(5) 風速の影響: $q=70\text{mm}$ とした場合, 常温時では $\varphi=100^\circ$ で微小変動が現われ, 乱流剥離は $\varphi=130^\circ$ に起る. 加熱すると $\varphi=45^\circ$ で低周波の可成の振動が現われて, 常温時に $\varphi=100^\circ$ で起る微小変動に相当するものは 10° 前進し, 剥離は $\varphi=105^\circ$ に前進するようである.

気流制禦加熱の影響は低速の場合と同様な傾向を示す.

§5. 結 語

加熱円筒周囲に発達する境界層内の静圧分布, 温度分布および乱れの状況を実測して得た結果の概要を次に述べて結語とする.

(1) 静圧分布は W 型が加熱のために V 型となり, 最低圧を示す場所は前進し谷は平滑化される. 気流を制禦した場合も V 型で谷は加熱時より深まる.

(2) 筒温は前縁より中心角 115° で最高を示すが気流制禦で 130° 附近に後退する.

(3) 気温分布は前縁より 60° まで規則正しいが, 80° 附近より非常に不規則となり渦流の存在が判る. 気流を制禦すると気温分布は全体的に規則正しくなり 100° を境として明瞭に変化し, 前方では層流, 後方は流れが安定化され, 乱流境界層内の流速分布に相似となる. また前半の境界層の厚さは半減される.

(4) フィンの温度は $130\sim 140^\circ$ で最高を示し, この部分で冷却し難いことを示す.

(5) 常温時には 90° 附近まで乱れは少く $90\sim 95^\circ$

で層流剥離, 100° で乱れを伴い 115° で乱流剥離を起すが, 加熱すると前縁から乱れ 35° で可成の振動が現われ, その振幅は増減を数回繰返して 75° で剥離するようである. 加熱によって剥離点は前進する如く思われる.

(6) 乱れの周波数は主として $100\sim 500$ 程度のものであるが, 常温時に $40\sim 90^\circ$ でのみ出現する 5000 への高周波は遷移に関係深いもののようである.

(7) フィン付円筒では前縁より乱れ, 加熱すれば更に著しくなる. フィンに制禦板を密着させた場合は 65° 位で乱れが発生するが剥離は 160° までも起らない.

(8) 自由乱流の影響は前縁より乱流境界層を起させ, その振幅は 90° 附近まで一定で, 100° で急増, $115\sim 120^\circ$ で剥離を起させる.

(9) 風速を増した場合, 剥離は 130° で起るが, 加熱すると 105° 附近に前進した.

撰筆するに際し, 種々御指導賜った兄玉元一博士に深甚なる謝意を呈すると共に, 終始渝らざる熱意を以て本実験に御協力賜った政木和三, 長野忠雄, 小島一郎氏等に苦難をともにした当時を回顧しつつ感謝の微意を表明する次第である.

注: 1) 昭和 25 年 5 月 8 日 原稿受理

2) 正員. 三重大学

3) 川原: 熱平板に関する実験. 応用力学第 15 号 (1950).

乱 流 境 界 層 に 就 い て¹⁾

井 上 榮 ²⁾

On the Structure of Turbulent Boundary Layer

By Eiichi INOUE

Abstract

As the structural model of turbulent boundary layer near the surface of flat plate, the pseudo-lattice structure of the largest turbulons (eddies) is assumed. The largest turbulon is fed energy from the main flow, and gives it to the turbulons of smaller ranks. Assuming the dynamical condition of energy balance and the geometrical condition of lattice structure, the well-known logarithmic velocity profile is obtained.

1. まえがき

現在我々が直面している乱流境界層理論に於ける困

難の一つの原因は, 対象の模型に関する考察が, いまだ十分でない点にあるものと思われる. このような原因

に基づく困難は、比較的簡単な等方性乱流場に関する理論に於ても最近まで残されていたのであって、この分野では実体論的な乱子の概念の確立と、その相互作用に関する合理的な仮定の導入とによって一応困難から遠ざかったように見受けられる³⁾。

著者はここに、等方性乱流理論で有効性を実証された乱子とその相互作用との概念を乱流境界層として知られる異方性乱流場に拡張して適用することを試みた。

異方性乱流場の一つの大きな特徴は、乱子間の相互作用の他に、平均流と乱子との間にも密接な相互作用の存在することであって、平均流と乱子との間の相互作用の一つの現われが平均流についての摩擦応力に他ならない。

この相互作用は平板上の乱流境界層の場合、壁からの距離に関係し、壁の近くでは極めて密接であるが、壁から遠く離れると極めて弱くなり、相互作用の消失と乱流境界層の限界とが一致するものと考えられる。乱流境界層の壁に近い部分では、壁の存在が決定的な要素となっていることは所謂「壁法則」としてよく知られている。これに対して乱流境界層の限界に近い部分の状況を最も決定的に支配する要素についての考察も従来十分ではなかったように思われる。

著者はまず乱流境界層の構造に関する簡単なモデルを導入して、壁との相互作用の著しい部分については平均流と乱子との相互作用の機構を仮定して流速の対数分布を求め、境界層の外側に近い部分には平均流の状態が決定的な要素となることを仮定して、乱流境界層の厚さを定める関係を導いた。更に層流底層を乱流理論の適用限界として規定することによって、それを支配する要素が見出された。この考え方は等方性乱流理論に於ける最小乱子に対する考え方と全く対応するものである。

2. 乱流境界層の生成機構の解釈とその構造模型

簡単のために風洞気流の中に入れられた平板の上に出来る境界層について考える。この境界層は前縁附近では層流状態を示し、いわゆる遷移点以後に於て乱流状態を示す。この現象に対して、著者は次のような考え方をする。すなわち、もともと乱流状態にある風洞気流の一部分が、平板の存在によって強制的に層流状態に保たれている部分が層流境界層の部分であり、その強制力が弱まって再びもとの乱流状態にかえった時

に乱流境界層となるものとする。従来のように層流より乱流へという一方的な変化だけではなく、乱流より層流へ、そして更に層流より乱流へという二つの方向の状態遷移が考えられるべきである。

層流境界層も乱流境界層も、平板の影響のおよぶ範囲という点で一致した見方が出来るようである。ただその影響が如何なる実体によって伝えられるかによって著しい相違が現われる。前者に於ては分子が、後者に於ては概念的な乱子という実体が、平板の影響を伝達するものとみなし、更に平板の影響としては平板と平均流との相互作用として生ずるエネルギー逸散を考えることにする、即ちもともと U_0 という速さを持っていた平均流が、境界層の内部では U_0 よりも低い速さ U を持つということは、 $(U_0^2 - U^2)$ に相当するエネルギー量が相互作用の結果として失われたものとみなされる。

これを更に模型的に、平板の表面に平均流の運動量を吸収する吸源が分布されているものとみなす。平均流が単位時間に失う運動量こそ、平均流と平板との相互作用として生ずる抵抗力に他ならない。更に運動量の吸収を表現するために、平板の表面に負の運動量の湧源を考えることが出来る。このようにすれば、境界層は平板の表面に絶えず発生する負の運動量が分子或は乱子によって拡散される範囲とみなせるであろう。

層流境界層では分子によって負の運動量が拡散されるが、その拡散方程式が Navier-Stokes の層流運動の方程式に一致することは Gebelein⁴⁾ によって示された。乱流境界層では分子よりも乱子の方が大きな拡散能力を持つものと考えられる。しかも乱子は平板からの距離によっても異った性質を持ったり、乱子同志の相互作用によって絶えず発生したり消滅したりしている点で、分子とは著しい性質の相違があるものと考えられる。

平板の長さが極度に短くなった場合を考えれば、負の運動量を湧出させる線状の湧源が平均流の中に存在する場合と一致し、これは棒の速度後流を論ずる問題となる。また平板の長さが適当に短かく、層流境界層がそのままひきつづいて層流後流となる場合の問題は平板の存在を考えなくとも、前縁の位置に平板全体の受ける抵抗力に対応する負の運動量の線状湧源、すなわち仮空的な棒を考えて、その後流として取扱われる。

乱流境界層についてもこれと全く同様な考え方をする。従ってここではまず乱流後流について述べることにする。

点 P の位置に細い棒があって、 U_0 なる速さの平均流を受けて抵抗力 F が加わっているとすると、棒の抵抗係数を C_D とすれば、

$$F = (1/2) C_D \rho U_0^2 d \quad (1)$$

と書くことが出来るが、棒の受ける抵抗力 F は平均流が単位時間に受ける運動量損失に等しいものと見なされるから、棒の後流の状況をしらべるためには、 $Q = -F$ によって強さが与えられた仮空的な線状の負運動量湧源からの乱流拡散現象として取扱うのが便利である。ただしこの際、乱流場の乱子はただ負運動量を拡散させるだけで、湧源の存在によっては本来の性質に何等の影響も受けないものと仮定している。実際には後流の内部では、本来の等方性乱流場から変形されて非等方性となるのであるから、この仮定は正しくないが、新たにつくられた非等方性の程度の小さい場合(すなわち F の小さい場合)にはこの仮定は許容されるであろう。

乱流場の拡散は、その中に存在する各階級の乱子によって行われ、その幅がほぼ直線的にひろがる第 I 種拡散領域と、抛物線的にひろがる第 II 種領域とに区別されるが、それ等はすべて本来乱流場の中に存在する乱子の性質によって決定されるものである⁷⁾。そして第 1 図に示した通り、第 I 種領域の傾きの角度 θ を決

第 1 図

定するものは、乱流場の乱れの強さ $\sqrt{v''}/U_0$ であり第 II 種領域の形を決定するものは乱子拡散係数 K を使った乱子 Reynolds 数 $U_0 x/K$ であり、二つの領域の接合点を示す L_0 は最大乱子の性質によって決定される。最大乱子の大きさを A_0 とすれば、 $L_0 \approx A_0 (U/\sqrt{v''})$ である。

平板の乱流境界層が、前記の様な乱流後流の組合せとして考えられるとして、その厚さを決定するもの

は前縁に於ける乱流後流の幅であるとするならば、乱流境界層の厚さも全く気流の乱流場の性質によって支配されるものと予想される。

すなわち平板乱流境界層の厚さについて、従来の経験的な $\sim 4/5$ 乗則、

$$\delta = 0.37 (\nu/Ux)^{1/5} x$$

の代りに、 δ を支配するものは平板と作用する気流の乱流の状態であり、乱流後流の幅と全く同様に二つの領域が区別されるべきものであることを主張するものである。

Nikuradse⁸⁾ は平板乱流境界層の厚さの分布をいろいろな条件の下で測定しているが、この場合にも明らかに直線に近い第 I 種領域と抛物線的な第 II 種領域とが認められる。

3. 乱流境界層の内部構造

乱流境界層は気流と平板との相互作用によって生じたものであるが、その相互作用の強弱によって次のように三つの領域に区分して考えるのが便利である。

(1) 上層部

ここでは外側にある気流の状態、すなわち $\sqrt{v''}/U$ および K 等で示される気流の中の本来の乱子の性質が強く反映しているものとみなされる。ここでは相互作用が極めて小さくなっているため、気流本来の乱子は殆んど板の存在の影響を受けていない。従って相互作用の影響のおよぶ範囲とみなされる乱流境界層の厚さが、全く外側気流の性質のみに支配されるということは極めて合理的なものと思われる。

(2) 下層部

平板の存在の影響を強く受けている部分で、ここでは境界層の外側の気流の状態は何の影響をも与えない。ただ平板の性質、気流の物質的性質等だけによって流れの様子が決定される。

(3) 中層部

上記の両極端の間にはさまれている部分であって外側気流の影響と平板の影響とを同時に受けている部分である。ここでは差当って最も重要な下層部のみについて考えることにする。この部分は非等方性の程度の著しい乱流場であるが、等方性乱流場と同様に、平均流の場とその上にちりばめられた各階級の乱子の運動とに分離出来るものと仮定する。等方性乱流場では乱子と平均流との間には何等の相互作用がなく、乱子エネルギーは一方向的に分子へ流れて減衰して行くが、

この場合には乱子と平均流との間にも相互作用があって、平均流から乱子へのエネルギーの流れがあり、そのため乱子エネルギーの減衰が防止されているという機構を仮定する。

更に平均流と相互作用を行う乱子は、最大あるいはその近傍の大きな乱子に限られ、従ってそれ等の乱子は非等方性が著しいが、より小さな中間および最小乱子については局部的に等方性であると見なし得るものとする。

下層部の中で、しかも壁から十分大きな距離 z だけ離れた層を考える。この層にある最大乱子の大きさを $A_0(z)$ とし、この中に中間乱子 $A_n(z)$ 、最小乱子 $A_\infty(z)$ が含まれているものとする。また、それ等の乱子の乱子速度を二つの方向に分けて $u_0(z), w_0(z), \dots, u_n(z), w_n(z), \dots, u_\infty(z), w_\infty(z)$ とする。

実際に観測される乱れ速度は、これ等のすべての乱子速度の合成であるが、等方性乱流場の場合と同様に

$$\left. \begin{aligned} \overline{u^2} &= \sum u_n^2 \approx u_0^2, \\ \overline{w^2} &= \sum w_n^2 \approx w_0^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

すなわちほぼ最大乱子速度のみに等しいものと考えられる。平均流の歪によって平均流の逸散するエネルギー量は、単位質量、単位時間について

$$\varepsilon(z) = K(z) \left(\frac{\partial U(z)}{\partial z} \right)^2 \quad (3)$$

によって与えられる。ここに $K(z)$ はその高さに於ける乱子動粘性係数であり、ほぼ

$$K(z) \approx w_0(z) A_0(z) \quad (4)$$

によって与えられるものとする。 $\varepsilon(z)$ なる逸散エネルギー量はまず最大乱子に与えられそれから中間乱子、最小乱子を経て分子に伝えられる階段的過程については全く等方性乱流場と同様に考える。従って最大乱子とその運動(一方的廻転と考えられる)によって逸散するエネルギー量も当然 $\varepsilon(z)$ に等しく、

$$\varepsilon(z) = \alpha^2 K(z) \left\{ \frac{w_0^2(z)}{A_0(z)} \right\} \quad (5)$$

となり、(4) および (5) 式より

$$\frac{dU(z)}{dz} = \alpha \frac{w_0(z)}{A_0(z)} \quad (6)$$

となる。ここに α は 1 に近い常数である。

z なる層で新たに発生したエネルギーはすべてその層の乱子で消費され、他の層へ流れることはないと考えているから、 $w_0(z)$ あるいは $\sqrt{\overline{w^2}}$ は空間的に等配

されていると考えられる。また z なる層にある最大乱子の大きさは、その高さ z に比例すると考えられるから

$$A_0(z) = \beta z \quad (7)$$

と仮定する。後に判明する通りこの仮定は、実は混合距離を z に比例させる仮定と同等である。この仮定から (6) 式は

$$\frac{dU(z)}{dz} = \frac{\alpha w_0(z)}{\beta} \frac{1}{z} \quad (8)$$

となり、結局 $U(z)$ は

$$U(z) = \frac{\alpha w_0(z)}{\beta} \ln z \quad (9)$$

によって与えられる対数法則を示す。この結果は、各層に於ける摩擦応力 f が一定であるとし、混合距離 $l(z)$ が z に比例するという仮定から導かれる結果と一致するのは当然のことであって、

$$f = \rho K(z) \frac{dU(z)}{dz} = \rho \alpha w_0^2(z) = \text{const.} \quad (10)$$

より判る通り、著者の仮定と従来の仮定とは形式的には全く同一である。ただ著者の場合には、単に最大乱子の幾何学的状態を仮定するに止まらず、中間乱子より最小乱子に至る微細構造を考えているという点で、従来の混合距離理論と著しい相違があるものと信じている。更に従来の理論との対応を求めれば、

$$v_* = \sqrt{f/\rho} = \sqrt{\alpha} w_0(z) \quad (11)$$

$$l^2 = K(z) / (\partial U / \partial z) = A_0^2(z) / \alpha \quad (12)$$

等により、摩擦速度の概念は最大乱子の乱子速度に、混合距離は最大乱子の大きさにそれぞれ対応し、しかもその大きさもほぼ等しいものであることがうかがわれる。

等方性乱流場と同様に最大乱子と最小乱子との間に

$$A_0/A_\infty = (K/\nu)^{3/4} \quad (13)$$

なる関係が求まり、 A_∞ と z との関係は

$$A_\infty(z) \sim z^{1/4} \quad (14)$$

となる。すなわち最大乱子は z と共に急速に大きく、なるけれども最小乱子の大きさの増加はそれ程著しくなく、 w^2 についてのスペクトル曲線は z と共に幅がひろがるものと予想される。逆に考えると、 z が小さくなるにつれて最大乱子の大きさは急速に小さくなりある小さな高さ z_0 で A_0 と A_∞ とが一致する。この高さは明らかに乱流理論の適用限界であって、 z_0 以下では層流状態と考えられ、 z_0 はいわゆる層流底層の厚

さに相当する。そしてそこでは最小乱子と最大乱子とが一致することから、

$$z_0 \equiv \Lambda_0 = \frac{\nu}{w_0} = \frac{\nu}{w_0} = \frac{\sqrt{\alpha} \nu}{v_*} \quad (15)$$

となり、層流底層に関する代表的 Reynolds 数

$$R_v^* = \frac{v_* z_0}{\nu} \sqrt{\alpha} \quad (16)$$

が 1 の程度の量であることがうかがわれる。

4. 最大乱子について

最大乱子の力学的な状態代表量 w_0 は、平板の表面に働く摩擦応力あるいはエネルギー逸散量 ε によって規定されるが、その幾何学的な状態代表量 Λ_0 を規定する力は現在の乱流理論では欠けているように思われる。最大乱子の行動は乱流運動であると同時に多分に規則性をも備えている。そこで著者は最大乱子のみについて次のような擬格子構造を考えたらどうかと思う。最大乱子は平均流の $\partial U / \partial z$ に強く制約されるため、等方性の場合と異なりその回転方向は一方的である。従って同一高度に於ける最大乱子の空間的配列にも第 2 図に示されるような Kármán 渦列的な規則性

第 2 図

が現われるように思われる。この際最大乱子の大きさは、当然最大乱子間の距離 L に比例するが、もし実際に Kármán 渦列的な擬格子構造が適用されるならば、最大乱子の大きさ、すなわち L が高さ z に比例することが合理的に導かれるのではあるまいか？

このように規則的な運動を行う最大乱子の中に、不規則にしかも等方性乱流状態にある中間および最小乱子が含まれているのが、乱流境界層の構造モデルとしては適当なものではあるまいか。

5. 運動量輸送の機構について

全く規則的に運動する最大乱子とそれに重ね合わせられた局部的等方性な中間および最小乱子を考えたと

すれば、一点に於て同時に観測される二方向の乱れの速度成分は

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots + u_\infty \\ w &= w_0 + w_1 + \dots + w_n + \dots + w_\infty \end{aligned} \right\}$$

であり、それ等の相関は

$$\overline{uw} = u_0 w_0$$

すなわち、最大乱子の運動のみに関する相関に他ならない。しかも最大乱子の運動が全く規則的であるとすれば、

$$\begin{aligned} R_{uz} &= \frac{\overline{uw}}{\sqrt{u^2} \sqrt{w^2}} = \frac{u_0 w_0}{\sqrt{u_0^2} \sqrt{w_0^2}} \cdot \frac{\sqrt{u_0^2}}{\sqrt{u^2}} \cdot \frac{\sqrt{w_0^2}}{\sqrt{w^2}} \\ &= -1 \cdot \frac{\sqrt{u_0^2}}{\sqrt{u^2}} \cdot \frac{\sqrt{w_0^2}}{\sqrt{w^2}} \end{aligned}$$

となり、観測される乱子スペクトルの中で最大乱子かどの程度の寄与を与えるかが判れば、 R_{uw} は求められる。

(2) の条件が成立する範囲では R_{uw} は -1 に近い値で、また R_{uw} は z に無関係に一定に保たれることになるが、Kármán⁷⁾ によって与えられた統計的相似の条件も模型的にはこのような機構によって解釈される。

6. 結 び

乱流境界層の理論としては古くから知られる混合距離理論があり、その有効性はよく知られているが、一方それに対する否定的な意見も最近特に Dryden⁸⁾ によって表明されている。また著者は混合距離と高さを結ぶ

$$l = \kappa z$$

なる関係に於て、 κ を普遍常数として信ずることにあきたらず、ここに極めて幼稚ではあるけれども乱流境界層の模型的構造を考えてみた。

これは特に乱流境界層の下層部に於て、規則的な運動をする最大乱子を考え、その中に重ね合わされた中間乱子および最小乱子には不規則な運動を与えて、後者の運動には等方性乱流理論を適用しようとしたものである。そして先に述べた κ なる比例常数を最大乱子の擬格子構造に於ける幾何学的特性と結びつける可能性を示した。しかし、本報ではまだ従来の理論と異なる何等の結果をも導き得なかった。ただ乱流境界層の内部構造にまで立ち入って、平均流から最大乱子へ更に最大乱子から中間乱子および最小乱子を経て遂に

分子に至るエネルギーの流れを考えて求めた結果から従来よく知られた関係を新たに解釈し直したようなものである。しかし、今後 u あるいは w のスペクトル分布等の測定が可能となった時には、このような内部構造の考察が必ずや必要となって来るであろう。

注： 1) 昭和25年2月4日、日本応用力学第28回講演会に於て講演。昭和25年5月24日原稿受理。

- 2) 正會員 東大理學部地球物理學教室。
- 3) C.F. v. Weizsäcker, Zeitschr. Phys., 124 (1948), 614.
- 4) H. Gebelein, Turbulenz, Berlin, 1935.
- 5) 井上, 昭和24年10月, 理工研講演会。
- 6) I. Nikuradse, ZWB., (1943)
- 7) Th. v. Kármán, Journ. Aeron. Sci., 4 (1937): 131
- 8) H. L. Dryden, Advances in Applied Mechanics, 1 (1948). 1.

円板の熱応力に対する一考察¹⁾

鵜戸口英善²⁾

A Note on the Thermal Stress in a Circular Plate

By Teruyoshi UDOGUCHI

Abstract

The thermal stress which is produced by an axially symmetric distribution of temperature in a thin circular plate is analysed by the usual method of transforming it into the ordinary elastic stress produced by the surface traction and the body force corresponding to the given temperature distribution. The result is compared with the hitherto formulated ones written in some books at home and abroad, and the difference found between these results and the author's is explained by the stress produced by the surface traction normal to the plate, pointing out a mistake contained in the formers.

1. 緒言

一般に弾性体内の不均等な温度分布によって生ずる熱応力を求める場合に、これを温度分布に対応する体力と表面力とによって生ずる普通の弾性応力を求める問題に置き換えて計算する方法がよく採られる。この場合後述の如く表面力は物体の全表面に垂直に作用することになるので、表題のような薄い円板の場合には円板の周辺上に作用する表面力のほかに、板の両面に作用する面圧をも勘定に入れるのが本当であると思う。しかもこの面圧は当然板内に応力を生じ結果に影響する。ところが、この問題をこの方法で解いている内外の数図書³⁾を見ると、何れもこの面圧の影響を無視したのか見落したかしているのを、これを考慮した筆者の答えとは異った結果となっている。筆者は在来の結果の方が誤りであると考えるので、以下にその誤りである所以を明確にしたいと思う。

2. 熱応力の一般解法

一般に熱応力の問題を考えるに当ってはまずその歪に注目しなければならないが、この場合の歪には2種

類あって、すなわち一つは熱膨張に基く歪であり、他はそれが何等かの条件によって拘束されるために生ずる熱応力に基く歪である。いま考える材料の線膨張係数を α 、温度を T 、全変位を x, y, z 軸方向に対してそれぞれ u, v, w とすれば、熱膨張による歪は各方向に対して αT なる故、熱応力のみに基づく歪を3軸方向に対して夫々 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ とすれば

$$\begin{aligned}\partial u / \partial x &= \varepsilon_x + \alpha T, & \partial v / \partial y &= \varepsilon_y + \alpha T, \\ \partial w / \partial z &= \varepsilon_z + \alpha T,\end{aligned}\quad (1)$$

これを応力と歪との一般関係式

$$\begin{aligned}\sigma_x &= mE / (m+1) \cdot \{\varepsilon_x + e / (m-2)\}, \\ \sigma_y &= mE / (m+1) \cdot \{\varepsilon_y + e / (m-2)\}, \\ \sigma_z &= mE / (m+1) \cdot \{\varepsilon_z + e / (m-2)\}\end{aligned}\quad \begin{matrix} \text{ただし} \\ e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \end{matrix} \quad \dots\dots (2)$$

に代入し、かつ

$$\begin{aligned}\partial u / \partial x &= \varepsilon'_x, & \partial v / \partial y &= \varepsilon'_y, & \partial w / \partial z &= \varepsilon'_z, \\ \varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z &= e',\end{aligned}\quad (3)$$

および (2) にならって

$$\left. \begin{aligned}\sigma'_x &= mE / (m+1) \cdot \{\varepsilon'_x + e' / (m-2)\}, \\ \sigma'_y &= mE / (m+1) \cdot \{\varepsilon'_y + e' / (m-2)\}, \\ \sigma'_z &= mE / (m+1) \cdot \{\varepsilon'_z + e' / (m-2)\}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$