技 術 論 文

ローターの逆対称荷重が、ローター・ディスク面内の誘導速度の分布に及ぼす影響について*

長 島 知 有**・井 町 勇**

On the Effect of Antisymmetric Disc Loading to the Distribution of Induced Velocity of Rotor

Tomoari NAGASIMA, Isamu IMACHI

Abstract

The purpose of this investigation is to seek the distribution of the induced velocity of a rotor in forward flight.

Several analytical reports have been published on the induced velocity field of rotors having non-uniform disc loading, but they have not succeeded to express their results by utilizable analytic functions.

In this report, we substituted a circular wing for a rotor under suitable assumptions, and using the antisymmetric solutions of acceleration potential of this circular wing, we could express the effect of antisymmetric disc loading to the distribution of induced velocity of the rotor by analytic functions.

During this investigation, we could also clear out a correlative relation between the load and the induced velocity distribution along the lateral direction.

1. 序 文

前進飛行中のヘリコプター・ローターのディスク面内における誘導速度の分布を決定することは、ヘリコプターの性能その他の特性の解析に重要な要素となるが、これまでになされた多くの考察は、ローターの荷重分布を一様、もしくは対称荷重と仮定したものが多い^{1)~6)}。

本考察では、前進飛行中ローターが有する荷重分布を、円形翼に対する可能な圧力分布（逆対称荷重も含めて）の数項の線型結合で近似することで、ローター・ディスク面内における誘導速度の分布を tip-speed ratio をパラメーターとして解析関数で表わすことを考えた。

2. 円形翼に対する加速度ポテンシャル、および圧力分布⁷⁾

一般に非圧縮、非粘性流体に対する揚力面理論においては、重力を無視し、定常かつ軽負荷の仮定のもとでは、加速度ポテンシャル Φ 、擾乱速度ポテンシャル φ および誘導速度の z 軸成分 w —以下単に誘導速度と呼ぶ—に関してつぎのような関係があることが知られている。

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

$$V \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Phi, \quad \varphi = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^x \Phi dx \quad (2)$$

$$\rho(\Phi_u - \Phi_l) = 2\rho\Phi_u = (p_u - p_l) \quad (3)$$

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_S (2\Phi_u) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dx' dy' \quad (4)$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi V} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^x \iint_S (2\Phi_u) \times \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dx' dy' dx \quad (5)$$

ここで V は一様流の速度で、 p, ρ は空気の圧力および密度を、添字 u, l は翼の上、下面でのそれぞれの値を取ることを示している。また

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

(x, y, z) : 誘導速度を求める点の座標

(x', y', z') : 特異点の座標

n : 翼下面に立てた法線

で、 $\iint_S$ は翼面全体にわたっての積分を示している。なお薄翼近似で、 $\Phi_u = -\Phi_l$ としている。

ローターの翅数を無限大とした場合を考え、これを半径 R の円形翼で置き換える。

座標系を第1図のように取り、 (x, y, z) を回転楕円体座標 (μ, η, φ) で表わすと、

* 昭和37年12月10日 V/STOL シンポジウムで発表。昭和40年6月17日原稿受理

** 名古屋大学工学部

第1図 座標系

$$\left. \begin{aligned} x &= R\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1+\eta^2}\cos\varphi \\ y &= R\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1+\eta^2}\sin\varphi \\ z &= R\mu\eta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$0 \leq \eta < \infty, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

で, $\nabla^2\Phi=0$ は

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1+\eta^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right] + \left[\frac{1}{1-\mu^2} - \frac{1}{1+\eta^2}\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0 \quad (7)$$

となる。

前進飛行中のローターの荷重分布が x 軸に関して逆対称なものも取り得ることを考慮して, 境界条件を

$$\eta \rightarrow \infty \quad \text{および} \quad \mu = 0 \quad \text{で,} \quad \Phi = 0$$

とすると, (7) の解は

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [C_n^m \cos m\varphi + D_n^m \sin m\varphi] F_n^m(\mu, \eta) \quad (8)$$

$$n+m=\text{奇数}$$

である。ここで $F_n^m(\mu, \eta)$ は

$$F_n^m(\mu, \eta) = \frac{(n-m)!}{i^{n-m+1}(n+m)!} P_n^m(\mu) Q_n^m(i, \eta) \quad (9)$$

で, $P_n^m(x), Q_n^m(x)$ は

$$\begin{aligned} P_n^m(x) &= (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \\ Q_n^m(x) &= (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m Q_n(x)}{dx^m} \end{aligned} \quad (10)$$

で定義される第一種および第二種陪帯球函数で, $P_n(x), Q_n(x)$ は LEGENDRE の微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0 \quad (11)$$

$$(n=0, 1, 2, \dots)$$

の基本解である。

C_n^m, D_n^m は (速度)² の次元をもつ任意の係数で, 常数 $(n-m)!/(n+m)!$ は計算を簡単にするために与えたものである。

(9) の最初の数項のうち, $n+m=\text{奇数}$ となるものを展開した形で表わすと,

$$F_1^0(\mu, \eta) = \mu(1-\cot^{-1}\eta)$$

$$F_2^1(\mu, \eta) = \frac{1}{2}\mu(1-\mu^2)^{1/2}(1+\eta^2)$$

$$\times \left(3 - \frac{1}{1+\eta^2} - 3\eta \cot^{-1}\eta\right)$$

$$F_3^0(\mu, \eta) = \frac{1}{2}\mu(5\mu^2-3)(1+\eta^2)$$

$$\times \left(\frac{5}{2}\eta^2 + \frac{2}{3} - \frac{5\eta^3+3\eta}{2} \cot^{-1}\eta\right)$$

$$F_3^2(\mu, \eta) = \frac{1}{8}\mu(1-\mu^2)(1+\eta^2)$$

$$\times \left[15 - \frac{5}{1+\eta^2} - \frac{2}{(1+\eta^2)^2} - 15\eta \cot^{-1}\eta\right]$$

$$F_4^1(\mu, \eta) = \frac{1}{16}\mu(7\mu^2-3)(1-\mu^2)^{1/2}(1+\eta^2)$$

$$\times \left[35\eta^2 + \frac{10}{3} + \frac{2}{1+\eta^2} - (35\eta^3+15\eta) \cot^{-1}\eta\right]$$

$$F_4^3(\mu, \eta) = \frac{1}{48}\mu(1-\mu^2)^{3/2}(1+\eta^2)$$

$$\times \left[105\eta^2 + 70 - \frac{14}{1+\eta^2} - \frac{8}{(1+\eta^2)^2}\right]$$

$$- (105\eta^3+105\eta) \cot^{-1}\eta \quad (12)$$

等となり, $c\Phi_n^m = C_n^m F_n^m \cos m\varphi, s\Phi_n^m = D_n^m F_n^m \sin m\varphi$ として Φ を

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (c\Phi_n^m + s\Phi_n^m)$$

と書くと, Φ の x, y 軸に関する対称性は,

I. x 軸について

$$c\Phi_n^m: \text{対称}, s\Phi_n^m: \text{逆対称} \quad (13)$$

II. y 軸について

$$\left. \begin{aligned} c\Phi_{2k+1}^{2k}, s\Phi_{2k}^{2k+1}: \text{対称} \\ c\Phi_{2k}^{2k+1}, s\Phi_{2k+1}^{2k}: \text{逆対称} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

である。

翼面上での圧力分布 ($p_l - p_u$) は $c\Phi_n^m, s\Phi_n^m$ に対し

$$\left. \begin{aligned} c(p_l - p_u)_n^m &= 2\rho c\Phi_n^m|_{\eta=0} \\ s(p_l - p_u)_n^m &= 2\rho s\Phi_n^m|_{\eta=0} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

で与えられ, $n=1, 2, 3, 4, n+m=\text{奇数}, n \geq m$ に対しては,

$$\begin{aligned} c(p_l - p_u)_1^0 &= 2\rho C_1^0 \mu = 2\rho C_1^0 \sqrt{x_0^2 - x^2} \\ \left\{ \begin{aligned} c(p_l - p_u)_2^1 \\ s(p_l - p_u)_2^1 \end{aligned} \right\} &= 2\rho \mu (1-\mu^2)^{1/2} \left\{ \begin{aligned} C_2^1 \cos \varphi \\ D_2^1 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \\ &= 2\rho \sqrt{x_0^2 - x^2} \left\{ \begin{aligned} C_2^1 \cdot x \\ D_2^1 \cdot y \end{aligned} \right\} \\ c(p_l - p_u)_3^0 &= \frac{2}{3} \rho C_3^0 \mu (5\mu^2 - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} \rho C_s^0 \sqrt{x_0^2 - x^2} (2 - 5x^2 - 5y^2) \\
 \left. \begin{aligned}
 \{c(p_l - p_u)_s^2\} &= 2\rho\mu(1 - \mu^2) \left\{ \begin{aligned} &C_s^2 \cos 2\varphi \\ &D_s^2 \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \\
 &= 2\rho\sqrt{x_0^2 - x^2} \left\{ \begin{aligned} &C_s^2(x^2 - y^2) \\ &2D_s^2xy \end{aligned} \right\} \\
 \{c(p_l - p_u)_s^4\} &= \frac{2}{3} \rho\mu(1 - \mu^2)^{3/2} \\
 &\quad \times (7\mu^2 - 3) \left\{ \begin{aligned} &C_4^1 \cos \varphi \\ &D_4^1 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \\
 &= \frac{2}{3} \rho\sqrt{x_0^2 - x^2} \\
 &\quad \times (4 - 7x^2 - 7y^2) \left\{ \begin{aligned} &C_4^1x \\ &D_4^1y \end{aligned} \right\} \\
 \{c(p_l - p_u)_s^6\} &= 2\rho\mu(1 - \mu^2)^{5/2} \left\{ \begin{aligned} &C_6^3 \cos 3\varphi \\ &D_6^3 \sin 3\varphi \end{aligned} \right\} \\
 &= 2\rho\sqrt{x_0^2 - x^2} \left\{ \begin{aligned} &C_6^3x^2(x - 3y) \\ &D_6^3y(3x^2 - y^2) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

(16)

である。ここで x, y, x_0 はそれぞれ $x/R, y/R, x_0/R$

を示し、 $x_0 = \sqrt{R^2 - y^2}$ である。

第2図で $c(p_l - p_u)_n^m$ の x 軸上での分布を第3図で $s(p_l - p_u)_n^m$ の y 軸上での分布を図示した。

3. 前進飛行中のローターの荷重分布 および誘導速度の分布

(15) で与えられる圧力分布に対する揚力およびモーメントは

$$\begin{aligned}
 L_n^m &= R^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (p_l - p_u)_n^m \mu d\mu d\varphi \\
 &= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (p_l - p_u)_n^m P_1(\mu) d\mu d\varphi \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_n^m &= R^3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (p_l - p_u)_n^m \mu \sqrt{1 - \mu^2} d\mu d\varphi \\
 &= \frac{R^3}{6} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (p_l - p_u)_n^m P_2^1(\mu) d\mu d\varphi \quad (18)
 \end{aligned}$$

で与えられる。

函数 $P_n(\mu)$ の直交性および $\int_0^{2\pi} \left\{ \begin{aligned} &\sin m\varphi \\ &\cos m\varphi \end{aligned} \right\} d\varphi = 0$ か

第2図 $c(p_l - p_u)_n^m$ (x 軸上)

第3図 $s(p_l - p_u)_n^m$ (y 軸上)

ら揚力は cL_1^0 を除いて 0 で

$$\left. \begin{aligned} sL_n^m &= cL_{2n+1}^{2K+1} = 0, \\ cL_{2n+1}^{2K+1} &= 0 \quad (\lambda \neq 0), \quad cL_1^0 = 4/3 \cdot \pi \rho R^2 C_1^0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

モーメントについても, $P_n^m(\mu)$ の直交性および

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} d\varphi &= 0 \quad (m \neq 1) \text{ より} \\ M_{2, y}^1 &= \frac{4}{15} \pi \rho R^3 C_2^1, \quad M_{2, x}^1 = \frac{4}{15} \pi \rho R^3 D_2^1 \\ M_{n, y}^m &= M_{n, x}^m = 0, \quad (n \neq 2, m \neq 1) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

が得られる。なお M_x, M_y は x 軸まわり, y 軸まわりのモーメントを示している。

ここで前進飛行中のローターの荷重分布を (15) で与えられる圧力分布の数項の線型結合で近似することを考える。

前進飛行中のローターの各ブレード翼素に対する相対速度は, ブレード翼素をローター原点に関する極座標 (r, φ) で表わせば,

$$U_R = V \sin \varphi + r\Omega = R\Omega(r/R + \beta \sin \varphi) \quad (21)$$

である。ここで $\beta = V/R\Omega$ は tip-speed ratio で, $U_R = 0$ すなわち $r/R + \beta \sin \varphi = 0$ の軌跡は

$$\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \quad (22)$$

で, これは逆流領域の境界を与える式である。

ブレード翼素に対する相対速度が (21) で与えられることから予想されるように, 前進飛行時のローターの荷重分布は, 円形翼が一様平行流を受ける場合とは異なって, x 軸に関しても逆対称荷重を含み, ローターの中心, 半径 R の円周上および (22) で表わされる逆流領域の境界上は, 荷重分布の零点となっていると考えられる。さらにこのような逆対称荷重を含む荷重分布による x 軸, y 軸まわりのモーメントは, ローターにヒンジ・オフセットや遠心力による復原モーメントを考えなければ, 0 でなくてはならないので, ローターの荷重分布としては, その高調波成分を無視し

て, つぎのような線型結合を考えるのが最も簡単であろう。

$$\begin{aligned} (p_l - p_u) &= c(p_l - p_u)_1^0 + c(p_l - p_u)_3^0 \\ &\quad + s(p_l - p_u)_4^1 \end{aligned} \quad (23)$$

(23) に対する x 軸まわりのモーメントは, $p_4^1(\mu)$ の直交性 (18) から φ に無関係に 0 となつて, モーメントの平衡の条件を満足している。

(23) に含まれる未知の係数 C_3^0, D_4^1 は, 零点の分布に対する条件から

$$\left. \begin{aligned} C_1^0 &= -2/3 \cdot C_3^0 \\ \text{および} \\ D_4^1 &= \frac{15\beta}{2(4-7\beta^2 \sin^2 \varphi)} C_1^0 \doteq \frac{15}{8} \beta C_1^0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

($\beta^2 \ll 1.0$)

と求め, (23) の荷重分布は C_1^0 (これは (19) で与えられるようにローターの推力係数と考えてよい。) および β をパラメーターとして

$$\begin{aligned} \frac{(p_l - p_u)}{2\rho C_1^0} &= \mu \left[1 - \frac{1}{2} (5\mu^2 - 3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{4} \beta (1 - \mu^2)^{1/2} (7\mu^2 - 3) \sin \varphi \right] \end{aligned} \quad (25)$$

となる。

第4図で $\beta = 0, 0.2, 0.3, 0.5$ に対する y 軸上の荷重分布を図示した。

圧力分布が与えられると, ローター・ディスク面内の誘導速度の分布は, Φ_n^m のそれぞれについて

$$\begin{aligned} w_n^m(\mu, \varphi) &= \frac{1}{V} \int_{-\infty}^x \left(\frac{\partial \Phi_n^m}{\partial z} \right)_{z=0} dx \\ &= \frac{1}{V} \left[\int_{-\infty}^{-x_0} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial \Phi_n^m}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-x_0}^x \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \Phi_n^m}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} dx \right] \end{aligned} \quad (26)$$

から求められる。

(26) の積分を実行すると, (23) の右辺各項に対す

第4図 y 軸上での荷重分布

る $w_m(\mu, \varphi)^*$ は

$$\left. \begin{aligned} cw_1^0(\mu, \varphi) &= \frac{C_1^0}{V} \left[Q_1(\mu) - \frac{\pi}{2} P_1^1(\mu) \cos \varphi \right] \\ cw_3^0(\mu, \varphi) &= \frac{C_3^0}{V} \left[-Q_3(\mu) - \frac{\pi}{8} P_3^1(\mu) \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{48} P_3^3(\mu) \cos 3\varphi \right] \\ sw_4^1(\mu, \varphi) &= \frac{D_4^1}{V} \left[-Q_4(\mu) - \frac{\pi}{48} P_4^2(\mu) \sin 2\varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{384} P_4^4(\mu) \sin 4\varphi \right] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

と求まり、(25) で与えられる荷重分布に対する誘導速度の分布は

$$\begin{aligned} \frac{w(\mu, \varphi)}{C_1^0/V} &= Q_1(\mu) + \frac{3}{2} Q_3(\mu) - \frac{\pi}{2} P_1^1(\mu) \cos \varphi \\ &\quad + \frac{3}{16} \pi P_3^1(\mu) \cos \varphi + \frac{\pi}{32} P_3^3(\mu) \cos 3\varphi \\ &\quad + \frac{15}{8} \beta \left[-Q_4(\mu) - \frac{\pi}{48} P_4^2(\mu) \sin 2\varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{384} P_4^4(\mu) \sin 4\varphi \right] \end{aligned} \quad (28)$$

あるいは、 (x, y) で書いて

$$\begin{aligned} \frac{w(x, y)}{C_1^0/V} &= Q_1(y) + \frac{3}{2} Q_3(y) - \frac{\pi}{2} x \\ &\quad + \frac{9}{32} \pi x (4 - 5x^2 - 5y^2) \\ &\quad + \frac{15}{32} \pi x (x^2 - 3y^2) + \frac{15}{8} \beta \\ &\quad \times \left[-Q_4(y) - \frac{5}{16} \pi x y (6 - 7x^2 - 7y^2) \right] \end{aligned}$$

$$- \frac{35}{32} \pi x y (x^2 - y^2) \quad (28)'$$

となる。

第5図で x 軸上での誘導速度の分布、

$$\frac{w(x)}{C_1^0/V} = \frac{5}{8} \pi x \left(1 - \frac{3}{2} x^2 \right) \quad (29)$$

を、第6図で y 軸上での誘導速度の分布、

$$\frac{w(y)}{C_1^0/V} = Q_1(y) + \frac{3}{2} Q_3(y) - \frac{15}{8} \beta Q_4(y) \quad (30)$$

を、第7図で $y = \pm 0.5$ における x 軸方向の誘導速度の分布を $\beta = 0, 0.2, 0.3$ について図示した。

(23) で与えられる荷重分布 および その未知係数の決定法は、もちろんユニークなものではない。

さらに高調波を含めて近似を行なう場合には荷重分布による x 軸まわりのモーメント、 M_x を

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (p_t - p_u) \mu \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi d\mu d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} m_x(\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (31)$$

$$m_x(\varphi) = m_{x,0} + m_{x,2} \cos 2\varphi + m_{x,4} \cos 4\varphi + \dots$$

と書き、

$$m_{x,0} = m_{x,2} = m_{x,4} = \dots = m_{x,2k} = 0 \quad (32)$$

を零点の分布に対する条件に加えて、未知係数を決定する条件式に採用することが出来る。

第4図、第6図からも分かるように、 y 軸上での荷重分布と誘導速度の分布は $y = \pm 1.0$ 付近で誘導速度が $+\infty$ に発散する点を除いて、それらの零点が一致して類似した分布で与えられている。

(28) はローターの荷重分布に 逆対称荷重を考慮し

第5図 x 軸上での誘導速度の分布

第6図 y 軸上での誘導速度の分布 第7図 $y=\pm 0.5$ における x 軸方向の誘導速度の分布

た場合の、よく知られたグラワートの関係式（これは本考察では、 $cw_1^0(\mu \cdot \varphi)$ に対応するものであるが）

$$w = w_0(1 + Kr \cos \varphi)$$

w_0 : ローター原点での誘導速度。

に対する修正式を与えている。

Appendix

翼面上での荷重分布（加速度ポテンシャル）が与え

られると、翼面上での誘導速度は、

$$\begin{aligned} w_n^m(\mu \cdot \varphi) &= \frac{1}{V} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x \left(\frac{\partial \Phi_n^m}{\partial z} \right) dx \right] \\ &= \left[\frac{1}{V} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-x_0} \left(\frac{\partial \Phi_n^m}{\partial z} \right) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{-x_0}^x \left(\frac{\partial \Phi_n^m}{\partial z} \right) dx \right\} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi V} \int_{-\infty}^x \iint_S (\Phi_u)_n^m \end{aligned}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_{z'=z=0} dx' dy' dx \quad (33)$$

の積分を実行することで求められる。

(33) の $-\infty$ に対する積分は、この場合円形翼の揚力線方程式を与え

$$\int_{-x_0}^x (p_i - p_u) dx' = a_n^m(y') \quad (34)$$

とすると、(33) の第3式は

$$w_n^m(\mu, \varphi) = -\frac{1}{4\pi V \rho} \int_{-1}^1 \frac{da_n^m(y')}{dy'} \cdot \frac{dy'}{y-y'} + \int_{-x_0}^x \left(\frac{\partial \Phi_n^m}{\partial z} \right)_{z=0} dx \quad (35)$$

となる。

(34) の $a_n^m(y')$ は Φ_n^m の y 軸に関する対称性 (15) から直ちに

$$ca_{2l+1}^{2K+1}(y') = sa_{2l+1}^{2K}(y') = 0 \quad (36)$$

となり、 $ca_{2l+1}^{2K}(y')$ 、 $sa_{2l+1}^{2K+1}(y')$ については

$$\left. \begin{aligned} \cos 2K\varphi &= \cos^{2K}\varphi - \left(\frac{2K}{2} \right) \cos^{2K-2}\varphi \sin^2\varphi + \dots \\ \sin (2K+1)\varphi &= (2K+1) \sin\varphi \cos^{2K}\varphi \\ &\quad - \left(\frac{2K+1}{3} \right) \sin^3\varphi \cos^{2K-2}\varphi + \dots \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

を用いて部分積分をくりかえすと

$$\left. \begin{aligned} ca_{2l+1}^{2K}(y) &= (-1)^{l+1} \cdot 2\pi \rho C_{2l+1}^{2K} \\ &\quad \times \int_{-1}^{y'} P_{2l+1}(y) dy \\ sa_{2l+1}^{2K+1}(y) &= (-1)^l 2\pi \rho D_{2l+1}^{2K+1} \\ &\quad \times \int_{-1}^{y'} P_{2l}(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

が得られ、さらに

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(y')}{y-y'} dy' = Q_n(y) \quad (39)$$

($n=0, 1, 2, \dots$)

を用いると、 $c\Phi_n^m$ 、 $s\Phi_n^m$ に対して (35) の第1項 (これを w_I と書く。) は

$$\left. \begin{aligned} cw_{12l+1}^{2K+1}(y) &= sw_{12l+1}^{2K}(y) = 0 \\ cw_{12l+1}^{2K}(y) &= \frac{(-1)^l}{V} C_{2l+1}^{2K} Q_{2l+1}(y) \\ sw_{12l+1}^{2K+1}(y) &= \frac{(-1)^{l+1}}{V} D_{2l+1}^{2K+1} Q_{2l}(y) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

と求まる。

(35) の右辺第2項 w_{II}^m については、積分範囲を $-x_0$ で2分して

$$\begin{aligned} w_{II}^m(\mu, \varphi) &= \frac{1}{V} \left[\int_{-x_0}^{-x} \left(\frac{\partial \Phi_n^m}{\partial z} \right)_{z=0} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-x}^x \left(\frac{\partial \Phi_n^m}{\partial z} \right)_{z=0} dx \right] \\ &= \frac{1}{V} \left[\int_{-x_0}^0 \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial \Phi_n^m}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} \frac{\eta d\eta}{\sqrt{x_0^2 + \eta^2}} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \Phi_n^m}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{x_0^2 - \mu^2}} \right] \quad (41) \end{aligned}$$

の積分を実行すればよい。

文 献

- 1) COLEMAN, R. P., FEINGOLD, A. M. & STEMPIN, W. G.: Evaluation of the Induced Velocity for a Helicopter Rotor, N. A. C. A., W. R. L-126, 1945.
- 2) CASTLES, W. & DeLEEUW, J. H.: The Normal Component of the Induced Velocity in the Vicinity of a Lifting Rotor and Some Examples of the Applications, N. A. C. A., Rep. 1184, 1954.
- 3) CASTLES, W. & DURHAM, H. L.: Distribution of Normal Component of Induced Velocity in Lateral Plane of a Lifting rotor, N. A. C. A., T. N. 3841, 1956.
- 4) HEYSON, H. & KATZOFF, S.: Induced Velocity near a Lifting Rotor with Non-Uniform Disk Loading, N. A. C. A., Rep. 1319, 1957.
- 5) MANGLER, K. W. & SQUIRE, H. B.: Induced Velocity Field of a Rotor, R. & M. No. 2642, 1953.
- 6) HEYSON, H.: Equation for the Induced Velocity near a Lifting Rotor with Non-Uniform Azimuthwise Vorticity Distribution, N. A. S. A., T. N. D-394, 1960.
- 7) KINNER, W.: Die Kreisförmige Tragfläche auf Potential Theorecher Grundlage, Ing. Arch., Vol. 7, 1937.

表 紙 写 真 説 明

この写真は VTOL 機の高バリング時におけるピッチまたはロールの空気ジェット姿勢制御に関する研究を実施するために、航空宇宙技術研究所で昭和 39 年度に製作したアイアンバードである。これは同研究所におけるアイアンバード、フライング・テスト・ベッド、実験機とつながる一連の試作研究計画の第1段階にあたる。製作は三菱重工株式会社および伊藤忠航空整備株式会社が担当して昭和 40 年 3 月に完成した。同年 6 月には調整を完了し、目下実験運転中である。このアイアン・バードは、地上に固定された支基にオイル・ベアリングを介して支えられた機体が回転運動できるようになっており、機体中央上部の操縦席の操縦士が操縦桿を操作するか、または地上のアナログ・コンピューターのプログラムにより、機体先端に

取り付けられた音速空気ジェット・ノズルの開度を変えて、機体に回転モーメントを与え、機体姿勢の制御を行なうことができる。またレート・ジャイロおよびサーボアクチュエーターによって構成される安定増大装置により、機体運動の減衰を与えることができる。このアイアン・バードの要目はつぎのとおりである。

機体全長 (または全幅)	約 5 m
機体総重量 (操縦士を含む)	約 900 kg
機体慣性性能率	約 90 kgms ²
最大空気流量	約 2 kg/s
最大空気圧力	約 2 kg/cm ² ゲージ
最大空気温度	約 373~423°K
最大設計角加速度	約 2 ラジアン/s ²
最大回転角	約 ± 30 度

(滝澤直人)