解と比較したもので、○印は本数値解法で求めた代表点である。これより分るごとく $t=30\tau$ 当りで半径方向 $r=0$ より $r=1$ にわたり温度変化がグラフ上に明記出来るようになる。したがって以後は $s=0.2$ と間隔をひろげて計算した。かくすることにより計算速度は 10 倍程早くなり 150τ までもとめた。このように間隔を広げたことによって厳密値と非常によく一致した値が得られること図より明らかであろう。したがって以後同様 $s=0.2$ とすれば定常に達するまで十分厳密解と合致した値が得られることが予想される。

本例題ではわざと 150τ 以後 $s=0.5$ すなわち半径を 2 分割した場合、厳密値とどのように違ってくるかをみたが、若干厳密値より低い値が得られるが、実際問題として誤差は心配する程のものではないことが分る。なお $s=0.5$ とすれば数分にして 500τ まで得られることを附記する。この誤差の原因は熱放散のある場合の境界の特殊性からくるもので、積分を遂行するには、表面外の温度も必要となってくるのであり (8) 式の精度は s^2 程度であるから s をあまり大きくとるとは、時間間隔 τ の間の $(r+s)$, $(r-s)$ 間の熱拡散量が平均範囲 s を越えることからくるものであろう。

§3. 結言 最後にいろいろとお世話になった押田勇雄先生ならびに終始御鞭達下さいました小林明先生に厚くお礼申上げる。

- 註：1) 昭和 26 年 5 月 25 日原稿受理
 2) 正会員：名古屋大学熱機関教室
 3) 馬淵健夫：名大工研報告 III-2 (1950)
 4) 押田勇雄：気象集誌 20 巻第 1 号 (1942)
 5) 高橋嘉彦：気象集誌 19 巻 20 巻 22 巻
 6) 日高孝次：応用数学力学 1 巻 (1947)
 7) 川下研介：熱伝導論 (河出書房)

昇降計に関する研究¹⁾

武田 晋一郎²⁾

On the Theory and the Experiments of the Rate-of-Climb Meters

By Shin'ichiro TAKEDA

The present paper describes the general theory of the rate-of-climb indicators and the experimental methods which predict the performances of the component part of the rate-of-climb indicators. Precise experiments were consecuted to compare the results of the theory with the actual results. Several types of compensated rate-of-climb meters are proposed and few of them were actually constructed and tested.

1. 緒言

航空機の操縦に重要な計器である昇降計は気圧の変化速度を指示するようになっているため、同じ様に圧力で働く高度計や速度計に比してその作動はかなり複雑で従来の諸研究³⁾では理論的にも実験的にも不明瞭な点が少なかった。著者はかなり長期間に渉ってこの昇降計について研究して、これら不明瞭の諸点を理論的にも実験的にもすべて明確にし得た。この研究は理論的解析、実験的研究及び試作研究に大別される。

理論的解析では昇降計の作動理論を物理的に正確な方法によって展開し、静的遅れ及び動的遅れの様相を究明し、従来の研究において看過された二三の点を指摘した。また、気圧や気温による誤差の解析をも行って、誤差修正の正しき方法を提案した。毛細管内の空

気の流れを流体力学的に考察して過渡流の影響と空気密度の影響などを論究した。

実験的研究では理論的解析による作動理論の実験的検証を行い、指度の計算値と実験値との完全なる一致を得、また静的遅れの実験の詳細な解析によって魔法瓶内の空気が漸熱変化を行うか、等温変化を行うかの判定根拠を得て遅れの計算値と実験値との一致を得た。また、毛細管、魔法瓶、空盒などの昇降計の主要構成部品の精度を測定し、特に毛細管の抵抗係数の測定方法について深く研究し、極めて正確なる絶対測定装置、簡単かつ迅速に操作し得る電橋型比較測定装置などを得た。また、魔法瓶の内容積、空盒の内容積変化率の測定法に空気圧を利用する方法なども得た。

試作研究は誤差修正原理を正しく遂行した昇降計の

試作を目的としたもので、標準大気を仮定した真空空
盒を用いた一型式の昇降計を試作し、実験を行った。
ついで、大気温度の実測による理論的に完全に修正し
た方式の昇降計を試作し、さらに数種の修正方式を提
案したものである。

2. 作動理論

昇降計は毛細管、空気室および空盒圧力計を主要構
成要素とするものであるが、空気室を魔法瓶とするか
或は計器室内部とするか、または制動用毛細管をつけ
るか否かで種々の型式があるが、作動の点からは第 1
図の如き、普通型昇降計と第 2 図の如き制動型昇降計
とに大別される。先ず、普通型昇降計の作動を考察し
よう。

第 1 図 普通型昇降計の作動説明図

2.1 普通型昇降計の作動理論

(a) 基礎微分方程式 昇降計の指示は空盒の内外の
圧力差によるものであるから、昇降計の作動はこの圧
力差を決定する方程式を得れば明らかになる。各部の
気圧、圧力差、流量及び毛細管の抵抗係数を第 1 図に
示すように定めかつ矢印の方向を正とする。しからば
次の諸関係式が成立する。

$$P_1 - P \equiv p, \quad p = \alpha q, \quad \alpha = \frac{8\eta l}{\pi r^4} \quad (1)$$

$$q = -\frac{1}{\rho_2} \frac{d}{dt} (\rho_1 V) = -\frac{1}{\rho_2} \frac{d\rho_1}{dt} V - \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{dV}{dt} \quad (2)$$

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{P_1}{P_0} \frac{T_0}{T_1}, \quad \rho_2 = \rho_0 \frac{P_2}{P_0} \frac{T_0}{T_2} \quad (\text{等温変化}) \quad (3)$$

空盒の容積変化率 dV/dp を B とおき、(1) および
(3) を (2) に代入し、

$$q = -\frac{V}{P_1} \frac{dP_1}{dt} + \frac{V}{T_1} \frac{dT_1}{dt} - B \frac{dp}{dt} \quad (4)$$

$\frac{dP_1}{dt} = \frac{dP}{dt} + \frac{dp}{dt}$ なる関係と、係数にある P_1 を P と
おけば、

$$q = -\frac{V}{P} \frac{dP}{dt} + \frac{V}{T_1} \frac{dT_1}{dt} - \left(\frac{V}{P} + B \right) \frac{dp}{dt} \quad (5)$$

となる。(5) と $p = \alpha q$ なる関係とより p に関する微
分方程式：

$$\alpha \left(\frac{V}{P} + B \right) \frac{dp}{dt} + p = -\alpha \frac{V}{P} \frac{dP}{dt} + \alpha \frac{V}{T_1} \frac{dT_1}{dt} \quad (6)$$

を得る。これが普通型昇降計の作動を決定する基礎方

程式である。気圧 P の変化は専ら 航空機の高度 H
の変化に基因するものであって

$$\frac{dP}{dt} = -\rho_0 g \frac{dH}{dt} = -\rho_0 g \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} \frac{dH}{dt} \quad (7)$$

なる関係がある。これを (6) に代入すれば、

$$\alpha \left(\frac{V}{P} + B \right) \frac{dp}{dt} + p = \alpha \rho_0 g \frac{V}{P_0} \frac{T_0}{T} \frac{dH}{dt} + \alpha \frac{V}{T_1} \frac{dT_1}{dt} \quad (8)$$

となる。(6) および (8) の右辺の第二項は空気室中
の空氣の温度変化率に比例する項で、魔法瓶と計器室
とはかなりの差があるが、余り顯著なる指度を示す
ことは稀であるから、以下では $dT_1/dt = 0$ として考
察を進める。しからば一定速度の昇降時の昇降計の指
度は

$$p = \alpha \rho_0 g \frac{V}{P_0} \frac{T_0}{T} \frac{dH}{dt} \quad (9)$$

なる差圧 p に対応する値となる。毛細管抵抗係数 α 、
容積 V 、大気の絶対温度の逆数 $1/T$ に比例するが、
大気の圧力 P には無関係である。

(b) 静的遅れ (6) および (8) は常係数の一次微
分方程式であるから、その解はよく知れた通り

$$p = p_0 e^{-t/\lambda} + \frac{e^{-t/\lambda}}{\lambda(1+\sigma)} \int_0^t \frac{dP}{dt} e^{t/\lambda} dt \quad (10)$$

である。但し

$$\lambda \equiv \alpha \left(\frac{V}{P} + B \right), \quad \sigma \equiv \frac{PB}{V} \quad (11)$$

昇降計が一定の指度 p_0 を保っているとき、急に昇
降速度が零になると指針は零に帰るわけであるが、遅
れがある。これを静的遅れという。この場合の指針の
帰零過程は (10) 式の第一項 $p = p_0 e^{-t/\lambda}$ に従い、ま
た指度 0 より一定の指度 p_0 に急に移行する場合は

$$p = p_0 (1 - e^{-t/\lambda})$$

に従う。遅れの時間は λ に比例するので、 λ は昇降
計の重要な特性常数である。(11) によれば

$$\lambda = \alpha \frac{V + PB}{P} \quad (12)$$

であるから、遅れ時間は毛細管の抵抗係数 α に比例
し、容積の次元を有する量 $(V + PB)$ に比例し、気圧
 P に逆比例する。 PB なる量は空盒の容積変化率
 dV/dp による有効容積であるから、遅れに係する容
積は空気室の容積 V と空盒の有効容積 PB との和に
なる。昇降計に用いられる空盒は極めて柔軟で敏感で
あるから、 B が著しく大きくしばしば空気室容積 V
を凌駕することがある。これが従来の諸研究において
遅れの理論値と、実験値との不一致となった理由であ
る。

昇降計としては遅れをできる限り小さくすることが
望ましいが、機構の上から一定の昇降速度に一定の差
圧を対応せしめることが要求され、これが $\alpha V/P$ に

比例するので αV が略一定となる。ところが V は装備上の考慮から余り大となし得ないので、結局 B すなわち空盒の容積変化率を小とする外ないのである。近頃の昇降計はみなこの傾向にある。遅れは気圧 P に逆比例するので、高々度では遅れは甚だしく大きくなる。次の表を見れば、

高度(軒)	0	5	10	15	20
気圧(軒)	760	405	193	90	41
遅れの増加率	1.00	1.36	2.49	4.70	18.5
$\lambda_0=6$ 秒のとき の遅れ(秒)	6.0	8.2	14.9	28.2	58.6

容易に知れる通り、1万米の高度ではすでに遅れが著しく大で昇降計を使用し難いのである。

(c) 動的遅れ 昇降速度或は気圧変化速度 dP/dt が時間的に変化する場合は昇降計の指度は一般解を表わす(10)式によって計算すればよい。飛行機の運動と操縦に最も重要なフュゴイド運動時の昇降速度の変化の場合について考察する。フュゴイド運動の大きさは高度変化量 $2\Delta H$ 、気圧変化量 $2\Delta P$ 、週期 $T=2\pi/\omega$ とする。この場合の気圧の変化は概ね正弦波動的と考えて差支えないので、

$$P=P_0+\Delta P \cdot \sin \omega t \quad (13)$$

とおく。しかれば $P=\omega \Delta P \cdot \cos \omega t$ となる、これを(6)に代入し、(11)の關係を使えば

$$\lambda \frac{dp}{dt} + p = -\frac{\lambda \omega}{1+\sigma} \Delta P \cos \omega t \quad (14)$$

となる。この微分方程式の定常解を求めると、

$$p = -\frac{\lambda \omega}{\sqrt{1+\lambda^2 \omega^2}} \cdot \frac{\Delta P}{1+\sigma} \cos(\omega t - \phi) \quad (15)$$

$$\phi = \tan^{-1} \lambda \omega \quad (16)$$

となる。振幅の減少と位相の遅れとが現われる。振幅の減少はフュゴイド週期 T によるほかに空盒有効容積と空気室容積との比 $\sigma=PB/V$ に関係する。 $\sigma=0$ の場合、すなわち空盒有効容積0の場合が振幅の減少が最小である。振幅を動的感度と名づければ、古い昇降計では $\sigma=1$ になっているので、動的感度は1/2に

図2 普通型昇降計の動的感度と位相の遅れ

なっている。

位相の遅れが大きいと、昇降計の指度は昇降速度に対応せず高度変化に対応するようになり、恰も定高計(statoscope)の様な作用を営む。その境界を 45° と見れば、

$$T/2\pi > \lambda \quad \text{ならば} \quad \text{昇降計}$$

$$T/2\pi < \lambda \quad \text{ならば} \quad \text{定高計}$$

として作用することになる。毎秒10米の昇降速度に際して水柱3種の差圧を生ずる昇降計において、 $\sigma=1$ なる場合と $\sigma=0$ なる場合の動的感度と位相の遅れとを図示すれば、第2図の如くである。

2.2 制動型昇降計の作動理論

制動型昇降計は空盒と大気との間にいわゆる制動用毛細管が挿入してある点が普通型と異なっている。第3図はいわゆる無保温槽型昇降計に制動用毛細管を入れた場合であって、これが最も一般的な型である。

第3図 制動型昇降計の作動説明図

(a) 基礎微分方程式 各部の圧力、温度、差圧、流量を第3図に示した如くに定める。然らば、前と同様な考察を進めると、順次に次の諸關係が得られる。

$$P_1 - P \equiv p_1, \quad P_2 - P \equiv p_2, \quad P_1 - P_2 \equiv p_{12} = p_1 - p_2$$

$$p_1 = \alpha_1 q_1, \quad p_2 = \alpha_2 q_2$$

$$q_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{d}{dt} (\rho_1 V_1) = -\frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} V_1 - \frac{dV_1}{dt}$$

$$= -\frac{V_1}{P_1} \frac{dP_1}{dt} + \frac{V_1}{T_1} \frac{dT_1}{dt} - B \frac{dp_{12}}{dt}$$

$$B \equiv \frac{dV_1}{dp_{12}}, \quad \frac{dV_2}{dp_{12}} = -\frac{dV_1}{dp_{12}} = B$$

$$q_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{d}{dt} (\rho_2 V_2) = -\frac{1}{\rho_2} \frac{d\rho_2}{dt} V_2 - \frac{dV_2}{dt}$$

$$= -\frac{V_2}{P_2} \frac{dP_2}{dt} + \frac{V_2}{T_2} \frac{dT_2}{dt} + B \frac{dp_{12}}{dt}$$

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{dP}{dt} + \frac{dp_1}{dt}, \quad \frac{dP_2}{dt} = \frac{dP}{dt} + \frac{dp_2}{dt}$$

これから p_1 及び p_2 に関する微分方程式を求めると

$$\left(\alpha_1 \frac{V_1}{P_1} + \alpha_1 B \right) \frac{dp_1}{dt} + p_1 = -\alpha_1 \frac{V_1}{P_1} \frac{dP}{dt}$$

$$+ \alpha_1 \frac{V_1}{T_1} \frac{dT_1}{dt} + \alpha_1 B \frac{dp_2}{dt}$$

$$\left(\alpha_2 \frac{V_2}{P_2} + \alpha_2 B \right) \frac{dp_2}{dt} + p_2 = -\alpha_2 \frac{V_2}{P_2} \frac{dP}{dt}$$

$$+ \alpha_2 \frac{V_2}{T_2} \frac{dT_2}{dt} + \alpha_2 B \frac{dp_1}{dt} \quad (17)$$

となる。この型の昇降計の指示は差圧 p_{12} によるものであるから、 p_{12} に関する微分方程式が必要である。

(17) は連立一次微分方程式であるから、 p_1 或は p_2 のみに関する微分方程式を求め、それら二つの微分方程式の差を求めると、 p_{12} に関する二次微分方程式：

$$A \frac{d^2 p_{12}}{dt^2} + B \frac{dp_{12}}{dt} + C p_{12} = - \left(\alpha_1 \frac{V_1}{P_1} - \alpha_2 \frac{V_2}{P_2} \right) \frac{dP}{dt} + \left(\alpha_1 \frac{V_1}{T_1} \frac{dT_1}{dt} - \alpha_2 \frac{V_2}{T_2} \frac{dT_2}{dt} \right) + \alpha_1 \alpha_2 \left\{ \frac{V_1 V_2}{T P_2} \frac{dT_1}{dt^2} - \frac{V_1 V_2}{T_2 P_1} \frac{dT_2}{dt^2} \right\} \quad (18)$$

が得られる。但し

$$\left. \begin{aligned} A &\equiv \alpha_1 \alpha_2 \left\{ \left(\frac{V_1}{P_1} + B \right) \left(\frac{V_2}{P_2} + B \right) - B_2 \right\} \\ B &\equiv \alpha_1 \left(\frac{V_1}{P_1} + B \right) + \alpha_2 \left(\frac{V_2}{P_2} + B \right) \\ C &\equiv 1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$D \equiv \alpha_1 \frac{V_1}{P_1} - \alpha_2 \frac{V_2}{P_2} \quad (20)$$

とおき、(18) の右辺の第二、三項を省略すれば

$$A \frac{d^2 p_{12}}{dt^2} + B \frac{dp_{12}}{dt} + C p_{12} = -D \frac{dP}{dt} \quad (21)$$

となる。これが求める基礎方程式である。(19) の中の P, P_2 はほとんど P に等しく、短い時間中ではこれらは常数と考へて、(21) を常係数の線型二次微分方程式として取り扱ってよい。航空機が一定の昇降速度を維持しているときは

$$p_{12} = -D \frac{dP}{dt} = \rho_0 g \frac{\alpha_1 V_1 - \alpha_2 V_2 T_0}{P_0} \frac{dH}{T dt}$$

となり、指度が昇降速度に比例することは普通型と同様である。

(b) 静的遅れ 基礎方程式 (21) の一般解はその特性方程式の二根を λ_1, λ_2 とすれば、次の通りになる。

$$p_{12} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t D \frac{dP}{d\tau} \{ e^{\lambda_2(t-\tau)} - e^{\lambda_1(t-\tau)} \} d\tau \quad (22)$$

静的遅れの場合に対する初期条件は

$$(p_{12})_{t=0} = p_0, \quad \left(\frac{dp_{12}}{dt} \right)_{t=0} = 0$$

であるから、

$$p_{12} = p_0 \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (23)$$

となり、静的遅れの過程を示す減衰曲線は $\lambda_1 \ll \lambda_2$ なるため、普通型と異なり $t=0$ の附近で水平に出発する。米国 Pioneer 社製の昇降計について実測せる常数

$$\alpha_1 = 0.49 \cdot 10^4 \quad \alpha_2 = 0.456 \cdot 10^4$$

$$V_1 = 328 \quad V_2 = 26.3$$

$$B = 0.278 \cdot 10^{-3}$$

$$A = 2.37 \quad B = 4.34 \quad C = 1$$

を用いて計算した減衰曲線は、 $\lambda_1 = -0.271$,

$\lambda_2 = -1.56$ にして

$$p_{12}/p_0 = 1.21 e^{-0.271t} - 0.21 e^{-1.56t}$$

となる。 $\lambda_2/\lambda_1 = 5.76$ であるから、 λ_2 の項は極めて早く減衰し、短時間後には λ_1 の項が残るのみである。

第4図 制動型昇降計の減衰曲線

第4図はこれを示したものである。

遅れの気圧 (高度) による増加は普通型昇降計と大差ないと見てよい。

(c) 動的遅れ 普通型の場合と同様にフュゴイド運動を考察する。

$$P = P_0 + \Delta P \sin \omega t$$

$$\frac{dP}{dt} = \omega \Delta P \cos \omega t$$

とおけば、(21) の定常解は

$$p_{12} = - \frac{D\omega}{\sqrt{(A\omega^2 - C)^2 + B^2\omega^2}} \Delta P \cos(\omega t - \phi) \quad (24)$$

$$\tan \phi = B\omega / (A\omega^2 - C)$$

となる。特有方程式の根 λ_1, λ_2 を使い、 $-\frac{1}{\lambda_1} = \tau$,

$$-\frac{1}{\lambda_2} = \frac{\tau}{n} \quad \text{とおけば}$$

$$p_{12} = - \frac{D\omega}{\sqrt{1 + \frac{n^2+1}{n^2} \omega^2 \tau^2 + \frac{1}{n^2} \omega^4 \tau^4}} \Delta P \cos(\omega t - \phi) \quad (25)$$

$$\tan \phi = \frac{n+1}{n} \omega \tau / \left(1 - \frac{1}{n^2} \omega^2 \tau^2 \right)$$

となる。これに従って、第4図に減衰曲線を示した昇降計について動的感度と位相の遅れを計算した結果を図示すれば、第5図の通りである。振幅は週期が小となれば小となって、制動効果が現われている。位相も 90° 以上の遅れが生ずることが知れる。

第5図 制動型昇降計の動的感度と位相の遅れ

3. 誤差及び誤差修正論

昇降計に特有なる誤差は空盒の内外に生ずる圧力差が諸種の原因によって真の昇降速度と対応せぬために生ずる誤差である。定常状態に於ける指示圧は(8)より

$$p = \alpha(T_2) \rho_0 g \frac{VT_2 T_0 dH}{P_0 T_1 T dt} + \alpha(T_2) \frac{V}{T_1} \frac{dT_1}{dt} \quad (26)$$

である。第一項に T_2/T_1 なる係数を附加した理由は毛細管中の空気密度と空気室(魔法瓶)中の空気密度と相違せる時の影響を含めたことにある。第二項は空気室内の空気の温度が時間的に変化するための見掛けの昇降速度を現わすもので、外気温およびその変化速度保温の良否等に関係し理論的にその大きさを予想することは困難である。保温性能をよくしてこの誤差を避けるほかはない。

第一項は昇降速度に比例する誤差を含み、それは係数因子が標準値と相違するために起るもので、理論的に完全に予測できるものである。係数因子にて変化するものは、次の三個であってそれぞれ右側の原因によって変化するものである。

- $\alpha(T_2)$ 毛細管の温度 T_2
- T_2/T_1 毛細管温度と保温槽温度との比
- T_0/T 大気温度 T

これらの原因による誤差を次の如く命名する。

- 粘性係数誤差
 - 計器温度比誤差
 - 大気温度誤差
- } 計器温度誤差

最も大きいのは大気温度誤差で、次に大きいのは粘性係数誤差である。

(a) 大気温度誤差 これは大気温度が標準温度 15°C 即ち $T_0 = 288^\circ\text{K}$ と相違するために生ずる誤差である。航空機の行動範囲の大気温度の変化は高度の変化によるものが最も卓越しているため、しばしば高度誤

差と通称されている。誤差の表現は標準差圧 p_0

$$p_0 = \alpha(T_0) \rho_0 g \frac{V}{P_0} \frac{dH}{dt} \quad (27)$$

と現在差圧 p との比或はその百分率にて行いものとする。しからば、大気温度誤差は大気温度 T と T_0 との差を ΔT として

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T_0}{T} = \frac{1}{1 + \Delta T/T_0} \quad (28)$$

となる。その数値の一例は次の表の如くである。

大気温度誤差は低温で正值、高温で負値を取り -50°C において $+30\%$ に達する。高温での誤差は小で 10% に達することは稀である

大気温度	40°	20°	0°	-20°	-40°C
T_0/T	0.920	0.983	1.055	1.138	1.236
$T_0/T - 1$	-0.080	-0.017	0.055	0.138	0.236

標準大気を仮定すれば、温度と高度 H (呎) との間には $T = T_0 - 6.5 H$ なる関係があるから、これを(28)に代入すれば、大気温度誤差は高度 H の函数となり

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0 - 6.5 H} = \frac{1}{1 - 0.0226 H} \quad (29)$$

昇降計の所謂高度誤差が得られる。高度 5 呎で 12.7% 高度 10 呎で 29.1% に達する。

(b) 計器温度比誤差 これは毛細管と空気室との温度が異なるときのみ発生するものであるから、所謂無保温槽式昇降計ではこの誤差は生じない。空気室(魔法瓶)の温度が一定 T_0 に保たれ、毛細管温度が常に外気温 T に等しいときは(26)より明らかな通り、大気温度誤差と計器温度比誤差とは打消し合って両誤差の和が 0 になる。

(c) 粘性係数誤差 これは毛細管中の空気の粘性係数が温度によって変化するために生ずるもので、

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\alpha(T_2)}{\alpha(T_0)} = \frac{\mu(T_2)}{\mu(T_0)} \quad (30)$$

の如く表わされる。その値は次表の通りである。この誤差は高い高度で負値となるので大気温度誤差と打消す作用がある。約半分を打消す。

温度 $t^\circ\text{C}$	40°	15°	0°	-15°	-40°
粘性係数 $\mu \cdot 10^4$	1.915	1.792	1.720	1.642	1.531
$\mu(T_2)/\mu(T_0)$	1.069	1.000	0.960	0.917	0.845
粘性係数誤差%	6.9	0	-4.0	-8.3	-15.5

計器温度比誤差と粘性係数誤差とは互に関連して生ずるのが普通であるから、次項の誤差修正論では両者を纏めて計器温度誤差として取り扱うことにする。

(d) 誤差修正論 昇降計の誤差修正には読みの記録値より正しい昇降速度を得る操作と自動的に誤差修正を行った補正型昇降計に関するものがある。誤差の原因と大きさが前の諸項目で明らかであるから、これらを活用して前者の修正を行うことは容易であるから、これについての詳説は省略する。

(1) 大気温度誤差の自動修正 この自動修正には大気温度に感応する測定要素体が必要である。最も簡単なものは標準大気方式である。これは標準大気を仮定して高度に対応する気圧と気温とを一意的に関連せしめて気圧を測定して間接に気温を知る方式である。測定要素は気圧変化で作動する空盒である。この空盒の変位によって、毛細管の抵抗係数を変化する方法を採る。このほかに毛細管の一部がオリフィスの如き空気密度(気圧)に比例する圧力差を生ずるようにしたもの、或は素焼筒の隔壁を空気が通過するときの抵抗係数が空気圧力(分子の平均自由行程)によって変化する現象を利用したものなどがある。

標準大気式では修正不可能の残存誤差は第6図に示した通りであって、地上で12%、高空で10%程度の値に達する。精密な誤差修正を望むときには、実大気方式によらなければならない。これは大気温度計装置にて大気温度を測定して毛細管の抵抗係数を変化せしめて自動修正を行うものである。

第6図 標準大気方式にて修正不可能の残存誤差

(2) 計器温度誤差の自動修正 空気室中に毛細管をおけば、計器温度比誤差はなくなるので粘性係数誤差のみを修正すればよい、バイメタルを用いるときにはその変形による毛細管の抵抗係数変化率と粘性係数の温度変化率と相等しくその方向を反対にすればよい。

α を粘性係数 μ と寸法形状から定まる抵抗常数 β との積 $\alpha = \mu\beta$ とすれば、誤差修正条件 $\partial\alpha/\partial T_1 = 0$ より

$$\frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dT_1} = - \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT_1} \quad (31)$$

をうる。右辺は粘性係数の温度変化率で 0.0028 であ

るから、バイメタルによる $(1/\beta) d\beta/dT_1$ も 0.0028 に撰定すれば正しい修正を行うことができる。このほかに空盒中に適当量の空気を残存せしめてバイメタルを用いない方法もある。

4. 毛細管抵抗論

毛細管は昇降計の最も重要な部品である。その流動抵抗は粘性層流と仮定して Poiseuille の法則を適用して来たが、厳密に考えると、粘性層流発達の影響、乱流の影響、空気密度の影響の有無、膨脹加速流の影響等の吟味と検討とを必要とする。これらの考察の基礎となる流体力学的理論と事実とはすでに概ね研究済であるが、昇降計用毛細管への適用に際して注意すべき点を附記して次に述べる。

(a) 粘性層流発達の影響 円形断面の管の中の流体の流れが Poiseuille の法則に従うのは無限に長い管の一部分においてである。昇降計用毛細管の如く短い管では管の入口附近の速度分布が第7図に示す通り変化することを考慮せねばならぬ。昇降計に関係するのは一定の平均流速 U に対する圧力低下量であるが、圧力低下は空気が静止部より管の入口に移るとき速度 0 より速度 U に変わるとき起るものと、一様な速度分布が拋物線的の速度分布に変わるとき流体の内部摩擦抵抗の増加によるものと、普通の Poiseuille の法則に従うものとの三者より成っている。最初のもの

$$\Delta p_1 = \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (32)$$

である。速度分布が直線より拋物線に変化する部分の圧力低下量 Δp_2 に就いては J. Boussinesq, L. Schiller, Goldstein 等の研究があるが得られた結果には若干の相違がある。

L. Schiller は境界層理論を適用して近似解を求めて、

$$\Delta p_2 = 1.16 \rho U^2 / 2 \quad (32)$$

を得た。J. Boussinesq は級数展開法によって解き、

$$\Delta p_2 = 1.24 \rho U^2 / 2 \quad (33)$$

を得た。Goldstein と Atkinson は境界層理論による精密な解法を用いて

$$\Delta p_2 = 1.41 \rho U^2 / 2 \quad (34)$$

なる結果を得た。この結果をここで採用する。

しからば、粘性層流が十分発達した長さ l の毛細管の両端の圧力差 p は

$$p = \frac{8\mu l}{r^2} U + 2.41 \frac{\rho U^2}{2} \quad (2)$$

となる。第一項は空気密度に無関係で粘性係数に比例し、第二項は粘性係数には一応無関係で空気密度に比例する量である。

(1) 空気密度の影響 毛細管の長さ l が十分長くな

第7図 毛細管内の速度分布の変化と圧力の変化

いときは第一項に比して第二項が小とならず、空気密度の影響を受け昇降計には密度誤差が生ずる。この密度誤差は

$$\frac{p}{p_0} = \frac{8\mu U/r^2 + 2.41 \rho U^2/2}{8\mu U/r^2 + 2.41 \rho_0 U^2/2} \quad (36)$$

$$\approx 1 + 2.41 r^2 U (\rho - \rho_0) / 16 \mu l$$

となる。容積 V の空気室を有する昇降計より流出する空気の毛細管中の平均流速 U は

$$U = \frac{1}{\pi r^2} \frac{\rho g V}{P} \frac{dH}{dt} = \frac{\rho_0 g V}{P_0 \pi r^2} \frac{dH}{dt} \quad (37)$$

である。これを (36) に代入すると、

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{2.41 \rho_0 g V}{16 \mu \pi P_0} \frac{dH}{dt} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \quad (38)$$

となり、密度誤差は毛細管の内半径 r には無関係でその長さ l に逆比例する。なお昇降速度に比例する。これは大気温度誤差などの百分率が昇降速度に無関係であったことと相違している点に注意すべきである。 $V=260$ ㎤³、 $dH/dt=10$ (米/秒) として高度 5 ㍩ ($\rho/\rho_0=0.601$) と高度 10 ㍩ ($\rho/\rho_0=0.337$) に於ける密度誤差を種々の毛細管長 l に対して計算すれば次の表の通りである。

毛細管の長さ l ㍩	0.5	1.5	3.0	5.0
高度 5 ㍩の 密度誤差 %	-8.1	-2.7	-1.4	-0.8
高度 10 ㍩の 密度誤差 %	-13.5	-4.5	-2.3	-1.3

2) 毛細管の長さの撰定 この撰定について考慮すべき条件は空気密度による誤差の抑圧と過渡的長さ以上に達していることの二つである。前者よりは、高度 10 ㍩のときの密度誤差を 2 % 以下に抑えたと $V=260$ ㎤³ の昇降計に対して、 $l>34$ ㍩となる。過渡的長さ (length of transition) l_1 は Boussinesq によると 99 % の合致度にて過渡域を定義して

$$l_1 = 0.26 r \frac{U r}{\nu} = 0.26 \frac{\rho r^2 U}{\mu} \quad (39)$$

となる。この関係式を空気容積 V の昇降計に適用す

れば

$$l_1 = 0.26 \frac{\rho_0 g V}{\pi P_0 \mu} \rho \frac{dH}{dt} \quad (40)$$

となり、 l_1 は昇降速度と空気密度に比例する。故に、地上密度に対して l_1 を決定しておけば高空に対してこの l_1 で安全である。+15°C の μ の値に対して l_1 を計算すれば次の表の通りである。

昇降速度 10 米/秒を標準とすれば、 $l \geq 20$ ㍩とすれば充分である。30 米/秒の最大指数を有する昇降計を設計する場合には l_1 が 51 ㍩にも達していることに注意しなければならない。

	地上に於ける過渡的長さ l_1				
昇降速度 (米/秒)	5	10	15	20	30
過渡的長さ l_1 (㍩)	8.5	17.0	25.5	34.0	51.0

(b) 乱流の影響の有無 空気室容積 V の昇降計の毛細管中の流れに対する Reynolds 数 R を計算すれば、

$$R = \frac{r U}{\nu} = \frac{\rho^2 g V}{\pi r \mu P} \frac{dH}{dt} \quad (41)$$

となる。10 米/秒の昇降速度、 $V=260$ ㎤³ に対して $R=20$ となるので、乱流になる心配は全然ない。

(c) 膨脹加速流の影響の有無 毛細管中を流れる空気は圧縮性があるため、管の起点と終点との間で圧力降下のため膨脹し加速される。このため、流量と差圧との関係が少し影響を受け⁵⁾

$$p = \frac{8 \eta l}{r^2} U + \frac{\rho U^2}{2} \left(2.41 + \frac{2p}{P} \right) \quad (42)$$

となる。右辺の第三項 $2p/P$ が膨脹加速流の影響を示すものである。地上気圧 $P_0=1000$ ㍩水柱、 $p=3$ ㍩水柱であるから、この項の大きさは $0.003 \rho U^2/2$ となり全く微量である。高度 10 ㍩でもこの 4 倍となるに過ぎないから、この影響は無いと考えて差支えない。

(d) 矩形毛細管 矩形断面の毛細管は誤差修正式昇降計の可変抵抗体として使用せられているので、その抵抗係数と速度分布などを理論的に求めた。その詳細を省略し、一辺 a の正方形の抵抗係数 α_1 を記せば、

$$\alpha_1 = \mu / 0.03513 a^4$$

となり、直径 a の円形毛細管の抵抗係数 α_0 は

$$\alpha_0 = \mu / 0.02455 a^4$$

となり、 α_0 は α_1 に比して約 1.43 倍大きい。正方形と同一面積の円形管とを比較すれば、正方形の方が約 12 % 小である。

5. 部品の性能の測定法

昇降計の三主要構成要素なる毛細管抵抗係数、空気

室容積，空盒圧力計特性についてその性能を実験的に研究した結果を以下に述べる。

5.1 毛細管

毛細管の主務は魔法瓶よりの出入空気流に抵抗を与えて差圧を生ぜしめることにある。従ってその抵抗係数を正確に測定することは昇降計の作動，設計，試験，製作に対して決定的に重要な事柄である。しかし，従来わが国ではこの抵抗係数の測定は余り実行してなく，その測定法もほとんど進歩していない有様であった。著者は毛細管の抵抗係数の測定法を種々研究し，絶対測定法及び比較測定法の二，三の新しい測定法を創案して良好なる成績を得ることができた。

(a) 絶対測定法 毛細管の抵抗係数の絶対値の決定はその長さ l と半径 r を測定して $\alpha = 8\mu l/\pi r^4$ によって計算してもよいが，これは多数回の実験は面倒で実行不可能である。しかし，Poiseuille の法則或はそれを修正した諸公式によって流量を測定して抵抗係数を算出する方法によって抵抗係数の絶対値を求めることが出来る。そして多数回の繰返しも困難でないのである。

流量法による抵抗係数の既知の測定方法は昇降計用毛細管には適当でないと考えられたので，次の第8図の如き装置を製作した。電動機の回転は減速されて螺桿を進めピストンを押して空気を排出する。この空気が毛細管を通して圧力差を生じ，その圧力差がゲッチンゲン型圧力計にて測定される。空気量は電動機の回転数とピストンの直径などから精密に決定される。

二つの毛細管に対する実験結果は

$$\begin{aligned} \text{毛細管 I} \quad \alpha_1 &= 1.495 \cdot 10^4 \\ \text{毛細管 II} \quad \alpha_2 &= 1.625 \cdot 10^4 \end{aligned} \quad (43)$$

である。この測定結果の精度を確定しておくために，

第8図 毛細管抵抗係数の絶対測定装置

二つの実験を行った。第一は間接的な方法で，後述の直列式比較測定装置にて二つの毛細管の抵抗係数の比を求め，これと (43) の比とを比較したものである。その結果は，

$$\begin{aligned} \text{比較測定法による抵抗比} &= 0.9192 \\ \text{絶対測定法による抵抗比} &= 0.9194 \end{aligned} \quad (44)$$

であって，その差異は 0.02 % に過ぎない。第二は直接に毛細管の長さと内径を精密に測定し，それと絶対

測定方法による抵抗係数とより空気の粘性係数を計算し，その値と既知の空気の粘性係数値と比較するものである。その結果は 20°C において

$$\mu = 181.9 \times 10^{-6}, \quad \mu = 181.5 \times 10^{-6}$$

である。空気の粘性係数の値は測定者によってかなりの相違があるが，最も信頼するに足るものは 20°C において

$$\mu = 181.6 \times 10^{-6}$$

である。これを基準とすれば，この絶対測定装置より得たる測定値は ± 0.3 % の差異を有するに過ぎない。

これらの実験によって，この絶対測定装置は十分正確なる絶対測定を行い得ることが証明されたことになる。この装置を改良すれば，気体の粘性係数の精密なる測定装置とすることは容易で，特に種々の温度の下での粘性係数の測定に適するものと信ぜられる。

(b) 比較測定法 基準毛細管と試験毛細管の抵抗係数を比較する方法で，電気学との類似より直列法，並列法，電橋法が考えられる。著者は直列法と電橋法の二方式について研究した。比較測定法は測定が極めて容易であるから，製作会社において毛細管を調製するに適當している。第9図は直列式の比較測定装置を示したもので，その用法は図より明らかであろう。圧力計の指度の比 p_I/p_{II} が α_I/α_{II} となるのである。その精度は (44) に示した通りで，十分正確である。

第9図 直列式比較測定装置

第10図 電橋式比較測定装置

電橋式比較測定装置は Wheatstone 電橋と同じ原理に基づいたもので，第10図の如き装置である。X を試験毛細管とし，S を標準毛細管， R_1 および R_2

を補助毛細管として、圧力差が0なれば

$$X = S \frac{R_1}{R_2}$$

なる関係が成り立つ。S, R_1 , R_2 が既知なれば、上式より X の値が知れる。昇降計の生産を行う場合には $R_1 = R_2$ としておけば、 $X = S$ となるので、非常に簡単である。検流計の役目をする二液圧力計の代りに敏感なる空盒圧力計を使用すると、取扱いが容易になる。この方法の精度の判定は、電橋法によって調整した3個の毛細管 X_1, X_2, X_3 を前述の絶対測定法によって測定しその値を標準値 $X_0 = 1.130 \cdot 10^4$ (31.05°C において) と比較する方法によった。その結果は次の表に示す通りで1%に達する差異はない。

毛 細 管	抵抗係数 $\alpha \cdot 10^{-4}$	百分率偏差 ($X - X_0$)/ X_0
X_1	1.121	-0.82
X_2	1.133	+0.28
X_3	1.130	0.0

電橋が不平衡のときには、差圧 Δp が生ずる。この差圧 Δp を測定して不平衡の際の X の抵抗係数を求めることもできる。これについても実験した。

5・2 容積

昇降計の毛細管より奥部にある容積部分はすべて空気室容積として昇降計の作動に関係するので、その容積の値は精確に決定する必要がある。その容積を大別すれば次の通りである。

魔法瓶容積

接続導管容積

指示器各部容積(空盒内部と接続部)

(a) 直接測定法 魔法瓶の容積の測定は水を入れた重量と空のときの重量との差より求める重量法によって精密に測定することができる。指示器の空盒内の容積は同型の空盒にパラフィンで封入して固化化したのち、そのパラフィンの重量と比重とを計測して求めることができる。それらの結果を供試 CA 型昇降計について示せば次の通りである。

魔法瓶 接続導管 指示器空盒等

$$V = 259.6 + 3.5 + 11.3 = 274.4 (\text{cm}^3) \quad (46)$$

(b) ビストン式容積測定法 これは第11図の如き装置において測定容積 V_0 を接続したときとしないときとのビストンの移動量 $\Delta S_1, \Delta S_2$ とより、次の関係式

$$V_0 = \frac{P}{\Delta P} A (\Delta S_1 - \Delta S_2) \quad (47)$$

にて V_0 を計算して求める方法である。ただし、 A はビストンの断面積、 P は大気圧、 ΔP は生ぜしめた圧力差とする。(47) によって計算した V_0 は 261.8 cm^3 で、これを直接測定法の値 259.6 cm^3 と比較すれば、

(温度差の修正を加えて) 0.61% の差に過ぎないので十分正確と考えられる。

この方法は水を入れたり重量を計測したりしないので実用に便利な方法で、しかも精度も十分高いので生産工場などの使用に適している。適当なる改良を施せば、 ΔS_1 と V とのグラフより直ちに容積を求めうるようにすることができるであろう。

第11図 ビストン式容積測定装置

(c) 容積変化率の測定法 前述のビストン式容積測定装置を利用すると、空盒の容積変化率を簡単に求めることができる。第12図に示す様に、ビストンの移動 Δx による圧力増加 ΔP を測定せんとする空盒自身を圧力計として測定すれば、 ΔP による空盒の容積増加 ΔV は

$$\Delta V = A \Delta x - (V_0 + V_1) \Delta P / P \quad (48)$$

によって求められる。ただし V_0 は空盒の元の容積、 V_1 はビストンとその接続部の容積とする。供試昇降計について

$$\frac{dV}{dp} = 0.27 \cdot 10^{-3} \quad (49)$$

を得た。

第12図 空盒容積変化率測定装置

5・3 空盒圧力計特性

これは通常の如く、差圧と指度の関係を求めればよい。圧力差と指度との関係は概ね直線である。指示器の固有振動数を求め、その固有周期として 0.296 (秒) を得た。これから空盒上の有効質量を計算してみると、 12.9 瓦となる。

6. 総合特性

昇降計の各部品の性質と機能とが明らかとなったので、次には昇降計としての総合的の作動に関する実験結果を述べる。

(a) 指度の理論値と実験値 供試昇降計 CA 型について各部品の特性を測定した前述の結果によって指度の理論値を計算し、実験値との比較を行えば次の通

となり、遅れが $\beta V/P$ だけ増加したのと同様と見られることが知られた。

第14図に示した静的遅れ曲線を見ればわかる通り曲線の傾斜が初期と末期とで少し異なることである。これは静的遅れの初期では断熱変化に近く、末期では等温変化に近いことを意味しているのである。CA型昇降計についての実測値と理論値とを比較して示せば次の表の通りである。これを見れば、上記の見解の正

遅れの実測値 (秒)		遅れの理論値 (秒)	
初期遅れ	末期遅れ	断熱遅れ	等温遅れ
4.18	5.20	4.30	5.41
4.50	5.47	4.44	5.55

しいことが察されよう。しかし、詳細なる検討を行うと、初期遅れも完全な断熱変化ではなく、そのポルトロップ指数 γ を求めて見ると、

CA型昇降計 $\gamma=1.34$ 、CB型昇降計 $\gamma=1.21$ となる。また仮りに10~1米/秒の两点にて合致するポルトロップ指数を求めて見ると、CA型に対して $\gamma=1.16$ となる。

(c) 動的遅れの実験値と理論値 第15図に示した通りの実験装置にて週期的な圧力変化を与えて、圧力変化量を差圧計にて測定し、供試昇降計の指度と比較して振幅の減少と位相の遅れとを求めた。指度の時間的記録は主要目盛線を通過する時刻をテープ式クロノグ

第15図 動的遅れの実験装置

ラフ装置にて記録する方法によって簡易に求めることが出来た。その結果を示せば、第16図と第17図とである。前者は普通型昇降計に関するもの (CA型) 後者は制動型昇降計に関するもの (バイオニヤ製) である。これらを第2節に示した動的遅れの理論曲線と比較して見るとよく一致していることが知れる。

なお、このほかに種々の飛行経過に対する圧力変化を与えてその影響を調べ、また遅れの高度による増加などを実験したが、いずれも理論的解析と一致するものであった。

7. 多量生産法

昇降計の生産を簡易化するには、上述したことから容易に推察されるように、各主要構成部分品を一定の規格に合わせて作り、後にそれらを組み合わせれば極めて容易迅速に行われる筈である。しかし、この様な

第16図 普通型昇降計の動的遅れの実測値

第17図 制動型昇降計の動的遅れの実測値

方法で実際の生産は行われるに至っていない、詳細は省略する。

8. 誤差補正型昇降計の試作

大気温度誤差と計器温度誤差の修正を自動的に行う所謂誤差補正型昇降計の理論は第3節に述べた通りである。これに基づいて著者は次の如き三種の昇降計の試作を立案し、その一つを完成した。

標準大気に対して	補正昇降計一型
任意大気に対して	補正昇降計二型
	補正昇降計三型

これらの構造の略図は第18図、第19図および第20図の通りである。

一型は実際に試作し、良好なる補正成績を示した。各部の性能はすべて理論と合致するように調整して試作した。二、三型は試作中で終りになった。

9. 結 言

昇降計の作動を理論的にも、実験的にもほとんど余す所なく究明した積りである。したがって昇降計の設計、製作、試験、検査に関し不明の点はここに展開した理論と実験を参考とすれば有益な結果が得られるであろう。

第 18 図 補正昇降計一型

第 19 図 補正昇降計二型

第 20 図 補正昇降計三型

- 1) 昭和 26 年 7 月 27 日 受理
- 2) 正会員, 法政大学工学部
- 3) A. Bestelmeyer; Phys. Zeits. Bd. 11 (1910), s. 763.
W. Oppelt & F. Wenk; Luft., Bd. 14 (1937), s. 537/541
Draper & Schlietstett; J. Aer. Science, Vol. 5 (1938),
p.p. 426/430.
D.P. Johnson; N.A.C.A. TR. No. 666, (1939).
Stewart; Aircraft Instruments, pp. 46/49.
Eaton; " pp. 48/52.
Bennewitz; Flugzeuginstrumente; s. 126.
- 4) J. Boussinesq; C.R., 113 (1891), 9/15.
L. Schiller; Z.A.M.M., Bd. 2 (1922), s. 96/106
Goldstein; Modern Developments in Fluid Dynamics,
Vol. I. p. 308.
- 5) S. Erk; Z.f. techn. Physik, (1929), s. 452/457

上部構造の車体の曲げに対する協力に就いて¹⁾

鈴木 真一²⁾

On the Co-operation of the Upper Structure in the Bending of the Coach.

By Shin-ich SUZUKI

Abstract

Hitherto the upper structure of the coach, which has been neglected in the analysis of strength, is conceivable to resist to the bending of the body co-operatively with side structure. From this point of view, the author tried to analyse this problem, taking "the shear lag effect" into consideration.

§ 1. 緒言 従来車輛構造の計算においては、側部構造の窓上の部分及び上部構造を無視し、側部構造の窓下の部分を一つの Beam として車体の曲げの問題を扱っていたが、構造重量の軽減は性能に影響するところが大きいので、上部構造が側部構造に対して力学的にどの程度の協力をするか計算を試みてみた。上部構造の力学は所謂「剪断遅れ」の問題である。「剪断遅れ」に就いてはすでに Reissner³⁾, Younger⁴⁾, Kuhn⁵⁾, が Cantilever に就いて解いているが、車輦はその構造が上記の論文において仮定したように簡単でないので次節 § 2 のように仮定し、中間支持とした。さらに反歪を零にして上部構造の有効幅を大きくする目的で前後面板を入れ、これが有効幅に如何に影響するかを調べてみたものである。結果は § 5 に記したよう

に影響は僅かであるが、設計する上に多少なりとも参考になると思う。

§ 2. 構造の力学的考察 従来は側構窓下を一つの Beam と仮定して左右二本の Beam の曲げの問題とし

Fig. 1

て扱ったが、本論においては、mass を web の上下両端に集中させて窓上及び窓下の部分を代表させ、web