(3) 一般に変位の n 次曲線の復元力の場合には $1/n$ 次以上の分数調波は起り得ない。

この外五次曲線の復元力系の場合も調べたが次報にゆづる。

終りに本研究に有益な助言をして下さった畏友古屋氏および本論文をわざわざ閲読下され御批判を頂いた東大二工池田教授に厚く感謝を致します。

注: 1) 昭和 23 年 11 月 13 日 日本応用力学會第 7 回講演會にて講演 昭和 24 年 10 月 11 日 原稿受理

2) 正會員 茨城大學工學部

3) Phys Zeitschr., vol 11, 1910 p 448; The Journal of the Franklin Institute., vol 216, 1939 p. 459, および 日本機械學會論文集 昭和 22 年

4) 日本科學文化協會發行 “振動” 参照。

5) Zeitschr. f Physik., vol, 93, 1931, pp 233/248

撓角法による固定邊を有する矩形板の解法¹⁾

成 岡 昌 夫²⁾

On a Solution of a Rectangular Plate with Clamped Edges by the Slope Deflection Method

By Masao NARUOKA

Abstract

The solutions of such problems have been explained by Dr. Timoshenko, but the author has simplified the solution by the slope deflection method. The merit of this method is displayed in the cases when two adjacent edges are clamped and the other two simply supported, and also when three edges are clamped and one simply supported.

1. 緒言 固定邊を有する矩形板の解法については、従来種々試みられているが、S. Timoshenko の解法³⁾ は最も応用範囲の廣い方法であろう。これは固定梁の解法を板の場合に拡張したものであつて、4 辺單純支持の矩形板の解と相対する 2 辺または 1 辺に曲げモーメントを受ける矩形板の解とを組合せて、固定條件を満足せしめる方法である。この方法の応用例として、相対する 2 辺固定他の 2 辺單純支持の場合と、4 辺固定の場合などを解いている。

著者はさきに矩形板の解法を材の解法と同じように我々にとつて親しみやすいものとする目的をもつて、矩形板に應用すべき撓角法を誘導したのであるが、これの應用として上に述べた場合の外に、彼の求めていない相隣る 2 辺固定他の 2 辺單純支持の場合や 3 辺固

2. 矩形板の撓角法⁵⁾ 材の場合の撓角法といへば、これが横荷重を受けた場合を意味する如く、矩形板の場合もその面に垂直なる横荷重を受けた場合を指す。第 1 図の如く、 $y=0$ および b にて單純支持された矩形板が、 $x=0$ および a の 2 辺にそれぞれ $\sum M_{AB,m} \sin(m\pi y/b)$ および $\sum M_{BA,m} \sin(m\pi y/b)$ にて表わされる曲げモーメントを受け、 $\sum \theta_{A,m} \sin(m\pi y/b)$ および $\sum \theta_{B,m} \sin(m\pi y/b)$ にて表わされる撓角を生じたものとすれば、次の撓角法公式が成立する。たゞし辺 A B には撓みは生じないものとする。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB,m} &= \frac{m\pi N}{b} \cdot \frac{1}{c^2(\alpha_m) - s^2(\alpha_m)} \cdot \{c(\alpha_m)\theta_{A,m} + s(\alpha_m)\theta_{B,m}\} + C_{AB,m} \\ M_{BA,m} &= \frac{m\pi N}{b} \cdot \frac{1}{c^2(\alpha_m) - s^2(\alpha_m)} \cdot \{s(\alpha_m)\theta_{A,m} + c(\alpha_m)\theta_{B,m}\} + C_{BA,m} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに $\alpha_m = m\pi a/b$, $c(\alpha_m)/\{c^2(\alpha_m) - s^2(\alpha_m)\} = 2(\sinh \alpha_m \cosh \alpha_m - \alpha_m)/\Delta$, $s(\alpha_m)/\{c^2(\alpha_m) - s^2(\alpha_m)\} = 2(\alpha_m \cosh \alpha_m - \sinh \alpha_m)/\Delta$, $\Delta = \sinh^2 \alpha_m - \alpha_m^2$ であり、また $C_{AB,m}$ および $C_{BA,m}$ はそれぞれの式の右辺の $\theta=0$ と置いた場合の左辺 $M_{AB,m}$ および $M_{BA,m}$ に相当す

第 1 図

定 1 辺支持の場合等に適用してみよう。本編は著者の“撓角法による 4 辺固定矩形板の逐次近似解法⁴⁾”の続編をなすものである。

る。すなわち固定端辺モーメントとも呼ぶべきものであり、いわゆる荷重項である。等分布荷重 q 満載の場合には、 $C_{AB,m} = -C_{BA,m} = -4qb^2/\pi^3 m^3 \cdot C$ 、 $C = (\sinh \alpha_m - \alpha_m)/(\sinh \alpha_m + \alpha_m)$ である。

なお上式の特別の場合として

$$\left. \begin{aligned} M_{BA,m} &= 0, \quad M_{AB,m} = m\pi N/b \cdot \\ &\quad \theta_{A,m}/c(\alpha_m) + H_{AB,m} \\ M_{AB,m} &= 0, \quad M_{BA,m} = m\pi N/b \cdot \\ &\quad \theta_{B,m}/c(\alpha_m) + H_{BA,m} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

が成立する。ここに $c(\alpha_m) = (\sinh \alpha_m \cosh \alpha_m - \alpha_m)/2 \sinh^2 \alpha_m$ であり、等分布荷重 q 満載の場合には、 $H_{AB,m} = -H_{BA,m} = -4qb^2/\pi^3 m^3 \cdot H$ 、 $H = (\sinh \alpha_m - \alpha_m)/(\cosh \alpha_m - 1)(\sinh \alpha_m \cosh \alpha_m - \alpha_m)$ である。

以上の公式は材の撓角法とその形式が全く一致しており、たゞ矩形板なるが故に $\alpha_m = m\pi a/b$ が入つてくると m の添字があることの相違がある。 $c/(c^2 - s^2)$ 、 $s/(c^2 - s^2)$ 、 $1/c$ 、 C および H 等の諸函数は、 $m=1$ とし、 a/b に種々の値を與えて、予め計算しておくことができる。これらの値については拙著⁵⁾を参照していただきたい。以下述べる正方形板の場合に必要な値のみ掲げると第 1 表の通りである。

第 1 表

a/b	$1/c$	$c/(c^2 - s^2)$	$s/(c^2 - s^2)$	C	H
1.0	2.048 79	2.108 40	0.420 72	0.572 29	0.681 16
3.0	2.0	2.0	0.002 72	0.996 96	0.998 32
5.0	2.0	2.0	0.	0.999 99	1.0
7.0	2.0	2.0	0.	1.0	1.0

3. 曲げモーメント-撓角係数

(1)、(2) 式において荷重項を考えないこととする。

(1) 式は $M_{AB,m}$ を與えると $\theta_{A,m}$ 、 $\theta_{B,m}$ が生ずるが、その比が $m\pi \cdot c/(c^2 - s^2)$ 、 $m\pi \cdot s/(c^2 - s^2)$ であることを示している。逆に考えると $\theta_{A,m}$ なる撓角の存在する場合に、この $\theta_{A,m}$ を打消して固定するためには、その $m\pi \cdot c/(c^2 - s^2)$ 倍で且つ符号の反対である曲げモーメントを加えるとよいわけである。従つて $c/(c^2 -$

第 2 図

$s^2)$ 、 $s/(c^2 - s^2)$ 、 $1/c$ の $m\pi$ 倍等は曲げモーメント-撓角係数と名付けるべき性質のものである。次に辺 A に $\sum_{m=1,3,5} M_{AB,m} \sin(m\pi y/b)$ なる曲げモーメントを作用せしめると、辺 C および D にも撓角 $\sum_{n=1,3,5} \theta_{C,n} \sin(n\pi x/a)$ 、 $\sum_{n=1,3,5} \theta_{D,n} \sin(n\pi x/a)$ が生ずる筈である。この場合の $\theta_{C,n} = -\theta_{D,n}$ の値は S. Timoshenko の著書 “Theory of Plates and Shells” p. 222. によつて $\theta_{C,n} = 2b/\pi^2 \cdot 1/N \cdot a^2/b^2 \cdot \sum_{m=1,3,5} [M_{AB,m}/m^3 \cdot n / \{(a/b)^2 + (n/m)^2\}^2]$ で與えられる。従つて前者を曲げモーメント-撓角係数 1、後者を 2 と呼ぶことにする。故に固定辺を有する矩形板の問題は荷重項とこの係数 1 および 2 を巧に使用することにある。

4. 解法例 以下便宜上等分布荷重 q を満載し、種々の固定辺を有する正方形の場合に就いて計算を進める。

a. 1 辺固定他の 3 辺單純支持の場合 (第 2 図-a) (2) 式 $M_{AB,m} = m\pi N/a \cdot \theta_{A,m}/c(\alpha_m) + H_{AB,m}$ に於て $\theta_{A,m} = 0$ とおけば $M_{AB,m} = H_{AB,m}$ となる。従つて第 1 表より $m=1, 3, 5, \dots$ に対する H の値を求め、固定辺中点の曲げモーメントは $M_{\text{中点}} = -4qa^2/\pi^3 (0.68116 - 0.99832/3^3 + 1.0/5^3 - 1.0/7^3) = -0.0839qa^2$ となる。

b. 相対する 2 辺固定他の 2 辺單純支持の場合 (第 2 図-b) (1) 式より $M_{AB,m} = C_{AB,m}$ 、 $M_{BA,m} = C_{BA,m}$ である。第 1 表を用いて固定辺中点の曲げモーメントを求めると、 $M_{\text{中点}} = -4qa^2/\pi^3 (0.57229 - 0.99696/3^3 + 0.99999/5^3 - 1.0/7^3) = -0.0698qa^2$ となる。

c. 相隣る 2 辺固定、他の 2 辺單純支持の場合 (第 2 図-c) この場合の解法は次のようにする。先ず 4 邊單純支持の場合の各辺の撓角を求める。正方形の場合であるから各辺共等しい。これを第 2 表-1 とする。次に $H_{AB,m} = H_{CD,m} = -4qa^2/\pi^3 m^3 \cdot H$ の値を $m=1, 3, 5, \dots$ に対し求め、これを第 2 表-2 とする。次に曲げモーメント撓角係数 1 すなわち $m\pi \cdot c$ の値を同じく $m=1, 3, 5, \dots$ に対し求める。最後に係数 2 すなわち

$2/\pi^2 \cdot 1/m^3 \cdot n / \{1 + (n/m)^2\}^2$ を ($n=1, m=1, 3, 5, \dots$) ($n=3, m=1, 3, 5, \dots$) に対して求める。これらの値はすべて第 2 表に示してある。以上の準備計算を基にして第 3 表の如く計算を進める。

この場合には辺 A, C の間だけで固定

第 2 表

m	1. $\theta(qa^3/N)$	2. $H(qa^2)$	3. 係数 1	4. 係数 2.						
				$\frac{m}{n}$	1	3	5	7	9	11
1	0.013 708	-0.087 873	6.436 457	1	0.050 661	0.006 080	0.001 499	0.000 568	0.000 272	0.000 150
3	253	- 4 770	18.849 555	3	6 080	5 629	2 630	1 265	676	396
5	33	- 1 032	31.415 925	5	1 499	2 630	2 027	1 295	812	523
7	9	- 376	43.982 295	7	568	1 265	1 295	1 034	756	540
9	3	- 177	56.548 665	9	272	676	812	756	626	492
11	1	- 97	69.115 035	11	150	396	523	540	492	419

の関係を考慮すればよい。先ず $m=1$ より始める。辺 A を固定するために $H_{AB,1} = -0.087\,873\,qa^2$ の曲げモーメントを加える。従つて辺 A 固定、辺 B, C, D 単純支持の状態となる。然るに $H_{AB,1}$ によつて当然辺 C に撓角が生ずる筈である。この値は $H_{AB,1}$ のみを考慮すると（このようなことは繰返試索法ではよくやることである。）係数 2 を用いて $\theta_{C,1} = -0.004\,451\,qa^3/N$ である。従つて辺 A を固定すると辺 C の撓角は $\theta_{C,1} = 0.013\,708 - 0.004\,451 = 0.009\,257\,qa^3/N$ となる。今辺 A, B, D を単純支持のように考えて、辺 C を固定するためには係数 1 を用いて、 $H_{CD,1} = -6.436\,457 \times 0.009\,257 = -0.059\,582\,qa^2$ が必要である。然るに $H_{CD,1}$ によつて辺 A には $\theta_{A,1} = -0.050\,661 \times 0.059\,582 = -0.003\,018\,qa^3/N$ が生じ、先に固定した辺 A の状態に狂いが生じ、固定が破られる。従つて辺 B, C, D を単純支持のように考えて、辺 A に $H_{AB,1} = 6.436\,457 \times 0.003\,018 = 0.019\,425\,qa^2$ の曲げモーメントを加えて固定を再び確保するのである。従つて $H_{AB,1} = -0.087\,873 + 0.019\,425 = -0.068\,448\,qa^2$, $H_{CD,1} = -0.059\,582\,qa^2$ である。今固定の順序を逆にすると、正方形の場合であるから $H_{AB,1} = -0.059\,582\,qa^2$, $H_{CD,1} = -0.068\,448\,qa^2$ となる筈であり、平均

をとつて $H_{AB,1} = H_{CD,1} = -0.064\,015\,qa^2$ とする。

次に $m=3$ の場合に移る。 $H_{AB,3} = -0.004\,770\,qa^2$ を加えて辺 A を固定する。次にこの場合の辺 A に作用する曲げモーメントによる辺 C の撓角は、先に求めた $H_{AB,1} = -0.064\,015\,qa^2$ と $H_{AB,3} = -0.004\,770\,qa^2$ より $\theta_{C,1} = -0.000\,416\,qa^3/N$ となる。従つて辺 A 固定他の 3 辺単純支持の場合、 $\theta_{C,3} = -0.000\,416 + 0.000\,253 = -0.000\,163\,qa^3/N$ である。この $\theta_{C,3}$ を打消すために、 $H_{CD,3} = 18.849\,555 \times 0.000\,163 = 0.003\,072\,qa^2$ が必要であり、 $H_{CD,1} = -0.064\,015\,qa^2$, $H_{CD,3} = 0.003\,072\,qa^2$ によつて、 $\theta_{A,3} = -0.000\,372\,qa^3/N$ が生じ、 $H_{AB,3} = 0.007\,012\,qa^2$ を加えて固定を確保する。従つて $H_{AB,3} = 0.002\,242\,qa^2$, $H_{CD,3} = 0.003\,072\,qa^2$ を得、平均をとつて $H_{AB,3} = H_{CD,3} = 0.002\,657\,qa^2$ とする。以下同様にして $m=11$ 迄計算を行つて第 1 次近似値を得、この値を基にして第 2 次計算を行う。これらの値は第 4 表に示してある。第 4 表より判ることく第 2 次計算では平均をとる場合の両者の差が第 1 次計算にくらべて非常に小さくなつてゐる。従つて第 3 次計算では結果に大きな影響をもつ $m=1$ および 3 のみとし、他は省略して差支えない。この値は第 4 表に併記してある。従つて

第 4 表

		1	3	5	7	9	11
第 1 次 計 算	H_{AB}	-0.068 448	0.002 242	0.001 638	0.000 943	0.000 558	0.000 456
	H_{CD}	-0.059 582	0.003 072	0.001 822	0.000 968	0.000 565	0.000 484
	平均	-0.064 015	0.002 657	0.001 730	0.000 956	0.000 562	0.000 470
第 2 次 計 算	H_{AB}	-0.065 989	0.002 506	0.001 764	0.001 031	0.000 615	0.000 456
	H_{CD}	-0.067 480	0.002 488	0.001 759	0.001 012	0.000 622	0.000 484
	平均	-0.066 735	0.002 497	0.001 762	0.001 022	0.000 619	0.000 470
第 3 次 計 算	H_{AB}	-0.066 279	0.002 468				
	H_{CD}	-0.066 585	0.002 469				
	平均	-0.066 432	0.002 469				

第 1 次計算

第 3 表

第 2 次計算

	係数 1	係数 2	Hab	Gc	Hcd	GA	Hab	平均	Hab	Gc	Hcd	GA	Hab	平均
1	6.436457	0.050 661	-0.087 873	-0.004 451	-0.059 582	-0.003 018	0.019 425	-0.87 873	-0.064 015	-0.003 243	-0.067 480	-0.003 419	0.021 884	-0.087 873
	6.080	1.499						19 425	2 657	16		16	21 884	21 884
	568	568						-0.068 448	1 730	3		3	-0.065 939	-0.065 939
	272	272						-0.059 582	956	0		0	-0.067 480	-0.067 480
	150	150						-0.084 015	562	0		0	-0.066 735	-0.066 735
									470	0		0		
									13 748	0		0		
									0.010 484	0		0		
									-0.000 406	15		15		
									2 657	5		5		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										253		253		
									-0.000 132	7		7		
									-0.000 100	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1		1		
									956	0		0		
									562	0		0		
									470	0		0		
										33		33		
									-0.000 056	3		3		
									-0.000 084	3		3		
									0.001 032	7		7		
									2 657	3		3		
									1 730	1				

第 5 表

	第1次近似値		第2次近似値		第3次近似値	
m	C_{AB}	H_{CD}	C_{AB}	H_{CD}	C_{AB}	H_{CD}
1	-0.056275	-0.047805	-0.060468	-0.049922	-0.060589	-0.048671
3	489	8510	246	9019	462	9189
5	427	4244	128	4636		
7	54	2363	100	2693		
9	89	1467	174	1693		
11	83	1092	83	1161		

第6表 (ポアソン比を0.3とする)(第2図参照)

支 持 状 態		固定辺中点の曲げモーメント	板中央点の曲げモーメント		板中央点の撓み
固 定	単純支持		M_x	M_y	
	$A B C D$	0	0.0479	0.0479	0.0443 ¹
A	$B C D$	-0.0839	0.039	0.034	0.0304 ²
$A B$	$C D$	-0.0698	0.0332	0.0244	0.0209 ³
$A C$	$B D$	-0.0680	0.0307	0.0307	0.0232 ⁴
$A B C$	D	-0.0600 -0.0554	0.0280	0.0238	0.0173 ⁵
$A B C D$		-0.0513	0.0230	0.0230	0.0138 ⁶
単 位		qa^2	qa^2	qa^2	qa^4/Eh^3

固定辺中点の曲げモーメントは

$$-0.066432 - 0.002469 + 0.001762 - 0.001022 + 0.000619 - 0.000470 = -0.0680qa^2$$

d. 3 辺固定 1 辺単純支持の場合 (第2図-d) の場合には C および H の双方が必要であり、係数1および2には2通りの値がある。係数1については $M_{AB,m} = m\pi N/a \cdot (c-s)/(c^2-s^2) \cdot \theta_{A,m}$, $M_{CD,m} = m\pi N/a \cdot \theta_{C,m}/c$ である、係数2については辺 A, B に固定端モーメントを加えて辺 A, B を固定し、これの辺 C におよぼす影響は、辺 C に固定端モーメントを加えてこれの辺 A におよぼす影響の2倍となるわけである。この場合は辺 A, B を固定し辺 C をへてもとにかえる場合と、辺 C を固定し辺 A, B をへてもとにかえる場合との2通りの計算をする。従つて両方の順序で計算しその平均をとつて、この場合の固定端モーメント $-C_{AB,m}$, $H_{CD,m}$ を求める。計算結果のみ示すと第5表の如くであり (第3次近似値では $m=5$ 以下省略)、固定辺中点の曲げモーメントは $M_{A, 中点} = -0.0600qa^2$, $M_{C, 中点} = -0.0554qa^2$ となる。

以上の計算は要するに不静定構造の不静定値の計算であつたわけである。これらの不静定値が求められると、任意の点の撓み、曲げモーメント等は4辺単純支持の場合の値と、3辺単純支持で残る1辺に今求

めた不静定値たる曲げモーメントを受ける場合の値を適当に組合すことによつて容易に求められる。

以上の結果を既に求められている値とともに表示すれば第6表の通りである。

以上は正方形の場合について説明したのであるが、矩形板の場合は S. Timoshenko の方法によれば連立多元1次方程式を解く手数は龐大となるので、かかる場合は撓角法を利用する機械的図上計算法は特に有利である。

6. 結論 以上の如く撓角法の考え方によると、矩形板の解法が単に式をいじるのではなく、直観的に実際に相応して行うことができる。また、以上の計算例で示した如く単に機械的計算を行うことによつて、かかる解法に必ずつき伴う連立多元1次方程式の解法を避けることができる。これは丁度ラーメンの解法における Cross のモーメント分配法と機械的作表法による方程式の繰返試索法による解法との関係に対応していると言ふことができよう。

注：1) 昭和24年11月5日原稿受理

2) 京都大学工学部土木学教室

3) S. Timoshenko: "Theory of Plates and Shells" (1940) p. 222

4) 著者: "撓角法による4辺固定矩形板の逐次近似解法" 土木学会誌第35巻第1号 (昭25, 1), 土木学会論文集 第6号

5) 著者: 土木学会論文集第4号 (昭24) p. 1