柱の圧縮試験における荷重偏心と初期たわみの分離・決定について*

林 毅**, 小林 昭***

On the Determination of Load Eccentricity and Initial Deviation in the Column Compressive Tests

Tsuyoshi HAYASHI* and Akira KOBAYASHI

Abstract

The load eccentricity and the initial column deviation from straightness are quite different in nature, and they are to be determined separately for the rigorous analysis concerning the column compressive characteristics. Only the initial deviation is considered heretofore. The present work is to report the experimental determination of both quantities. In the following procedure, the experimental determination is made for the aluminum alloy bars to be found the minor magnitude of load eccentricity, say, less than 10 % of that of initial deviation in most cases.

記 号

A	断面積
a_0	初期たわみの最大値
C_1, C_2	中立軸と最遠ファイバーとの距離
e	荷重偏心
EI	柱の曲げ剛性
h	柱の断面の高さ
L	柱の長さ
n_E	P/P_E
P	作用する軸圧縮荷重
P_E	オイラー座屈荷重
w_0	初期たわみ
w_a	付加たわみ
w	全たわみ
λ	定数
ϵ	歪み
δ_0	(最大初期たわみ量)/(柱の断面の半高さ)

1. 序 論

元来、荷重偏心は通常、試験片の両端の単純支持条件を出来るだけよく保つために装着するナイフ・エッジ状キャップの出来具合や、それへの試験片端末部の、はめ込み程度に起因する。他方、試験柱の初期た

わみは試験片製作過程で入ってくる。両者は性質上全く別個のものであって試験ごとに、また、試験片ごとに異なるであろう。精密な柱の圧縮特性を調べるためには、これらの量を別々に分離し決定することが必要となる。何故ならば、与えられた試験機では試験片装着後の特性はこれらの量によってほとんど支配されるからである。これまでは荷重偏心の量は無視して初期たわみのみを取り上げて実験的に決定しているが¹⁾、本研究は荷重偏心と初期たわみの両者を実験的に決定する一つの方法の提案である。

荷重がオイラー荷重に近づく、柱のたわみ特性は正弦波状に近づくので、ここでは実験によるたわみおよび歪みの測定値を整理する一つの簡単化として、たわみ形を正弦半波項で近似した。また、荷重偏心の量は一定とし、ダイヤル・ゲージおよび歪みゲージによる測定値を用いて決定する方法を考察した。

2. 解析理論

2.1. 簡単化した解析理論 簡単化するためにつきの仮定をおく。(第1図)

- (1) 柱の断面は一様で両端で単純支持される。
- (2) 柱は同一側に等しい量の荷重偏心を有し、この量は荷重に無関係とする。これを相当荷重偏心量 e とあらわす。
- (3) 柱の初期たわみは正弦半波とする*。

$$w_0 = a_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (1)$$

軸荷重 P をうける柱の横たわみ $w(x)$ は、

$$EI(w'' - w_0'') = -P(w + e) \quad (2)$$

となり、これを両端での境界条件

第1図 偏心荷重をうける初期たわみを有する柱

* 昭和 41 年 7 月 8 日原稿受理
** 東京大学工学部航空学科
*** 東京大学宇宙航空研究所材料部

* 付録 1. 参照のこと。

$$x=0 \text{ および } x=L \text{ で } w=0 \text{ および } w''=-P_e/EI \quad (3)$$

の下で解くと,

$$w(x) = \frac{a_0}{1-n_E} \sin \frac{\pi x}{L} + eF(x) \quad (4)$$

を得る. ここに,

$$\left. \begin{aligned} P_E &= \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \text{オイラー座屈荷重} \\ F(x) &= \frac{\cos \left[\lambda L \left(1 - \left(\frac{2x}{L} \right) \right) \right]}{\cos \lambda L} - 1 \\ \lambda &= \frac{\pi}{2L} \sqrt{n_E} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

である.

荷重 P による付加たわみ $w_a(x)$ は,

$$w_a(x) = w(x) - w_0(x) = a_0 \frac{n_E}{1-n_E} \sin \frac{\pi x}{L} + eF(x) \quad (6)$$

と表わされる. (6) 式は付加たわみ w_a を種々の荷重値 P で測定すれば原理的には a_0 と e が分離・決定されることを示している. 例えば $x=L/2$ をとると,

$$w_a\left(\frac{L}{2}\right) = k_1 a_0 + k_2 e \quad (7)$$

となる. ただし

$$k_1 = \frac{n_E}{1-n_E}, \quad k_2 = \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{n_E} \right) - 1 \quad (8)$$

である. ゆえに $w_{ai}(L/2)$ をいろいろな荷重値 P_i で測定すれば最小二乗法によって

$$\sum_{i=1}^n \left[k_1(P_i) \cdot a_0 + k_2(P_i) \cdot e - w_{ai}\left(\frac{L}{2}\right) \right]^2 = \min. \quad (9)$$

から a_0 と e が決定出来る²⁾. しかし, 差 $(k_2 - k_1)$ が n_E が増加してもそれほど大きくならないために, P と w_a の測定精度を高めないと, a_0 と e を実験で精度よく求めることが出来ない.

第1表 k_1, k_2 と n_E

n_E	k_1	k_2
0	0	0
0.25	0.333	0.414
0.50	1.000	1.260
0.75	3.000	3.810
1.00	∞	∞

柱の表面での歪みについては, x 断面の凸側に生ずる圧縮歪みを ε_1 , 凹側のそれを ε_2 とすると,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{P}{EA} - \frac{PC_1}{EI} (k_3 a_0 + k_4 e) \\ \varepsilon_2 &= \frac{P}{EA} + \frac{PC_2}{EI} (k_3 a_0 + k_4 e) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

第2図 柱表面に生ずる歪

となる. ここに,

$$k_3 = \frac{1}{1-n_E} \sin \frac{\pi x}{L} \text{ および } k_4 = F(x) + 1 \quad (11)$$

である²⁾. 歪みについても, ε_1 および ε_2 を種々の荷重 P で測定すれば原理的には a_0 と e が求められることになる.

再び $x=L/2$ を測定個所にとると,

$$k_3 = \frac{1}{1-n_E} \text{ および } k_4 = \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{n_E} \right) \quad (12)$$

となるから, (10) 式は,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\pi^2 I}{AL^2 n_E} - \frac{\pi^2 C_1 h}{L^2} n_E \left[\frac{a_0/h}{1-n_E} + \frac{e}{h} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{n_E} \right) \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{\pi^2 I}{AL^2 n_E} + \frac{\pi^2 C_2 h}{L^2} n_E \left[\frac{a_0/h}{1-n_E} + \frac{e}{h} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{n_E} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となり, さらに書き直すと,

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{h} + \frac{e}{h} (1-n_E) \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{n_E} \right) \\ &= \frac{L^2}{\pi^2 h^2 n_E} (1-n_E) (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (14)$$

を得る. したがって (14) 式において種々の荷重 P で測定した歪み ε_1 および ε_2 から, a_0 と e を最小二乗法により決定出来る.

2.2. 一般的な解析理論 一般的な場合として第3図に示されるような, 荷重偏心量は柱の両端でそれぞれ異なっている場合を考える. ただし荷重に対しては

第3図 一般的な偏心荷重をうける初期たわみを有する柱

無関係に一定とする。

柱の初期たわみは、

$$w_0 = \sum_{n=1}^m a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (15)$$

x における荷重偏心は、

$$e(x) = e_1 + \frac{e_2 - e_1}{L} x \quad (16)$$

で与えられる。前述と同様に

$$EI(w'' - w_0'') = -P(w + e) \quad (17)$$

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} x=0: w=0 \text{ および } w'' &= -\frac{Pe_1}{EI} \\ x=L: w=0 \text{ および } w'' &= -\frac{Pe_2}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

付加たわみ w_a は (17) 式を (18) 式の下で解くことにより、

$$\begin{aligned} w_a(x) &= w(x) - w_0(x) \\ &= \left(\frac{e_2}{\sin 2\lambda L} - e_1 \cot 2\lambda L \right) \sin 2\lambda x \\ &\quad + e_1 \cos 2\lambda x - \left(e_1 + \frac{e_2 - e_1}{L} x \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^m a_n \frac{P/P_{En}}{1 - \frac{P}{P_{En}}} \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、

$$P_{En} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} = n^2 P_E, \quad \lambda L = \frac{\pi}{2} \sqrt{n_E} \quad (20)$$

今、 $x=L/2$ では付加たわみ $w_a(L/2)$ は、

$$\begin{aligned} w_a(L/2) &= e_1 \left(\cos \lambda L - \cot 2\lambda L \sin \lambda L - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + e_2 \left(\frac{\sin \lambda L}{\sin 2\lambda L} - \frac{1}{2} \right) + a_1 \frac{n_E}{1 - n_E} \\ &\quad - a_3 \frac{n_E}{9 - n_E} + a_5 \frac{n_E}{25 - n_E} + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

となる。同様に他の点での $w_a(x)$ も測定出来るから、各荷重に対するこれらの $w_a(x)$ の同時測定によって、 $e_1, e_2, a_1, a_2, a_3, \dots$ を決定することが出来る。さらに歪みについても同様に扱える。もちろん歪みとたわみの測定値を併用することも出来る。

3. 実験による決定

実験による決定においては、前述の2.1による初期たわみ a_0 および相当荷重偏心 e を求めることとし、さらに最小二乗法による際の測定諸量の精度の問題および、たわみを正弦半波1項のみで近似していることを考慮して、(7)式および(14)式を用い、 n_E が1に近い荷重状態で柱の中央点で w_a および e_1, e_2 を測定して a_0 と e を決定した。実験に当たっては、dead-weight 利用の lever 式軸圧縮装置を用い、たわみは

ダイヤル・ゲージにより、また、試片中央での凹凸両側の歪みの差は、抵抗線歪みゲージにより測定を行なった。荷重は $n_E \approx 0.9$ とし、試験片にはアルミニウム合金棒 (7075-T6 28本, 2024-T4 13本) を用いた。

その結果は(7)式および(14)式により第2表、第3表のように求められるが、大体において相当荷重偏心量 e は初期たわみ a_0 のただか 10% 程度といえてよく、これまで省略されて来たことは妥当といえよう。しかしながら、初期たわみと荷重偏心は本来、別のものであるから、これらの分離・決定は柱の軸圧縮試験や弾性不安定問題を論ずる際には考慮されなければ

第2表 a_0 と e の値 (7075-T6)

No.	$\epsilon_2 - \epsilon_1$	$w_a\left(\frac{L}{2}\right)$ (mm)	a_0 (mm)	e (mm)	δ_0	
1	2.418×10^{-8}	1.09	0.1120	0.00446	0.0319	$n_E = 0.903$ $P = 590 \text{ kg}$ $L = 177 \text{ mm}$ $h = 7 \text{ mm}$
2	360	0.17	0.0070	0.00850	0.0020	
3	964	0.44	0.0378	0.00737	0.0108	
4	1,840	0.84	0.0825	0.00582	0.0236	
5	3,660	1.66	0.1690	0.00737	0.0483	
6	2,290	1.04	0.1050	0.00524	0.0300	
7	1,188	0.54	0.0452	0.01018	0.0129	
8	2,555	1.16	0.1177	0.00524	0.0336	
101	2,505	1.18	0.1308	0.00259	0.0384	$n_E = 0.898$ $P = 530 \text{ kg}$ $L = 177 \text{ mm}$ $h = 6.8 \text{ mm}$
102	2,140	1.01	0.1130	0.00120	0.0332	
103	1,818	0.86	0.0942	0.00239	0.0277	
104	1,610	0.76	0.0748	0.00915	0.0220	
105	1,274	0.60	0.0575	0.00868	0.0169	
106	3,600	1.70	0.1870	0.00458	0.0550	
107	1,091	0.52	0.0486	0.00812	0.0143	
108	820	0.39	0.0334	0.00860	0.0098	
109	1,111	0.53	0.0486	0.00891	0.0143	
110	2,663	1.26	0.1348	0.00637	0.0396	
111	1,252	0.59	0.0551	0.00975	0.0162	
112	1,472	0.69	0.0700	0.00716	0.0206	
113	454	0.22	0.0140	0.00847	0.0041	
114	618	0.29	0.0326	0.00032	0.0096	
115	1,430	0.67	0.0721	0.00358	0.0212	
116	1,682	0.79	0.0823	0.00633	0.0242	
117	1,333	0.65	0.0653	0.00712	0.0192	
118	1,591	0.75	0.0823	0.00231	0.0242	
119	1,615	0.76	0.0785	0.00645	0.0231	
120	1,660	0.78	0.0790	0.00785	0.0232	

第3表 a_0 と e の値 (2024-T4)

No.	$\epsilon_2 - \epsilon_1$	$w_a\left(\frac{L}{2}\right)$ (mm)	a_0 (mm)	e (mm)	δ_0	
51	724×10^{-8}	0.33	0.0343	0.00444	0.0099	$n_E = 0.891$ $P = 590 \text{ kg}$ $L = 177 \text{ mm}$ $h = 7 \text{ mm}$
52	264	0.12	0.0143	0.00027	0.0041	
53	501	0.23	0.0209	0.00550	0.0060	
54	1160	0.52	0.0621	0.00169	0.0178	
55	201	0.09	0.0047	0.00517	0.0013	
56	1370	0.62	0.0728	0.00244	0.0208	
57	1382	0.62	0.0545	0.01760	0.0156	
58	592	0.27	0.0183	0.01150	0.0052	
59	1910	0.86	0.0725	0.02660	0.0207	
60	1540	0.70	0.0811	0.00324	0.0232	
61	1540	0.69	0.0680	0.01370	0.0195	
62	422	0.19	0.0167	0.00533	0.0048	
63	2030	0.91	0.0833	0.02310	0.0238	

ばならない。

この実験決定において、たわみ曲線を正弦半波1項で近似している点は n_E を1に近くとることで正当化しており*、試片として用いた矩形中実断面アルミニウム合金棒の両端に装着された SK-2 工具鋼製ナイフ・エッジ・キャップ (長さ 8.5 mm) による影響は後述のように無視出来る**。

試料として用いたアルミニウム合金棒の寸法等はつぎのとおりである。

7075-T6 NOS. 1~8

160 mm × 10 mm × 7 mm $E = 7,280 \text{ kg/mm}^2$

NOS. 101~120

160 mm × 9.8 mm × 6.8 mm $E = 7,275 \text{ kg/mm}^2$

2024-T4 NOS. 51~63

160 mm × 10 mm × 7 mm $E = 7,350 \text{ kg/mm}^2$

4. 結 論

柱の初期たわみ量と荷重偏心量を実験的に分離・決定する方法を導いた。実験結果は大多数の場合が荷重偏心量が小さく、初期たわみ量の 10% 程度以内におさまっていることを示している。これらから本方法が十分実用性を有することが確認出来た。

なお、この研究では主として理論解析は林が当たり、実験の企画および実施、実験結果の解析ならびに検討は小林が担当した。

5. 謝 辞

試験片の入念な製作にあたられた東大航空学科工作室野村静技官、試験片素材の提供にあずかった三菱重工業 (株) および古河電気工業 (株) に対し深甚なる謝意を表するものである。

参考文献

- 1) PATEL, S. A., BLOOM, M., ERICKSON, B., CHWICK, A. and HOFF, N. J.: "Development of Equipment and of Experimental Techniques for Column Creep Tests", NACA TN 3493 (Sept. 1955).
- 2) 林 毅, 小林 昭: "柱の初期たわみと荷重偏心の実験的決定法に関する研究 (英文)" 航空機 構造強度 及 振動研究委員会 (CAS) 研究報告 No. 8 (1964).
- 3) 長住研究委員会: 「弾性安定要覧」 p. 26, コロナ社 (1951).
- 4) KÁRMÁN, T. v. and BLOT, M. A.: "Mathematical Methods in Engineering", Chapter 7, Problem 11, McGraw-Hill (1940).
- 5) 長住研究委員会: 「弾性安定要覧」 p. 86, コロナ社 (1951).

* 付録 1. 参照のこと。

** 付録 2. 参照のこと。

付 録 1

偏心が無く、初期たわみを有する両端単純支持の柱が軸圧縮をうけると、初期たわみを、

第4図 初期たわみを有する柱の圧縮軸荷重によるたわみ

$$w_0 = \sum_{k=1}^n b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \quad (1A)$$

とすると、中心圧縮荷重 P によるたわみ w は、

$$EI(w'' - w_0'') = -Pw \quad (2A)$$

$$\text{境界条件: } x=0 \text{ および } x=L: w=w''=0 \quad (3A)$$

より、

$$w = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2 - n_E} b_k \sin \frac{k\pi x}{L} = \frac{b_1}{1 - n_E} \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{4b_2}{4 - n_E} \sin \frac{2\pi x}{L} + \frac{9b_3}{9 - n_E} \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \quad (4A)$$

また、付加たわみは、

$$w_a = w - w_0 = \frac{n_E b_1}{1 - n_E} \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{n_E b_2}{4 - n_E} \sin \frac{2\pi x}{L} + \frac{n_E b_3}{9 - n_E} \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \quad (5A)$$

とあらわされる。 n_E が1に近い場合には、たわみ w 、付加たわみ w_a は (4A), (5A) の初項が他項に優越してくる³⁾、

付 録 2

端部の単純支持条件を出来る限り忠実に保つために、試片の両端に鋼製ナイフ・エッジ・キャップを装着したが、このために生ずる座屈荷重への影響を検討する⁴⁾⁵⁾。

第5図 ナイフ・エッジ・キャップによる座屈長の修正

柱は初期たわみも荷重偏心も無いとし、キャップの断面寸法は試験柱断面寸法に比べて大きくとってあるので、曲げ剛性は非常に大で、座屈たわみ形でのこの部分 OA, CD は直径と考えてよい。すなわち、剛体としてよい。

今、 $a \leq x \leq L/2$ では、

$$EIy'' + Py = 0 \quad (1B)$$

$$\text{境界条件: } y(a) = a\theta, \quad y'(L/2) = 0 \quad (2B)$$

また、 $x = a$ では、

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{a} \quad (3B)$$

であり、(1B), (2B) および (3B) より

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= A \sin \lambda x + B \cos \lambda x \\ \lambda^2 &= \frac{P}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (4B)$$

が得られ、(4B) を (2B), (3B) に代入して θ を消去すると、座屈条件式

$$\cot \frac{\lambda}{2} (L - 2a) = a\lambda \quad (5B)$$

さらに、

$$\tan \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda L}{2} \left(1 - \frac{2a}{L} \right) \right] = \frac{\lambda L}{2} \frac{2a}{L} \quad (6B)$$

便宜上、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda L}{2} &= \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \xi \\ \frac{2a}{L} &= \eta \end{aligned} \right\} \quad (7B)$$

とすれば (6B) は

$$\tan \left[\frac{\pi}{2} - \xi(1 - \eta) \right] = \xi\eta \quad (8B)$$

となる。

$\xi = \pi/2 + \epsilon$ とし、 ϵ および η はともに微小として (8B) を展開し、第1近似をとると、

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \left[1 + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{2a}{L} \right)^2 \right] \quad (9B)$$

を座屈荷重として得る。括弧内第2項がキャップの影響を示すが、本実験では $a = 8.5 \text{ mm}$, $L = 177 \text{ mm}$ であり、

$$\frac{\pi^2}{6} \left(\frac{2a}{L} \right)^2 = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{17}{177} \right)^2 = 1.46 \times 10^{-3}$$

となって $L = 177 \text{ mm}$ 全長にわたって一様な EI を有するとしたときの座屈荷重に与えるキャップの影響は 0.15% であって無視出来ることが分かる。