ として、

$$\left. \begin{aligned} (1 - \lambda_0^2) - \gamma \cdot \lambda_0^2 \{ 3(r_0/2)^2 + 6(r_3/2)^2 \} \\ - \gamma \lambda_0^2 \{ 3(r_0/2)(r_3/2) \} \cos 3\phi = 0 \\ \beta \lambda_0 + \gamma \lambda_0^2 \{ 3(r_0/2)(r_3/2) \} \sin 3\phi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

を得る。この二式より ϕ を消去すれば

$$\begin{aligned} [(1 - \lambda_0^2) - \gamma \lambda_0^2 \{ 3(r_0/2)^2 + 6(r_3/2)^2 \}]^2 \\ + (\beta \cdot \lambda_0)^2 = (\gamma \lambda_0 \cdot 3/4 \cdot r_0 r_3)^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

を得る。 $r_3 = \lambda_0^2/(1 - 3^2) = -\lambda_0^2/8$ であるから上式より未知数 r_0 の値が求まる。また (3.8) より

$$\begin{aligned} \tan 3\phi &= -\beta \lambda_0 / [(1 - \lambda_0^2) - \gamma \lambda_0^2 \times \\ &\quad (3/4)(r_0^2 + 2r_3^2)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

が得られ、これより ϕ の値が三つ求まる。 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 とすれば、 $\phi_2 = \phi_1 + (2/3)\pi$, $\phi_3 = \phi_1 + (4/3)\pi$ なる関係がある。かくてこの場合には $y_1 = r_0 \cos(\tau - \phi_1) + r_3 \cos 3\tau$, $y_2 = r_0 \cos(\tau - \phi_2) + r_3 \cos 3\tau$, $y_3 = r_0 \cos(\tau - \phi_3) + r_3 \cos 3\tau$ (ただし $r_3 = \lambda_0^2 / (1 - \lambda^2)$) の三つの近似解が求まる。これ等は位相の違いだけで本質的には同じものである。

次に (3.9) より振幅の ω_1/ω_n すなわち強制されて生ずる振幅の振動数と $\varepsilon=0$ の場合の線型系の自己振

第1図

動数との比に対する変化を求める (第1図). (3.9) より

$$r_0^2 = R = R_m \pm (1/8\lambda) \sqrt{(4/3)(\lambda-1)/\gamma - (7/4)} \\ (1/8\lambda)^2 - (4/3)(\beta/\gamma)^2 \lambda (8\lambda)^2 \quad (3.11)$$

ただし

$R_m = (4/3)(\lambda-1)/\gamma - (3/2)(1/8\lambda)^2$, $\lambda = 1/\lambda_0^2 = (\omega_1/\omega_n)^2$ とする。ここで (3.11) の右辺の第二項の値は小さいので r_0^2 の値としては殆んど R_m の値で代表されるから第1図では $R_m \sim \sqrt{\lambda}$ の関係を図示した。実際にはこの R_m の曲線上に交点 (以下頂点と名付ける) を持つ閉曲線 ($\omega_1/\omega_n > 1$ に対し) か開曲線 ($\omega_1/\omega_n < 1$ に対し) である。しかしてある γ の値に対し β が大きくなればなる程 $\lambda=1$ に近い方の頂点は遠ざかる。第1図で破線で図示した曲線は (3.11) の根号内の値を0ならしむる如き β/γ と λ との関係を示すもので、この λ に対しては当然 $R=R_m$ なる故、この R (例えば A 点に相当する) は頂点である。第1図で見る如く $\gamma > 0$ すなわち変位と共に剛性が高まる系においては頂点が二つあることが特長で、 β すなわち減衰が大きくなるにつれ二頂点間の距

離は接近し閉曲線 (ほぼ楕円形) は縮小する。破線の水平接線との接点はこれ以上の β の値ではもはや

1/3 調波は起らないといふ限界点である。この値が大凡どれ位のものであるか

第2図

を第2図に

示した。これによつて僅かの減衰があれば $\gamma > 0$ の場合には分数調波が起り得ないことがわかる。しかし一方 $\gamma < 0$ の場合すなわち変位と共に剛性が低下する系では $\gamma < 0$ の場合と多少趣きを異にする。すなわち上の如き限界点がない。しかも第1図の β/γ の座標の尺度が一桁大きい。従つてかなり大きな減衰があつても起り得ることになる。

安定の計算の結果は $R > R_m$, すなわち第1図の R_m の上部にある曲線部分のみが安定で実際に起り得るものとなる。

以上で復元力が変位の三乗曲線で表わされる場合に起り得る 1/3 調波の特性を図示したが、 $\lambda=1$ すなわち遊隙なき系の自己振動数の丁度三倍で催振されても分数調波は起らぬが、三倍近くで催振すれば可成り大きな振幅を示すこと、および γ が小さい程大きい振幅となるという結果は注目に値する。

4. 変位の n 次曲線で表わされる復元力の場合

次に一般に復元力が変位の n 次曲線で表わされる系で発生可能な分数調波は $1/n$ 調波までなることを数式的に証明する。

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \lambda_0 \cos \nu \tau$$

において $f(x, \dot{x}) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ として、

先づ第一の条件 $\int_0^{2\pi} f(x, \dot{x}) e^{i\tau} d\tau = 0$ に $x = r_0 \cos(\tau - \phi) + r_\nu \cos \nu \tau$ ($r_\nu = \lambda_0 / (1 - \nu^2)$) を代入する。一般に x の項に対しては

$$\int_0^{2\pi} x^m e^{i\tau} d\tau = \int_0^{2\pi} e^{i\tau} \left\{ \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} A^{m-j} B^j \right\} d\tau \quad (4.1)$$

ここに $A = (r_0/2)(e^{i(\tau-\phi)} + e^{-i(\tau-\phi)})$, $B = (r_\nu/2)(e^{i\nu\tau} + e^{-i\nu\tau})$.

従つて

$$A^{m-j} B^j = (r_0/2)^{m-j} (r_\nu/2)^j e^{-i(m+j-1)\tau} e^{i(m-j)\tau}$$

$$\times \sum_{r=0}^{m-j} \sum_{s=0}^j \binom{m-j}{r} \binom{j}{s} e^{2i((m-j-r)+(j-s)\nu)\tau} \times e^{-2i(m-j-r)\phi} \quad (4.2)$$

(4.1) の計算で 0 ならざる積分結果を与えるものは (4.1) の括弧内の $e^{-i\tau}$ となる項すなわち (4.2) で r, s の種々なる組合せに対し

$$\{2(m-j-r)+2(j-s)\nu\}-\{m+j(\nu-1)\}=-1$$

$$\text{or } \nu(j-2s)+(m-j+1-2r)=0 \quad (4.3)$$

を満足する項のみである。かくして求められる r_0, ϕ の値が (2.22) の条件を満足すれば $1/\nu$ 調波の発生を見る訳であるが、ここで問題となることはこの ν なる整数が冒頭の如き場合に最高如何なる値までとり得るかという問題である。今 $\nu > m$ すなわち $\nu = m + k$ (k は正整数) の場合について考えると $j-2s=l=$ とならなければならない。もし $l \neq 0$ とすれば (4.3) より

$$(m+k)l + \{m-(l+2s)+1-2r\} = (m+k-1)l + (m+1)-2(r+s)=0 \quad (4.4)$$

かるにきらかに $m-j \geq 0, j \geq s \geq 0$ 従つて $r+s \geq 0$, よつて (4.4) より

$$2m \geq (m+k-1)l + (m+1) \geq 0$$

或は $(m-1) \geq (m+k-1)l \geq -(m+1)$ (4.5) の式を満足する $l \neq 0$ なる整数値としては $l = -1$ みである。しかる時は

$$-(m+k-1) + (m+1) = 2-k = 2(r+s) \geq 0 \quad (4.6)$$

得る。これより k が偶数でなければならないが $k \geq 0$ を満足するものとしては $k=0$ のみである。 $k=2$ とすれば、(4.6) より $r=s=0$ であるから (4.3) の左辺は 0 とならない。従つて $k > 0$ に対しては必ず $l=0$, すなわち常に

$$m-j+1-2r=0 \quad (4.7)$$

成立しなければならない。これを満足する項の係数は必ず $e^{i(m-j)\phi} \cdot e^{-2i(m-j-r)\phi} = e^{-i(m-j-2r)\phi} = e^{i\phi}$ を含み、 $\int_0^{2\pi} f(x, \dot{x}) e^{i\tau} d\tau$ の計算結果に折角恒等的に 0 でないものが残つても、振幅を求める条件式より仮令 r_0 を求めるにしても ϕ は決定され得ない。すなわち ν に対しては第 0 次近似解は存在し得ず、結局 n 次曲線の復元力の場合には $1/n$ までの分数調波しか発生し得ないといわなければならない。

$f(x, \dot{x}) = \beta_1 \dot{x} + \beta_2 \dot{x}^2 + \dots + \beta_n \dot{x}^n$ なる場合にも同

一の理論が成立する。しかし注意すべきは $\mu f(x, \dot{x}) = -g(\dot{x})$ にしてしかも $g(\dot{x})$ が $\dot{x}$ の連続単調増加関数である場合、例えば $g(\dot{x}) = \alpha \dot{x}, \pm \beta \dot{x}^3 (\dot{x} > 0$ の時 (+), $\dot{x} < 0$ の時 (-) 符号) 等の如き場合は分数調波は起り得ないことが証明されている*, すなわちもし

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + x = \lambda_0 \sin \nu \tau \quad (4.8)$$

を満足する週期解が二つあるとして $x_1(\tau), x_2(\tau)$ とする。 $x_2 - x_1 = \xi(\tau)$ とおけば (4.8) より

$$\ddot{\xi} + \{g(\dot{x}_2) - g(\dot{x}_1)\} + \xi = 0 \quad (4.9)$$

これはまた $\xi = \eta, \eta = -\{g(\dot{x}_2) - g(\dot{x}_1)\} - \xi$ とかける。 $\xi \sim \eta$ 平面で図解すれば、 $g(\dot{x}_2)$ が連続単調増加関数なる故 $\xi = \eta > 0$ に対しては $g(\dot{x}_2) - g(\dot{x}_1) > 0, \eta < 0$ に対しては $g(\dot{x}_2) - g(\dot{x}_1) < 0$ であつて $d\eta/d\xi = -\xi/\eta - (1/\eta)\{g(\dot{x}_2) - g(\dot{x}_1)\} < -\xi/\eta$ となるから第 3 図の如く (4.9) の解は常に 0 に収斂する。すなわち ∂x は時間と共に消滅し、二つの週期解は各々独立的には存在し得ない。

第 3 図

一方 (4.8) は振動率 ν の強制振動を解として持つことが証明されているから (4.8) では分数調波は起らない。

5. 結語 非線型振動系の特長である分数調波振動の一般特性を調べた。得られた結果をまとめると

(1) 変位の三次曲線で表わせる復元力の場合には $1/3$ 次調波しか起り得ない。しかして $\gamma > 0$ すなわち剛性が変位と共に僅か乍ら増大する場合には、極く小さい減衰でこれが起り得なくなり、しかも限界減衰が存在する。これに反し剛性が変位と共に低下する系では前の場合に比べて起り易く限界減衰も存在しない。

(2) また上の場合に非線型の度合 γ が小さい程振幅は大きくなる。外力の振幅に比例して振幅が大きくなることは勿論であるが、外力振動数が丁度線型系の自己振動数の三倍になつた時は起らないで、それより僅か外れるに従ひ大きくなることは面白いと考えられる。

* 古 屋 茂 未発表

(3) 一般に変位の n 次曲線の復元力の場合には $1/n$ 次以上の分数調波は起り得ない。

この外五次曲線の復元力系の場合も調べたが次報にゆづる。

終りに本研究に有益な助言をして下さった畏友古屋氏および本論文をわざわざ閲読下され御批判を頂いた東大二工池田教授に厚く感謝を致します。

注: 1) 昭和 23 年 11 月 13 日 日本応用力学會第 7 回講演會にて講演 昭和 24 年 10 月 11 日 原稿受理

2) 正會員 茨城大學工學部

3) Phys Zeitschr., vol 11, 1910 p 448; The Journal of the Franklin Institute., vol 216, 1939 p. 459, および 日本機械學會論文集 昭和 22 年

4) 日本科學文化協會發行 “振動” 参照。

5) Zeitschr. f Physik., vol, 93, 1931, pp 233/248

撓角法による固定邊を有する矩形板の解法¹⁾

成 岡 昌 夫²⁾

On a Solution of a Rectangular Plate with Clamped Edges by the Slope Deflection Method

By Masao NARUOKA

Abstract

The solutions of such problems have been explained by Dr. Timoshenko, but the author has simplified the solution by the slope deflection method. The merit of this method is displayed in the cases when two adjacent edges are clamped and the other two simply supported, and also when three edges are clamped and one simply supported.

1. 緒言 固定邊を有する矩形板の解法については、従来種々試みられているが、S. Timoshenko の解法³⁾は最も応用範囲の廣い方法であろう。これは固定梁の解法を板の場合に拡張したものであつて、4 辺單純支持の矩形板の解と相對する 2 辺または 1 辺に曲げモーメントを受ける矩形板の解とを組合せて、固定條件を満足せしめる方法である。この方法の応用例として、相對する 2 辺固定他の 2 辺單純支持の場合と、4 辺固定の場合などを解いている。

著者はさきに矩形板の解法を材の解法と同じように我々にとつて親しみやすいものとする目的をもつて、矩形板に應用すべき撓角法を誘導したのであるが、これの應用として上に述べた場合の外に、彼の求めていない相隣る 2 辺固定他の 2 辺單純支持の場合や 3 辺固

2. 矩形板の撓角法⁵⁾ 材の場合の撓角法といへば、これが横荷重を受けた場合を意味する如く、矩形板の場合もその面に垂直なる横荷重を受けた場合を指す。第 1 図の如く、 $y=0$ および b にて單純支持された矩形板が、 $x=0$ および a の 2 辺にそれぞれ $\sum M_{AB,m} \sin(m\pi y/b)$ および $\sum M_{BA,m} \sin(m\pi y/b)$ にて表わされる曲げモーメントを受け、 $\sum \theta_{A,m} \sin(m\pi y/b)$ および $\sum \theta_{B,m} \sin(m\pi y/b)$ にて表わされる撓角を生じたものとすれば、次の撓角法公式が成立する。たゞし辺 A B には撓みは生じないものとする。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB,m} &= \frac{m\pi N}{b} \cdot \frac{1}{c^2(\alpha_m) - s^2(\alpha_m)} \cdot \{c(\alpha_m)\theta_{A,m} + s(\alpha_m)\theta_{B,m}\} + C_{AB,m} \\ M_{BA,m} &= \frac{m\pi N}{b} \cdot \frac{1}{c^2(\alpha_m) - s^2(\alpha_m)} \cdot \{s(\alpha_m)\theta_{A,m} + c(\alpha_m)\theta_{B,m}\} + C_{BA,m} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに $\alpha_m = m\pi a/b$, $c(\alpha_m)/\{c^2(\alpha_m) - s^2(\alpha_m)\} = 2(\sinh \alpha_m \cosh \alpha_m - \alpha_m)/\Delta$, $s(\alpha_m)/\{c^2(\alpha_m) - s^2(\alpha_m)\} = 2(\alpha_m \cosh \alpha_m - \sinh \alpha_m)/\Delta$, $\Delta = \sinh^2 \alpha_m - \alpha_m^2$ であり、また $C_{AB,m}$ および $C_{BA,m}$ はそれぞれの式の右辺の $\theta=0$ と置いた場合の左辺 $M_{AB,m}$ および $M_{BA,m}$ に相当す

第 1 図

定 1 辺支持の場合等に適用してみよう。本編は著者の“撓角法による 4 辺固定矩形板の逐次近似解法⁴⁾”の続編をなすものである。