$$\left. \begin{aligned} & + B_n \frac{d^2 Q_{n-2}(\mu)}{d\mu^2} \Big\} \\ & + (1-\mu^2)^2 \sum_n \rho^{n-3} \left\{ A_n \frac{d^3 P_{n-2}(\mu)}{d\mu^3} \right. \\ & \quad \left. + B_n \frac{d^3 Q_{n-2}(\mu)}{d\mu^3} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

で表わされる。

3. $G=C(r+a)^k$ で示される場合 中空でない丸棒の振りに対して $G=C(r+a)^k$ とおくと、(10)は

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \left\{ \frac{3}{r} + \frac{k}{r+a} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (16)$$

となる。前論文³⁾でこれを一般的に取扱ったが、こゝでは特別の場合として $k=1$ の場合に就て記す。 G は温度の上昇と共にその値を変える。鋼に於て 400°C 附近迄はその変化は極めて小さく、まず直線状変化と見做される。振りに関しては温度差による剪断弾性係数 G の不同を考慮すればよい。これに軸対称体の温度差による変形、熱応力を重ね合せば足りる。

まず、温度が r のみの函数である場合を考えると、普通 (a) $t=a+br$ および (b) $t=a+b\log r$ の2種が行われている。従つて G は近似的に (a) $G=c_1+c_2 r$ 又は (b) $G=c_1+c_2 \log r$ となる。

(7) は

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \left(\frac{3}{r} + \frac{d \log G}{dr} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (17)$$

この特解として φ が x に無関係な場合の解を φ_1 とするとこれを積分して $\varphi_2 = \int \varphi_1 dx + R_2(r)$, $\varphi_3 = \dots$, 等を与える。

$$\varphi = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + \dots$$

として一般的な解をうる。

4. 結 び 本論文のねらい所は G が一樣でない場合の振り問題を解く方法を與える外に、 G の一定なものに対する近似解を提供する一便法にしたいのである。

- 注 1) 昭和 24 年 10 月 15 日 日本應用力學會第 20 回講演會(埼玉關西地方講演會)にて講演 昭和 24 年 11 月 28 日原稿受理
2) 正會員 京都大學工學部化學機械學教室
3) 断面の大きさが一樣でない丸棒の振り 日本機械學會論文集 第 6 卷 第 24 號 第 1 部

鋸接板の挫屈に関する研究¹⁾

久 保 富 夫²⁾

Studies on the Buckling of Riveted Thin Plates

By Tomio KUBO

Abstract

In this paper the theoretical values of the buckling load between rivets, the buckling load of the entire system, the effective width and the ultimate strength of riveted thin plates were obtained as functions of rivet spacing, rivet diameter, the number of plates and the combination of plate thicknesses and these theoretical results were verified by experiments. The slipping factors of rivets which are always necessary for calculating these theoretical values were also obtained by experiments.

1. 緒言 厚さの異なる2枚の薄板を鋸接したものに圧縮荷重が作用する場合鋸のピッチが充分大きければ、薄い方の板に先ず鋸間挫屈の現象が起る。鋸のピッチを漸次小さくして行けばある鋸ピッチで鋸間挫屈は止み鋸接板全体としての挫屈が起るが、その挫屈強度は単独な2枚の板の挫屈強度の和よりも大きく、板厚の和に等しい厚さを持つ一枚板の挫屈強度よりも小さ

い。このことは従来経験的に知られているだけでその理論的取り扱いはまだ充分行われていない。鋸間挫屈に関しては Howland, その他³⁾により相当深く研究されて来たが主として並列鋸の場合に限られ、千鳥鋸に関してはあまり触れていない。また、全体挫屈に関しては板とこれに鋸接された補強材を全く一体のものとして論じた例⁴⁾はあるが、両者の間の鋸の結合効果を

考慮に入れた研究はあまりない。この問題に関しては池田博士が初めて鉄のりりを考慮し、2枚の鉄接矩形板に圧縮荷重が作用する場合の挫屈強度をエネルギー法によつて研究した先例⁵⁾がある。

本研究においてはこれら一連の問題を取り上げ、鉄間挫屈に関しては並列鉄と千鳥鉄の挫屈強度の相異に関する理論的根拠の求め全体挫屈に関しては過去の研究を更に正確に、かつ一般化し任意枚数の鉄接矩形板に圧縮荷重が作用する場合の完全な基礎方程式を求め、これを解いて挫屈荷重と板数、板厚の組合せ、鉄径、鉄ピッチなどの関係を理論的に見出し、その結果を実験によつて確かめようと試みた。更に鉄接板の挫屈後の現象に論及し、鉄接板の有効巾、極限強度などに関する一計算式を得た。最後にこれら理論値の計算にいつも必要となる鉄のり係数に関する新しい実験値を追加した。

2. 鉄間挫屈

2.1 挫屈応力 厚さの異なる2枚の鉄接された平板に一方から圧縮荷重が作用する場合、薄い方の平板に起る鉄間挫屈の応力に対しては鉄列形式が並列ならばHowlandの與えた計算式を用いることができる。すなわち

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{3} \left(\frac{t}{p} \right)^2 \quad (1)$$

これに対しWagner-Kimmの與えた式

$$\sigma_{cr} = \frac{1.5\pi^2 E}{12} \left(\frac{t}{p} \right)^2 \quad (2)$$

はやや安全側にある。

千鳥鉄の場合に対しWagner-Kimmが横方向の鉄の固定作用を考慮して経験的に與えた計算式は

$$\sigma_{cr} = \frac{2.1\pi^2 E}{12} \left(\frac{t}{p} \right)^2 \quad (3)$$

であるが、この式には横方向の鉄ピッチ q が入っていない欠点があり、かつあまりに安全側にある。そこで第1図のような鉄接板の中央に長さ $p' = p \cos \theta$ 、巾 $b' = b / \cos \theta$ の矩形部分を考え、座標を図のようにとればこれは

$$\left. \begin{array}{ll} x \text{ 方向の単位巾に軸力} & P_x = P \cos^2 \theta \\ y \text{ 方向の単位巾に軸力} & P_y = P \sin^2 \theta \\ x, y \text{ 方向の単位巾に剪断力} & S = P \sin \theta \cos \theta \end{array} \right\} \quad (4)$$

が作用する四辺固定の矩形板と考えられる。挫屈波を

第1図

$$w = \frac{w'}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{p'} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b'} \right) \quad (5)^*$$

と仮定しエネルギー法を用いて挫屈荷重を求めると

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 D p' b' \left(\frac{3}{p'^4} + \frac{3}{b'^4} + \frac{2}{p'^2 b'^2} \right)}{3 \left(\frac{b'}{p'} \cos^2 \theta + \frac{p'}{b'} \sin^2 \theta \right)}$$

$$\text{ただし, } D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6)$$

となる。本式を整理し、かつ $b \rightarrow \infty$ とおけば($b > 3p$ の場合は $b \rightarrow \infty$ とおいて差支えない)

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{p^2} \left\{ 1 + \left(\frac{p}{2q} \right)^2 \right\}^2 \quad (7)$$

あるいは

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{p} \right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{p}{2q} \right)^2 \right\}^2 \quad (8)$$

となる。簡単のため $\nu \rightarrow 0$ とおけば

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{3} \left(\frac{t}{p} \right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{p}{2q} \right)^2 \right\}^2 \quad (9)$$

$$= k \frac{\pi^2 E}{3} \left(\frac{t}{p} \right)^2 \quad (10)$$

本式が並列鉄に対するHowlandの公式(1)に対応する千鳥鉄の挫屈応力の計算式である。 k と q/p の関係を第2図に実線で示してある。 q/p の小さい所では(9)は妥当性を欠くから点線のように延長し、この曲線の k を用いれば(10)は q/p の小さい場合も使用することができる。並列、千鳥の両者を比較すれば同一鉄数に対して

* q が p よりも小さくなるにつれ、この仮定は妥当性を欠くようになる。

表 2 図

$$\frac{(\sigma_{cr})_{\text{千}}}{(\sigma_{cr})_{\text{並}}} = k \quad (11)$$

となる。 $p=q$ の場合は $(\sigma_{cr})_{\text{千}}/(\sigma_{cr})_{\text{並}}=1.56$ となり、
 挫屈応力を等しくする鉄ビッチは $p_{\text{千}}/p_{\text{並}}=1.25$ となる。
 この結果から鉄間挫屈だけが問題となる場合は千鳥鉄打により鉄数を節減することができる。

2.2 実験結果 長さ 220mm, 巾 220mm および 380mm, 厚さ 4.0mm および 0.6mm のジュラルミン鉄接矩形板を用い、鉄列形式ならびに鉄ビッチを種々に変えて圧縮試験を実施した結果を第 3 図に示してある。挫屈荷重の算定には Southwell⁶⁾ の方法によつた。この結果を見れば並列鉄に対しては Howland の公式(1)が、千鳥鉄に対しては(10) がかなりよく実験と一致する。これに対して Wagner-Kimm の計算式はいずれもあまりに安全側にある。

第 3 図 鉄間挫屈応力に及ぼす横の鉄ビッチの影響(実験例)

3. 全体挫屈

3.1 基礎方程式 同一材料の n 枚の鉄接矩形板がその面内に互に直角な二方向の軸力 P, Q^{**} ならびに剪断力 S を受け、かつ周辺の歪が同一となるように負荷されているものと考え、荷重が小さく、変位がその面内に限られている場合は各板の歪は等しく鉄には何等の力もかからない。この場合は

$$P = \sum_{i=1}^n P_{i0}, \quad Q = \sum_{i=1}^n Q_{i0}, \quad S = \sum_{i=1}^n S_{i0} \quad (12)$$

であり、 P_{i0}, Q_{i0}, S_{i0} は板全体にわたり一定である。

いま P および Q が圧縮力の場合を考え、荷重を漸次増せば板は遂に挫屈し面に垂直な微小変位 w が生ずる。この時任意の相隣る板 i および $i+1$ は鉄***の作用により面に垂直な方向には全く同一の変位をしながら面に平行な方向には相対的切線変位 $s_{i,i+1,x}, s_{i,i+1,y}$ を生じ、ここに初めて板間に剪断力 $T_{i,i+1,x}$ および張力 $G_{i,i+1}$ が発生し板の応力は板全体にわたって変化する。すなわち

$$P_i = P_{i0} + P_{i,a}, \quad Q_i = Q_{i0} + Q_{i,a}, \quad S_i = S_{i0} + S_{i,a}, \quad (13)****$$

となる。ここに P_{i0}, Q_{i0}, S_{i0} は撓みのない場合の板 i の分担荷重であり、 $P_{i,a}, Q_{i,a}, S_{i,a}$ は撓みによつて生ずる二次力である。次にこの状態の基礎方程式を求め、先ず y 軸に直角な断面について考えると x と $x+dx$ の間に生ずる送り $ds_{i,i+1,x}$ はもともと同一位置にあつた板 $i+1$ の B 点が板 i の A 点に対する相対的切線変位であつてこれは撓みのために生ずる曲率の変化によるもの

$(ds_{i,i+1,x})_a$ と二次力 $P_{i,a}, Q_{i,a}, P_{i+1,a}, Q_{i+1,a}$ による dx の伸びの差によるもの $(ds_{i,i+1,x})_b$ から成り立っている。第 4 図から

$$(ds_{i,i+1,x})_a = -\frac{t_i + t_{i+1}}{2} d\theta$$

$$= -\frac{t_{i,i+1}}{2} \frac{dx}{\rho} = \frac{t_{i,i+1}}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (14)$$

および

** 本章においては張力を正と考える。

*** 本研究では鉄は均一に打たれているものと假定し、その作用をあたかも板間に面に平行な弾性的剪断変位だけを許す接着剤であるかのように考える。

**** 以下断らない限り板に関しては $i=1, 2, \dots, n$ 、板間の問題に関しては $i=1, 2, \dots, n-1$ 。

$$(ds_{i,i+1}, a) = - \left\{ \frac{1}{Et_i} (P_{i,a} - \nu Q_{i,a}) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{Et_{i+1}} (P_{i+1,a} - \nu Q_{i+1,a}) \right\} dx \quad (15)$$

従つて板 $i, i+1$ 間の x 方向の全相対的切線変位は次式で與えられる。

$$\frac{\partial s_{i,i+1}, x}{\partial x} = \frac{t_{i,i+1}}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left\{ \frac{1}{Et_i} (P_{i,a} - \nu Q_{i,a}) - \frac{1}{Et_{i+1}} (P_{i+1,a} - \nu Q_{i+1,a}) \right\} \quad (16)$$

同様に y 方向に対しては

$$\frac{\partial s_{i,i+1}, y}{\partial y} = \frac{t_{i,i+1}}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left\{ \frac{1}{Et_i} (Q_{i,a} - \nu P_{i,a}) - \frac{1}{Et_{i+1}} (Q_{i+1,a} - \nu P_{i+1,a}) \right\} \quad (17)$$

こゝに $s_{i,i+1}, x$, $s_{i,i+1}, y$ と単位面積当りの板間の剪断力 $T_{i,i+1}, x$, $T_{i,i+1}, y$ の間には一般に次の関係が成立する。

$$s_{i,i+1}, x = K_{i,i+1} \cdot T_{i,i+1}, x \quad (18)$$

$$s_{i,i+1}, y = K_{i,i+1} \cdot T_{i,i+1}, y \quad (19)$$

ここに $K_{i,i+1}$ は板 $i, i+1$ 間のはり剛性の逆数である。 x および y 方向の鉄ビッチをそれぞれ p および q とすれば次の関係が成立する。

$$K_{i,i+1} = k_{i,i+1} \cdot pq \quad (20)$$

ここに $k_{i,i+1}$ は一本の鉄に対するはり剛性の逆数であつて実験によつて求めることができるから p および q が決まれば $K_{i,i+1}$ の値を計算することができる。

次に板 i の任意の点 x, y における微小立方体 $t_i dxdy$ に作用する力の平衡を考える。

x および y 方向の平衡から次の関係式が得られる。

$$\frac{\partial P_{i,a}}{\partial x} + \frac{\partial S_{i,a}}{\partial y} - T_{i-1,i}, x + T_{i,i+1}, x = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial Q_{i,a}}{\partial y} + \frac{\partial S_{i,a}}{\partial x} - T_{i-1,i}, y + T_{i,i+1}, y = 0 \quad (22)$$

第5図

z 方向の力の平衡に関しては中央面に垂直な剪断力 $R_{i,x}$, $R_{i,y}$, 板間の張力 $g_{i-1,i}$, $g_{i,i+1}$ および軸力 P_i , Q_i , 板間の剪断力 $T_{i-1,i}, x$, $T_{i-1,i}, y$, $T_{i,i+1}, x$, $T_{i,i+1}, y$ ならびに中央面内の剪断力 S_i による z 方向の成分を考え高次の微小量を省略し (21), (22) を考慮すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{i,x}}{\partial x} + \frac{\partial R_{i,y}}{\partial y} - g_{i-1,i} + g_{i,i+1} + P_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + Q_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

が得られる。微小立方体 $t_i dxdy$ に作用する力の x および y' 軸周りのモーメントを考え高次の微小量を省略すれば

(モーメントに關係のない P_i , Q_i , S_i は図示しない)

第6図

$$\frac{\partial M_{i,xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_{i,y}}{\partial y} + R_{i,y} - \frac{t_i}{2} (T_{i-1,i,y} + T_{i,i+1,y}) = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial M_{i,yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_{i,x}}{\partial x} - R_{i,x} + \frac{t_i}{2} (T_{i-1,i,x} + T_{i,i+1,x}) = 0 \quad (25)$$

$R_{i,x}$, $R_{i,y}$ をこれらの両式から求め (23) に代入したものに、

$$\left. \begin{aligned} M_{i,x} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_{i,y} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{i,xy} &= -M_{i,yx} = D_i (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

という関係式を用い、更に本研究は撓みの小さい場合を論ずるから $P_{i,z}$, $Q_{i,z}$, $S_{i,a}$ を $P_{i,0}$, $Q_{i,0}$, $S_{i,0}$ に対して省略すれば結局次式が得られる。

$$\begin{aligned} D_i \nabla^2 w &= P_{i,0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q_{i,0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &+ 2S_{i,0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} g_{i-1,i} + g_{i,i+1} \\ &+ \frac{t_i}{2} \left(\frac{\partial T_{i-1,i,x}}{\partial x} + \frac{\partial T_{i-1,i,y}}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{t_i}{2} \left(\frac{\partial T_{i,i+1,x}}{\partial x} + \frac{\partial T_{i,i+1,y}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

最後に撓みに伴う一次力による歪の変化はないものと考えればこの場合の適合方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_{i,a}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 P_{i,a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_{i,a}}{\partial x^2} \\ - \nu \frac{\partial^2 Q_{i,a}}{\partial y^2} = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 S_{i,a}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (28)$$

となる。

(27) の左辺および右辺をそれぞれ $i=1$ から n まで加えると鉄接板全体の z 方向の力の平衡方程式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n D_i \right) \nabla^2 w &= P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_{i,i+1}}{2} \left(\frac{\partial T_{i,i+1,x}}{\partial x} + \frac{\partial T_{i,i+1,y}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

(16), (17), (18), (19), (21), (22), (27), (28) または (16), (17), (18), (19), (21), (22), (23), (29) がこの場合の必要で充分な基礎方程式である。

3.2 四辺支持の鉄接矩形板の挫屈荷重

3.2.1 一方向から圧縮荷重を受ける場合 前節の基礎方程式に $Q=Q_{i,0}=0$, $S=S_{i,0}=0$ とおけばこ

第 7 図

の場合の基礎方程式が得られる。これらの方程式から $S_{i,i+1,x}$, $S_{i,i+1,y}$, $T_{i,i+1,x}$, $T_{i,i+1,y}$, $S_{i,a}$ を消去すれば結局 w および $(P_{i,a}, Q_{i,a})$ という $(n+1)$ 個の未知量を含む同数の方程式が得られる。すなわち

$$\sum_{i=1}^n \nabla^2 (P_{i,a} + Q_{i,a}) = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n D_i \right) \nabla^2 w &= P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &- \frac{1}{2(1+\nu)} \sum_{i=1}^n \nabla^2 (P_{i,a} + Q_{i,a}) \sum_{k=i}^{n-1} t_{k,k+1} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{K_{i,i+1}}{1+\nu} \sum_{k=1}^i \nabla^2 (P_{k,a} + Q_{k,a}) = \frac{t_{i,i+1}}{2} \nabla^2 w \\ &- \frac{1-\nu}{Et_i} (P_{i,a} + Q_{i,a}) \\ &+ \frac{1-\nu}{Et_{i+1}} (P_{i+1,a} + Q_{i+1,a}) \end{aligned} \quad (32)$$

この場合の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} x=0, x=a \text{ において } w &= 0, \\ D_i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= 0, P_{i,a} = 0 \\ y=0, y=b \text{ において } w &= 0, \\ D_i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= 0, Q_{i,a} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

である。この条件を満足する撓みおよび二次力を

$$\begin{aligned} w &= w' \sin \lambda x \cdot \sin \mu y \\ \text{ただし, } \lambda &= \frac{m\pi}{a}, \quad \mu = \frac{n\pi}{b} : m, n \text{ は} \end{aligned} \quad (34)$$

正の整数

$$P_{i,a} + Q_{i,a} = A_i \sin \lambda x \cdot \sin \mu y \quad (35)$$

と仮定し、これを (30), (31), (32) に代入すれば二次力と撓みの係数間に次の関係式が得られる。

$$\sum_{i=1}^n A_i = 0 \quad (36)$$

$$\left\{ \lambda^2 P + (\lambda^2 + \mu^2)^2 \sum_{i=1}^n D_i \right\} w' - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2(1+\nu)} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sum_{k=i}^{n-1} t_{k,k+1} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{t_{i,i+1}}{2} (\lambda^2 + \mu^2) w' + \frac{K_{i,i+1}}{1+\nu} (\lambda^2 + \mu^2) \sum_{k=1}^{i-1} A_k + \left\{ \frac{K_{i,i+1}}{1+\nu} (\lambda^2 + \mu^2) + \frac{1-\nu}{E t_{i,i+1}} \right\} A_i - \frac{1-\nu}{E t_{i+1}} A_{i+1} = 0 \quad (38)$$

(36), (37), (38) は w', A_i という $(n+1)$ 個の未知量に関する同数の一次の連立同次方程式であるから、これらの未知量が同時に 0 でないためには未知量の係数が構成する行列式は 0 でなければならない。これを次のように表わす。

$$\Delta_n = 0 \quad (39)$$

(39) は外力 P が満足すべき条件式で P の外には既知量だけを含んでおり、この場合の挫屈荷重の計算式である。

i) 2 枚の場合 挫屈荷重の計算式は (39) に $n=2$ とおけば、

$$P = - \frac{(\lambda^2 + \mu^2)^2}{\lambda^2} \left[(D_1 + D_2) + \frac{t^2}{4 \{ K(\lambda^2 + \mu^2) + \gamma \}} \right] \quad (40)$$

ただし、 $K = K_{1,2}, t = t_1 + t_2,$
 $\gamma = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right)$

第8図 挫屈荷重に及ぼす a/t の影響—計算例(四辺支持の場合)

となる。上式は $n=1$ のとき最小となる。すなわち

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{b^2} \left(\frac{a}{mb} + \frac{mb}{a} \right)^2 \left[(D_1 + D_2) + \frac{t^2}{4 \left\{ K \frac{\pi^2}{b^2} \left(1 + \frac{m^2 b^2}{a^2} \right) + \gamma \right\}} \right] \quad (41)$$

(41) を最小にする m の値は E, K, t_1, t_2, b および a/b によつて変化する。

a) $K=0$ の場合 (41) は既知の $t=t_1+t_2$ という一枚板の挫屈荷重の計算式と一致する。

b) $K=\infty$ の場合 (41) は全然紙着されていない2枚の板の挫屈荷重の和となる。

c) $0 < K < \infty$ の場合 一般の銲接板に相当し、括弧内の第二項が銲接効果を表わしている。 P_{cr} と K の関係を第16図に示してある。第8図には b が一定の場合の P_{cr} と a/b の関係が示してある。この関係は一枚板の場合とはほぼ同様であるが一枚板の場合は最小の挫屈荷重を與える縦横比 $(a/mb)_0$ が1であるのに対し、この場合は $(a/mb)_0 < 1$ である。上式を詳細に検討すれば $t_1=t_2$ で $EK/(1-\nu^2)b^2=0.3179$ の場合 $(a/mb)_0$ は最小となりその値は $(a/mb)_0=0.814$ となる。しかしながら、 $a/mb=1$ における P_{cr} と $(P_{cr})_{min}$ との比は最大の場合1.034程度で実際問題には $(P_{cr})_{a/mb=1}$ を $(P_{cr})_{min}$ と見做して差支えない。

以上の結果から銲径を大きくしピッチを小さくすれば銲接板の挫屈強度を漸次一枚板の挫屈強度に近づけることができる。従つて強度上有利に使用することができる。しかしながら、ピッチをあまり小さくすることは工数増加の点からも、また薄板の場合歪を生ずる

点からも好ましくないばかりでなく実際の構造物では、同一構造部分が引張り荷重を受ける場合もあるなどの理由からあまり小さい銲ピッチは好ましくない。そこで好ましい銲ピッチの基準として銲間挫屈荷重と全体挫屈荷重が一致する銲ピッチが考えられる。この関係の一例を第9図に示してある。この図において並列銲ならびに千鳥銲に対してそれぞれ一本宛の基準線が引いてある。この線の左側は銲間挫屈が起り右側は全体挫屈が起る領域であ

る。同図はまた板厚の和が一定の場合板厚に差があるほど全体挫屈強度が大きいくことを示している。鉄接板の全体挫屈強度は鉄数が一定ならば鉄列形式の如何に関係しない。

ii) 挫屈荷重におよぼす板数の影響 同一寸法の鉄接矩形板に二方向から圧縮荷重が作用する場合、全体の板厚、鉄径、鉄ピッチを一定とし板の数を種々に変えた場合の挫屈荷重の変化を第10図に示してある。

この図からわかる通り全体の板厚が一定の場合板の数を増せば、すなわち1枚の板厚が小さくなれば挫屈荷重は二重に落ちる。先ず板間のり係数 K が一定でも板数の増加と共にこの値は減少するが、板厚が減少すれば板間のり剛性が減少するからそのために挫屈荷重は更に減少する。同図にはこの間の事情も表わしてある。四辺支持の鉄接矩形板は、ほぼ第11図に示すような断面をもつ箱型桁のフランジなどに相当する。

第11図

3.2.2 二方向から圧縮荷重を受ける場合

この場合の計算式は (39) の $\lambda^2 P$ の代りに $\lambda^2 P + \mu^2 Q$ とおけばよい。従つて2枚の場合の挫屈荷重の計算式は (40) に対応し

$$\lambda^2 P + \mu^2 Q = -(\lambda^2 + \mu^2)^2 \left[(D_1 + D_2) + \frac{t^3}{4\{K(\lambda^2 + \mu^2) + \gamma\}} \right] \quad (42)$$

となる。最小の挫屈荷重を與える m, n の計算法は一枚板の場合と同様である。

3.3 三辺支持、一边自由の鉄接矩形板の挫屈荷重

この場合の基礎方程式は3.2.1と同一で境界条件は

$$x=0, x=a \text{ において } w=0,$$

$$D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, P_{t,a} = 0 \quad (43)$$

第12図

$y=0$ において $w=0$,

$$D_t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, Q_{t,a} = 0 \quad (44)$$

$y=b$ において $D_t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$,

$$D_t \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (z-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial^2 x \partial y} \right\} = 0, Q_{t,a} = 0 \quad (45)$$

である。この場合の撓みおよび二次力を

$$w = \sum_{j=1}^n w'_j \sin \alpha_j y + w'' \sin \beta y \sin \lambda x \quad (46)$$

$$P_{t,a} = \left\{ \sum_{j=1}^n (P'_{t,a})_j \sin \alpha_j y + P'_{t,a} \sin \beta y \right\} \sin \lambda x \quad (47)$$

$$Q_{t,a} = \left\{ \sum_{j=1}^n (Q'_{t,a})_j \sin \alpha_j y + Q'_{t,a} \sin \beta y \right\} \sin \lambda x \quad (48)$$

と仮定すれば(46),(47),(48)は(43),(44)を満足する。基礎方程式から $S_{t,t+1,x}$, $S_{t,t+1,y}$, $T_{t,t+1,x}$, $T_{t,t+1,y}$, $S_{t,a}$ を消去して得られる w , $P_{t,a}$, $Q_{t,a}$ に関する $(2n+1)$ 個の方程式に(46),(47),(48)を代入した式が任意の点で成立するという条件から, w'_j , $(P'_{t,a})_j$, $(Q'_{t,a})_j$ および w'' , $P'_{t,a}$, $Q'_{t,a}$ に対しそれぞれ同数の一次の同次方程式が得られる。これらの係数が同時に0でないためにはその係数行列式が0でなければならないという条件を次のように表わす。

$$\Delta_{\alpha j} = 0 \quad \text{ただし } j=1, 2, \dots, n. \quad (49)$$

$$\Delta_{\beta} = 0 \quad (50)$$

(49),(50)が成立する時は一般に $(Q'_{t,a})_j$ および $Q'_{t,a}$ をそれぞれ w'_j および w'' の一次式として表わすことができる。従つて $Q_{t,a}$ を w'_j , w'' で表わしたものと(46)を(45)に代入すれば w'_j , w'' に関する同数の一次の同次方程式が得られる。その係数行列式 $\Delta_{\alpha, \beta}$ も0でなければならない。

$$\Delta_{\alpha, \beta} = 0 \quad (51)$$

結局, w , $P_{t,a}$, $Q_{t,a}$ が基礎方程式ならびに境界条件のすべてを満足するためには(49),(50),(51)の3式が同時に成立しなければならない。これらの3式から挫屈荷重を求めることができる。

2枚の場合を具体的に書けば(49),(50),(51)はそれぞれ

$$P = - \frac{(\lambda^2 - \alpha_j^2)^2}{\lambda^2} \left[(D_1 + D_2) + \frac{t_{1,2}}{4\{K_{1,2}(\lambda^2 - \alpha_j^2) + \gamma_{1,2}\}} \right] \quad \text{ただし } j=1, 2, \quad (52)$$

$$P = - \frac{(\lambda^2 + \beta^2)^2}{\lambda^2} \left[(D_1 + D_2) + \frac{t_{1,2}}{4\{K_{1,2}(\lambda^2 + \beta^2) + \gamma_{1,2}\}} \right] \quad (53)$$

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1^2 - \nu \lambda^2) \sinh \alpha_1 b, (\alpha_2^2 - \nu \lambda^2) \sinh \alpha_2 b, \\ -(\beta^2 + \nu \lambda^2) \sin \beta b \\ \alpha_1 \{ \alpha_1^2 - (2-\nu) \lambda^2 \} \cosh \alpha_1 b, \\ \alpha_2 \{ \alpha_2^2 - (2-\nu) \lambda^2 \} \cosh \alpha_2 b, \\ -\beta \{ \beta^2 + (2-\nu) \lambda^2 \} \cos \beta b \\ -\frac{t_{1,2}(\nu \lambda^2 - \alpha_1^2) \sinh \alpha_1 b}{2\{K_{1,2}(\lambda^2 - \alpha_1^2) + \gamma_{1,2}\}}, \\ -\frac{t_{1,2}(\nu \lambda^2 - \alpha_2^2) \sinh \alpha_2 b}{2\{K_{1,2}(\lambda^2 - \alpha_2^2) + \gamma_{1,2}\}}, \\ -\frac{t_{1,2}(\nu \lambda^2 + \beta^2) \sin \beta b}{2\{K_{1,2}(\lambda^2 + \beta^2) + \gamma_{1,2}\}} \end{vmatrix} = 0 \quad (54)$$

となる。

挫屈荷重を求めるには P に対応する α_1 , α_2 , β を第13図のように図式的に求め、これを(54)の左辺に代入した値が0になるような P を決定すればよい。

第13図

第14図 挫屈荷重に及ぼす a/b の影響 - 計算例 (二辺支持, 一辺自由の場合)

P_{cr} と K の関係を第 18 図に、 P_{cr} と a/b の関係を第 14 図に示してある。

三辺支持、一辺自由の鉄接
矩形板はほぼ第 15 図に示す
ような断面をもつ桁のフラン
ジに相当する。

第 15 図

3. 4 実験結果 四辺支持
および三辺支持、一辺自由の

鉄接矩形板に一方から圧縮荷重が作用する
場合につき各種の試験を実施した。この試験
ではジュラルミン板および軟鋼板を用い、同
一材料の 2 枚の平板を同一材料の鉄で結合しそのピッ
チを種々に変更した。この試験において荷重と荷重方
向の縮み δ_0 をダイヤルゲージで計測し $P \sim \delta_0$ 曲線を
対数方眼紙に描き、この曲線の最初の屈折点を挫屈荷
重と見做した。四辺支持の場合の軟鋼板に対する結果
合せを第 16 図に示し、2 枚の板厚の和が一定で板厚の
組を種々に変えた場合のジュラルミンに対する結果を
第 17 図に示してある。また、三辺支持、一辺自由のジ
ュラルミン板に対する結果を第 18 図に示してある。

以上の結果を見ればいずれの場合も理論値と実験値
はかなりよく一致する。

第 16 図 挫屈荷重に及ぼす K の影響—実験例
(四辺支持の場合)

第 17 図 挫屈応力に及ぼす板厚組合せの影響—実験例
(四辺支持の場合)

第 18 図 挫屈荷重に及ぼす K の影響—実験例
(三辺支持、一辺自由の場合)

4. 四辺支持の 2 枚の鉄接矩形板に対する有効巾お よび極限強度

4. 1 計算式 一枚板に関する最も簡単な Kármán 博士の方法⁷⁾ に倣い鉄接板の有効巾および極限
強度の計算式を求めて見た。

同一材料の 2 枚の鉄接矩形板を考える。前節の結果
から $(P_{cr})_{min} = (P_{cr})_{a/mb=1}$ であるから、 $(P_{cr})_{min}$
の代りに $(P_{cr})_{a/mb=1}$ を用いる。板の降伏点応力を
 σ_y 、有効巾を $2c$ 、 $a/mb=1$ とすれば (41) から

$$\sigma_y t = 4 \left(\frac{\pi}{2c} \right)^2 \left[(D_1 + D_2) + \frac{t^2}{4 \left\{ 2 \left(\frac{\pi}{2c} \right)^2 K + \gamma \right\}} \right] \quad (55)$$

従つて有効巾ならびに極限強度は

$$2c = k_e \frac{\pi t}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} \quad (56)$$

$$P_{ult} = k_e \frac{\pi t^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{E \sigma_y} \quad (57)$$

ただし

$$k_e = \sqrt{\frac{t^3 - 6t_1 t_2 \sigma_y K + \sqrt{t^6 - 12t_1 t_2 (t_1^3 - 2t_1^3 - 2t_2^3) \sigma_y K + 36t_1^2 t_2^2 \sigma_y^2 K^2}}{2t^3}} \quad (58)$$

a) $K=0$ の場合 $k_e=1$ となり一枚板の
計算式と一致する。

b) $K=\infty$ の場合 $k_e = \sqrt{(t_1^3 + t_2^3)/t^3}$ と
なる。2 枚の全然鉄着されていない板の相
当有効巾の係数は $k_e = (t_1^2 + t_2^2)/t^2$ である
が両者の差は極めて小さく実用上等しいも
のと考えて差支えない。 $t_1=t_2$ の場合両者
は完全に一致する。

c) $0 < K < \infty$ の場合 k_e と K の関係の一例を第19図に示してある。 k_e は K の他に t_1, t_2, σ_y に関係する。弾性係数が同じで降伏点応力が異なる材料を考えると同図からもわかる通り一定の K の値に対して σ_y の値が大きいもの程 k_e の値が小さい。すなわち高級な材料程一枚板との差が大きい。

4.2 実験結果 ジュラルミン板を同一材料の丸鋸で結合したものにつき圧縮試験を実施した。巾を一定とし鋸ピッチを種々に変えた場合の実験結果を第20図に示し、鋸のピッチを一定とし板の巾を種々に変えた場合の結果を第21図に示してある。

第19図 有効中, 極限強度の係数に及ぼす K の影響-計算例 (四辺支持の場合)

第20図 極限強度に及ぼす K の影響-実験例 (四辺支持の場合)

第21図 極限強度に及ぼす板巾の影響-実験例 (四辺支持の場合)

以上の結果を見れば理論値は実験値とかなりよく一致する。ただし、極限強度は板巾の増加と共に徐々に増大する傾向にあるがこのことは一枚板に対しても同様であつてこれを説明するためには更に正確な理論を必要とする。

5. 鋸のり係数に関する実験 鋸接板の極限強度、有効巾、極限強度などの計算にはいつも鋸のり係数 k の値を必要とする。この値については既に Volkersen, 井町, 山本氏など²⁾ による実験結果が発表されている。その結果によれば k の値は鋸の材質、直径ならびに鋸接される板の材質、厚さなどによつて変化する

だけでなく、その値は鋸打のむらによつて一定の組合せに対しても相当廣範圍に散乱する。 k の値を理論的に見出すことも困難であり、目下の所できるだけ多くの実験を行いその平均値を見出す以外に方法がない。この意味において本研究においても新たに実験を追加した。試験の方法は最も簡単な井町氏の方法に倣つた。鋸と板は同一材質のものを使用し鋸打方式は丁寧な手打式とし、鋸孔径は(公称鋸径+0.2mm)とした。先ず k の値におよぼす諸因子の影響を知るために鋸の焼入れの有無、板厚の和が一定の場合の板厚比、測定のための標点距離、試験片の巾、長さなどの影響を確認しようと試みたがこれらの影響はいずれも同一条件下における実験値の散乱範囲に入るので現在の試験片の組合せに対してこれらの影響は大きくないものと考え、結局第22図に示すような試験片につき標点距離を20mmとし、単独の板厚1~5mm、鋸径3~5mmの範囲で各種の組合せを造りできるだけ多くの試験を実施し、 k と板厚ならびに鋸径の関係を求めた。ジュラルミンならびに軟鋼に対するこれらの関係を第23図ならびに第24図に示してある。図からわかる通り k は一定の組合せに対しても相当廣範圍に散乱する。実際の構造物には相当多数の鋸が打たれるのでその場合の k の値は更に散るものと予想されるから計算に使用する k の値は差し当りその平均値を使用するのが至当であらう。このために第23図ならびに第24図においても平均値と思われる曲線が引いてある。ジュラルミンと軟鋼に対する実験結果から k は

第 22 図

第 23 図 k に及ぼす板厚の影響 (ジュラルミンの場合)

第 24 図 k に及ぼす板厚の影響 (軟鋼の場合)

E に逆比例するものと考えて差支えない。

本研究におけるすべての挫屈試験、有効巾ならびに極限強度試験においてこの曲線を用いて計算した理論値は実験値とよく一致する。

6. 結論 以上の研究によつて各種の薄板構造に補強外板または桁フランジなどとしてしばしば用いられる鋸接板の鋸間挫屈強度、全体挫屈強度、有効巾、極限強度と鋸ピッチ、鋸径、板数、板厚の組合せなどの関係を理論的に見出し、その妥当性を実験によつて確めた。これらの結果を用い従来実験によらなければ求

められなかつたこの種構造部分の強度を今後は計算によつて大過なく推算することができると思う。

終りに臨み本研究に当り終始適切な助言を與えられた池田博士ならびに計算と実験に熱心な助力を寄せられた中日本重工 小林貞夫、立花重春の両技師に厚く感謝の意を捧げる。

注：1) 昭和 24 年 3 月 11 日 日本応用力學會 第 11 回講演會および昭和 24 年 7 月 24 日 日本応用力學會第 15, 16 回講演會にて講演
昭和 25 年 2 月 14 日原稿受理

2) 正會員 中日本重工株式会社

3) W. L. Howland: J. Aero. Sci., Vol. 3, H. Wagner-G. Kimm: Bauelemente des

Flugzeuges. 1940, s. 270.

4) S. Timoshenko: Theory of Elastic Stability. p. 371.

5) 池田健: 昭和 20 年航空技術協會において講演

6) R. V. Southwell: Proc. R. Soc., Vol. 135A.

H. L. Donnell: Stephen Timoshenko, 60th Anniversary Volume.

7) T. von Kármán, E. Sechler & H. Donnell: Trans. A.S. M.E., Vol. 54.

8) O. Volkersen: Luft und Lfg. 1/2

井町 勇: 日本航空學會誌 第 6 卷 52 號, 第 7 卷 62 號

山本峰雄: 航空界報 第 225 號