技 術 論 文

ファイバーで補強された平板の弾性特性について*

林 毅**・小山一夫**・近藤恭平**

On the Elastic Properties of a Fiber-Reinforced Plate

Tsuyoshi HAYASHI, Kazuo KOYAMA and Kyohei KONDO

Abstract

The stresses in a fiber-reinforced plate produced by mechanical interaction between the fiber and the matrix are studied theoretically and experimentally. The plate bent transversely is represented by a fiber-reinforced beam, and the bending stresses caused by external bending moment or differential shrinkage are analyzed. The plate stressed two-dimensionally is represented by an infinite plate in a condition of the plane-stress in which a pair of fibers is embedded, and we analyze the stresses resulted from differential shrinkage or external compressive load regarding the fibers as a non-homogeneous elliptic inclusion.

All the analytical results are compared with photoelastic observations on rectangular epoxy plates reinforced by steel wires. The differential shrinkage is produced by curing the resin in high temperature. The requirements for model-prototype similarity are discussed.

1. 序 論

高い強度を得るためには、glass fiber や whisker material などの材料が示す非常に高い強度を効果的に利用するのが得策であるが、近年、航空宇宙工学の分野で広く用いられるようになった FRP (Fiber-Reinforced Plastic) は、それらの材料を樹脂によって結合したものである。

FRP は、ファイバーと樹脂とからなる複合材料であるから、つぎのような FRP 特有の干渉応力を発生する。

- (i) 樹脂の curing による収縮が原因で生ずる残留応力
- (ii) 均一温度変化を受けたとき、樹脂およびファイバーの熱膨脹係数の差異によって発生する熱応力

- (iii) 外力を受けるとき、樹脂およびファイバーの弾性係数の差異によって生ずる応力

本論文では、ファイバーで補強された平板について、これらの干渉応力の理論解析および光弾性実験を行なったが、(ii) の熱応力は (i) の収縮応力と本質的に同じであるので、(i) のみを考慮した。

FRP の干渉応力の理論解析としては、ファイバーが1本挿入されている平板^{1,2,8)}または円筒⁴⁾が引っ張り荷重を受けるときの解析がある。本論文では、外モーメントによる曲げおよび収縮による曲げについては梁理論を用い、曲げを伴わない収縮および外力による圧縮については、ファイバーを楕円 inclusion とみなして、既に発表されている解⁵⁾を応用した。

FRP の光弾性実験としては、平板が引っ張りを受けるときの応力分布を、直交異方性板とみなして解析する巨視的な方法⁶⁾および偏光顕微鏡による微視的な方法⁷⁾によって、実物について調べたものがある。また、干渉応力を単純化した模型について研究したものとしては、ファイバーの長さ方向に直角な断面における収縮応力の測定実験^{8,9,10,26)}およびファイバーの長さ方向の引っ張りについての実験^{8,11)}などがある。一方、外力による曲げについては鉄筋コンクリート梁の模型としての実験^{12,13,25,27)}が行なわれている。ここでは、FRP 板の単純化した模型として、鋼線が挿入されたエポキシ樹脂板を作り、光弾性実験によって干渉応力を測定し、理論解析の結果と比較検討した。

2. 記 号

- X = ファイバーの長さの中央を原点とする長さ方向の座標
- Y = ファイバーの中心線を原点とする長さ方向に直角な平板面内の座標
- Z = 梁の中立軸を原点とする梁面内の座標
- L = 梁の上縁を原点とする下向きの座標
- ξ, η = XY 面内の楕円座標

* 昭和 40 年 10 月 29 日 構造・強度に関する講演会において発表。昭和 41 年 9 月 20 日原稿受理

** 東京大学工学部

$\epsilon_{XR}, \epsilon_{XF}$ = 樹脂およびファイバーの歪みのX成分

ϵ_{XI} = 樹脂とファイバーとからなる楕円 inclusion の歪みのX成分

Ω_{xi} = 樹脂とファイバーとからなる楕円 inclusion の自由な歪みのX成分

ϵ_{xi} = 弾性係数が樹脂と等しいような仮想の楕円 inclusion の自由な歪みのX成分

θ_R, θ_F = 樹脂およびファイバーの応力によらない歪み

R_X = 梁の X 方向の曲率半径

$\sigma_{XR}, \sigma_{YR}, \tau_{XYR}$ = 樹脂の応力の X, Y および XY 成分

$\sigma_{XR-U}, \sigma_{XR-L}$ = 梁の上縁および下縁における樹脂の応力の X 成分

σ_{XF} = ファイバーの応力の X 成分

$\bar{\sigma}_{XF}$ = ファイバーの応力の X 成分の平均値

M = 外モーメント

σ_X^A = 無限板に無限遠方で加えられる応力の X 成分

E_R, E_F = 樹脂およびファイバーのヤング率

E_I = 楕円 inclusion のヤング率

Δ_M = 外モーメントを受けた梁の上縁から中立軸までの距離

Δ_S = 収縮による曲げを受けた梁の上縁から中立軸までの距離

H, B = 梁の高さおよび厚さ

H_F = 梁の上縁からファイバーの図心までの距離

$A=BH$ = 梁の断面積

A_F = 全ファイバーの断面積

$A_I=2\beta B$ = 樹脂とファイバーとからなる楕円 inclusion の中央における断面積

$2\alpha, 2\beta$ = ファイバーの長さおよび太さ

$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$

I, I_F = 梁およびファイバーの断面 2 次モーメント

$e = E_F/E_R$

$e_I = E_I/E_R$

$h = H_F/H$

$a = A_F/A$

$a_I = A_F/A_I$

$i = I_F/I$

$j = -\frac{\alpha(2\alpha+\beta)}{2(\alpha+\beta)^2}$

$k = \frac{\beta(3\alpha+2\beta)}{2(\alpha+\beta)^2}$

$p = \frac{2(\alpha+\beta)^2 e_I e a_I}{\{2(\alpha+\beta)^2 + (e_I - 1)\beta(3\alpha+2\beta)\} \{1 + a_I(e - 1)\}}$

第1図 ファイバーが挿入されている梁

第2図 ファイバーが挿入されている無限板

$$q = -\frac{2(\alpha+\beta)^2(e_I-1)}{2(\alpha+\beta)^2 + (e_I-1)\beta(3\alpha+2\beta)}$$

α_R, α_F = 樹脂およびファイバーの線膨脹係数

T = 温度

3. 理論解析

ファイバーで補強された平板の板厚断面のモデルとして、第1図のようなファイバーが長さ方向に挿入された梁を考え、外モーメントによる曲げおよび樹脂の収縮による曲げを梁理論によって解析した。つぎに、面内荷重がかかっているときのモデルとして、第2図のような有限長さのファイバーが挿入されている無限板を考え、樹脂の収縮による応力およびファイバーの長さ方向の圧縮による応力分布を、2次元楕円 inclusion の解³⁾を応用して解析した。

すなわち、これらのモデルにおける応力分布は明らかに3次元であるが、モデルの板厚方向の歪み分布は均一であると仮定し、2次元問題とみなして解析したわけである。

3-1. 外モーメントによる梁の曲げ 梁の寸法および座標軸を第1図のようにとり、曲げモーメント M が加わったときの解を求める。歪み ϵ_x の Z 軸方向の分布が線形であると仮定すると、樹脂およびファイ

バーの応力は,

$$\sigma_{XR} = E_R \frac{Z}{R_X}, \quad \sigma_{XF} = E_F \frac{Z}{R_X} \quad (1)$$

となる。X軸方向の合応力が零である条件から、つぎのように上縁から中立軸までの距離 Δ_M が求まる。

$$\frac{\Delta_M}{H} = \frac{1+2(e-1)ah}{2\{1+(e-1)a\}} \quad (2)$$

また、(1) 式の応力が外モーメントと釣り合っている条件より、樹脂の応力およびファイバーの平均応力とモーメントとの関係が求まる。

$$\frac{\sigma_{XR}}{6M/(AH)} = \frac{2\{1+(e-1)a\}}{1+4a(e-1)(3h^2-3h+1)+144(e-1)i\{1+(e-1)a\}} \cdot \frac{Z}{H} \quad (3)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{XF}}{6M/(AH)} = \frac{e(1-2h)}{1+4a(e-1)(3h^2-3h+1)+144(e-1)i\{1+(e-1)a\}} \quad (4)$$

3-2. 収縮による梁の曲げ 第1図のような梁においてファイバーが偏って挿入されている場合は、樹脂が収縮すると曲げ変形が生ずる。樹脂およびファイバーの化学変化などによって生ずる、応力によらない歪みを θ_R, θ_F とすると、応力と歪みの関係は、

$$\epsilon_{XR} = \frac{\sigma_{XR}}{E_R} + \theta_R, \quad \epsilon_{XF} = \frac{\sigma_{XF}}{E_F} + \theta_F \quad (5)$$

となる。歪み ϵ_X の Z 軸方向の分布が線形であると仮定すると、合応力および合モーメントが零である条件より、中立軸の位置 Δ_S は、

$$\frac{\Delta_S}{H} = \frac{2-3h+72(e-1)i}{3(1-2h)} \quad (6)$$

となり、樹脂の応力およびファイバーの平均応力と収縮の大きさとの関係は、

$$\frac{\sigma_{XR}}{E_R(\theta_F - \theta_R)} = \frac{6ae(1-2h)}{1+4a(e-1)(3h^2-3h+1)+144(e-1)i\{1+(e-1)a\}} \cdot \frac{Z}{H} \quad (7)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{XF}}{E_F(\theta_F - \theta_R)} = -\frac{1-4a(3h^2-3h+1)+144(e-1)i(1-a)}{1+4a(e-1)(3h^2-3h+1)+144(e-1)i\{1+(e-1)a\}} \quad (8)$$

となる。また、収縮の大きさと曲率半径との関係はつぎのように求められる。

$$\theta_F - \theta_R = \frac{1+4a(e-1)(3h^2-3h+1)+144(e-1)i\{1+(e-1)a\}}{6ae(1-2h)} \cdot \frac{H}{R_X} \quad (9)$$

3-3. 収縮による無限板の応力 第2図のような円形断面をもつファイバーが挿入された無限板において、樹脂が収縮したときの応力分布を求める。このとき、図において点線で示したようなファイバーと樹脂とからなる長軸が 2α 、短軸が 2β 、厚さが B の楕円 inclusion が無限板の matrix の中に挿入されているとして解析する。

楕円 inclusion が無限板中にある問題に対しては ESHLEBY の point-force 法^{14,15)} を 2 次元問題に応用し、GOURSAT の応力関数を用いて求めた解⁹⁾がある。ここでは、 α が β に比べ非常に大きいことを考慮し、

楕円 inclusion の matrix への影響は主に X 軸方向であると仮定して解を求める。

(1) inclusion の弾性係数 第2図の点線で示した inclusion は明らかに異方性であるが、ファイバーは主に X 軸方向に影響を与えると考えるので、X 軸方向の弾性係数のみを考慮する。ファイバーと樹脂とが同一の歪みを生じるとして求めた inclusion の見かけの弾性係数は、

$$E_I = E_R \{1 + a_I(e-1)\} \quad (10)$$

となる。これは、いわゆる “law of mixture”^{16,17)} である。

(2) inclusion の自由な歪み 周囲に matrix が無いと仮定したときの θ_R, θ_F による inclusion の自由な歪みは、樹脂およびファイバーの歪みが同一であると仮定して求めることができる。ところが、matrix も歪み θ_R を生じているので、相対的な自由な歪みはつぎようになる。

$$\Omega_{XI} = \frac{ea_I}{1+a_I(e-1)} \cdot (\theta_F - \theta_R) \quad (11)$$

(3) $E_I = E_R$ である仮定の inclusion の解 matrix と同じ弾性係数を持つ仮定の inclusion が均一な自由な歪み ϵ_{XI} を生じたときの matrix の応力成分を、

$$X + iY = \gamma \cosh(\xi + i\eta) \quad (12)$$

である楕円座標 (ξ, η) で表わすようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{XR} &= f(\xi, \eta) E_R \epsilon_{XI} \\ \sigma_{YR} &= g(\xi, \eta) E_R \epsilon_{XI} \\ \tau_{XYR} &= t(\xi, \eta) E_R \epsilon_{XI} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、 $f(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta)$, $t(\xi, \eta)$ は、

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= \frac{\alpha\beta}{4\gamma^2} \left\{ \frac{2(3\alpha^2 - \beta^2)}{\gamma^2} \right. \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \right) \\ &\quad - \frac{\sinh 4\xi \cos 4\eta - 2 \sinh 2\xi \cos 2\eta}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^3} \\ &\quad \left. + \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{\gamma^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(\xi, \eta) &= \frac{\alpha\beta}{4\gamma^2} \left\{ -\frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{\gamma^2} \right. \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{\sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \right) \\
 &\quad + \frac{\sinh 4\xi \cos 4\eta - 2 \sinh 2\xi \cos 2\eta}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^3} \\
 &\quad - \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{\gamma^2} \\
 &\quad \times \frac{\sinh 2\xi (\cosh 2\xi \cos 2\eta - 1 - \sin^2 2\eta)}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^3} \Big\} \\
 t(\xi, \eta) &= \frac{\alpha\beta}{4\gamma^2} \left\{ -\frac{4\alpha^2}{\gamma^2} \frac{\sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \right. \\
 &\quad - \frac{\cosh 4\xi \sin 4\eta - 2 \cosh 2\xi \sin 2\eta}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^3} \\
 &\quad + \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{\gamma^2} \\
 &\quad \times \frac{\sin 2\eta (\cosh 2\xi \cos 2\eta - 1 + \sinh^2 2\xi)}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^3} \Big\}
 \end{aligned} \quad (14)$$

である。これは第1象限の値であり、他の象限の値は、対称性から求めることができる。matrix のポアソン比は簡単のために零とした。

一方、inclusion 内の応力および歪みは均一となり、 X 成分はつぎのように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{XI} &= jE_R \epsilon_{XI} \\ \epsilon_{XI} &= k \epsilon_{XI} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(4) 実際の inclusion の解 第2図のようなファイバーを含む実際の inclusion と等価な $E_I = E_R$ である仮想の inclusion を考える。すなわち、実際の inclusion と ϵ_{XI} が等しく、したがって、matrix に対する影響が同一で、かつ σ_{XI} も等しいような仮想の inclusion の ϵ_{XI} を決定する。この2つの条件を式で表わすと、

$$E_R(\epsilon_{XI} - \epsilon_{XI}^0) = E_I(\epsilon_{XI} - \Omega_{XI}^0) \quad (16)$$

となり、これに (11), (15) 式を代入するとつぎのようになる。

$$\epsilon_{XI}^0 = p(\Theta_F - \Theta_R) \quad (17)$$

したがって、これを (13), (15) 式に代入すると、応力分布と収縮の大きさとの関係が求まる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{XR}}{E_R(\Theta_F - \Theta_R)} &= f(\xi, \eta)p \\ \frac{\sigma_{YR}}{E_R(\Theta_F - \Theta_R)} &= g(\xi, \eta)p \\ \frac{\tau_{XYR}}{E_R(\Theta_F - \Theta_R)} &= t(\xi, \eta)p \\ \frac{\sigma_{XI}}{E_R(\Theta_F - \Theta_R)} &= jp \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

3-4. 圧縮による無限板の応力 第2図のような無

限板を、ファイバーの長さ方向に圧縮する場合について考える。同様の問題を別の方法で解析した例^{1,2,3,4}があるが、ここでは前項の解を利用する。

matrix および inclusion を別々に切り離して考えると、おのおのが均一な応力 σ_X^A を示すときの歪みは、

$$\epsilon_{XR} = \frac{\sigma_X^A}{E_R}, \quad \epsilon_{XI} = \frac{\sigma_X^A}{E_I} \quad (19)$$

となる。したがって、前項の解において inclusion の相対的な自由歪み Ω_{XI}^0 を、

$$\Omega_{XI}^0 = \epsilon_{XI} - \epsilon_{XR} = -\frac{\sigma_X^A}{E_R} \frac{e_I - 1}{e_I} \quad (20)$$

とすると、均一な応力 σ_X^A に対する inclusion の存在による乱れが求まる。

結局、求める応力分布はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{XR}}{\sigma_X^A} &= 1 + f(\xi, \eta)q \\ \frac{\sigma_{YR}}{\sigma_X^A} &= g(\xi, \eta)q \\ \frac{\tau_{XYR}}{\sigma_X^A} &= t(\xi, \eta)q \\ \frac{\sigma_{XI}}{\sigma_X^A} &= 1 + jq \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

4. 実験

エポキシ樹脂の中に鋼線を2本挿入した第3図のような A, B, C の3種の試験片を作製し、光弾性実験によって樹脂中の応力分布を測定した。エポキシ樹脂はプレポリマーとしてシェル社のエビコート 815、硬化材としてトリエチレントトラアミン (TTA) を用いて作った。樹脂の組成、ヤング率、応力感度、鋼線のヤング率および試験片の加熱 curing の有無は第1表

第3図 試験片寸法

第1表 試験片の特性

試 験 片	樹		脂		鋼 線	加熱 curing の有無
	組 成 (重量比)		ヤング 率 (kg/mm ²)	応力 感 度 (mm/kg)	ヤング 率 (kg/mm ²)	
	EPIKOTE 815	TTA				
A—I	100	10.0	336	0.58	20,650	無
A—II	100	7.5	307	0.63	20,650	有
B—I	100	7.5	328	0.54	20,650	無
B—II	100	7.5	292	0.60	20,650	有
C—I	100	7.5	328	0.54	20,650	無
C—II	100	7.5	292	0.60	20,650	有

 (at 25°C, $\lambda=5461\text{\AA}$)

に示したとおりである。加熱 curing は 125°C で 1 時間行った。

4-1. 外モーメントによる梁の曲げ C-II 試験片を除く全ての試験片について、4 点曲げ試験を行なったが、第 4 図および第 5 図がそのときの光弾性写真

第 4 図 外モーメントによる梁の曲げ
(A-I 試験片: $M=3,190\text{ mm}\cdot\text{kg}$)

第 5 図 外モーメントによる梁の曲げ
(B-I 試験片: $M=1,715\text{ mm}\cdot\text{kg}$)

である。これらの縞から中央の Z 軸に沿う応力 σ_{XR} の分布を求めた。

A-I 試験片の結果をグラフにしたのが第 6 図であり、理論値は (2) 式および (3) 式から求めたものである。また、同図にはファイバーがないと仮想したときの応力分布も示してある。初期応力があるときはその影響を除去したが、いずれの試験片においても応力はほぼ直線分布を示した。

第 6 図 外モーメントによる梁の曲げ応力分布
(A-I 試験片)

第 2 表は、各試験片の中立軸の位置 Δ_M 、上縁および下縁における応力 $\sigma_{XR.U}$ 、 $\sigma_{XR.L}$ の実験値を、(2) 式および (3) 式による理論値と比較して示したものである。

4-2. 収縮による梁の曲げ 鋼線が偏って挿入されている A-II および B-II 試験片の、加熱 curing で生じた収縮による光弾性縞が第 7 図および第 8 図である。これらの縞から求めた中央の Z 軸に沿う応力 σ_{XR} の分布は、A-II 試験片の場合は第 9 図のようになる。理論値は (7) 式から求めたものである。実験値のグ

第2表 外モーメントによる梁の曲げ試験結果

試験片	中立軸 $\Delta M/H$		上縁応力 $\frac{\sigma_{XR-U}}{6M/(AH)}$		下縁応力 $\frac{\sigma_{XR-L}}{6M/(AH)}$	
	実験値	理論値	実験値	理論値	実験値	理論値
A—I	0.350	0.327	0.413	0.326	0.750	0.670
A—II	0.320	0.318	0.423	0.291	0.821	0.625
B—I	0.320	0.315	0.365	0.302	0.760	0.656
B—II	0.363	0.303	0.249	0.282	0.780	0.657
C—I	0.500	0.500	0.567	0.796	0.567	0.796

第7図 収縮による梁の曲げ (A-II 試験片)

第8図 収縮による梁の曲げ (B-II 試験片)

ラフにおいては、収縮の大きさ $\theta_F - \theta_R$ は、応力分布を直線で近似して (9) 式によって求めた第3表の値を用いた。なお、第3表には中立軸の位置 Δs の実験値および (6) 式による理論値も示してある。

4-3. 収縮による矩形板の応力 ファイバーが中央に挿入されている C-II 試験片の収縮応力による光弾性縮写真は第10図である。剪断応力差積分法で求めたX軸およびY軸に沿う応力分布を示すと第11図の実線のようになる。Y軸に沿う応力 σ_{XR} の分布はほぼ一定であるから、矩形板のY軸に沿う板厚断面全体

第9図 収縮による梁の曲げ応力分布 (A-II 試験片)

第3表 収縮による梁の曲げ試験結果

試験片	中立軸 $\Delta s/H$		収 縮 $\theta_F - \theta_R$
	実験値	理論値	
A—II	0.686	0.704	1.17×10^{-2}
B—II	0.693	0.710	0.76×10^{-2}

にわたって樹脂およびファイバーの歪みが同一であるとして求めた式、

$$\theta_F - \theta_R = \frac{1 + a(e-1)}{a} \cdot \frac{\sigma_{XR}}{E_s} \quad (22)$$

によって、Y軸における σ_{XR} の平均値から収縮の大きさを概算できる。第11図においては、 $\theta_F - \theta_R = 1.89 \times 10^{-2}$ を得たが、点線は、この値を (18) 式に代入して求めた理論値である。

4-4. 圧縮による矩形板の応力 ファイバーが中央に挿入されている C-I および C-II 試験片について、平押しによって圧縮実験を行なった。第10図のような初期縮のある C-II 試験片を圧縮したときの写真が第12図である。C-I 試験片のY軸に沿う応力

第 10 図 収縮による矩形板の応力
(C-II 試験片: $P=0$ kg)

σ_{XR} の分布は、第 13 図のようになる。理論値は、(21) 式によって求めたものである。

5. 結 論

FRP 平板に曲げ荷重がかかる 場合の板厚断面のモ

第 12 図 圧縮による矩形板の応力
(C-II 試験片: $P=80$ kg)

デルとして、ファイバーが挿入された梁を考え、この梁の外モーメントによる曲げおよび収縮による曲げを梁理論によって解析した。この解析結果を、鋼線が挿入されたエポキシ樹脂板による光弾性実験の結果と比較したが、よい一致を得た。

つぎに、FRP 平板に面内荷重がかかる場合のモデルとして、円形断面をもつファイバーが挿入された無限板を考え、平板の収縮による応力および圧縮による応力を、ファイバーを楕円 inclusion とみなして解析した。この場合も、鋼線が挿入されたエポキシ樹脂の矩形板による光弾性実験の結果と比較したが、大体においてよい一致が得られた。挿入された鋼線の端部は円錐形になっており、その付近で応力が最大になることは理論と一致するが、大きさは理論値より低い。太さが変わらないような形状のファイバーの端部では、直角の隅において大きな応力集中が発生することが報告されている^{8,11)} が、端部の形状と応力集中との関係をもっと詳しく研究する必要があると思う²⁶⁾。

収縮による応力は、梁の曲げにおいても矩形板においても非常に大きいので、加熱 curing は FRP にとって有利ではない。(7) 式および (18) 式またはそれらをグラフにした第 9 図および第 11 図の応力の無次元表示は、shrinkage-concentration factor¹⁸⁾ と呼ばれるものに相当する。

ファイバーを含む樹脂板のように、2 相が

第 11 図 収縮による矩形板の応力分布 (C-II 試験片)

第13図 圧縮による矩形板の応力分布
(C-I 試験片)

存在する試験片に外力をかける光弾性実験においては、弾性係数の比が応力分布に影響するので、実物と模型とは、形状のみでなく弾性係数の比も同一にしなければならない。そうすれば、外力が同一のとき同一応力分布が得られることは、梁の外モーメントによる曲げを示す(3)式、(4)式および無限板の圧縮による応力を示す(21)式を見れば明らかである。

また、収縮応力の実験においては、形状および弾性係数比を同一にした上に、 $E_R(\theta_F - \theta_R)$ も同一にしなければならないことは、収縮による梁の曲げ応力を示す(7)式、(8)式および収縮による無限板の応力を示す(18)式をみれば了解できる。

なお、収縮応力の実験は加熱 curing による樹脂の収縮を利用したが、均一温度変化を与えたときの熱変形における、収縮に相当する量は

$$\theta_F - \theta_R = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_F - \alpha_R) dT \quad (23)$$

となるので、均一温度変化によっても収縮応力を測定できる^{19,20)}。言い換えれば、化学変化による収縮応力と、均一温度変化による熱応力とは同等であるから、前に求めた理論式に(23)式を代入すれば熱応力が求まり、また、加熱 curing による収縮によって簡単に熱応力を光弾性で解析できるわけである。もちろん、非定常熱応力や温度勾配のあるときの定常熱応力については、一般の場合と同様に、より複雑な熱光弾性実験が必要である。

ところで、curing するときガラス転移点以上で加熱したが、このために当然応力が凍結されるはずで、事実、ファイバーを切り取った後も光弾性縞が残ることが確認された。しかし、この残留した縞の中には常温におけるクリープによるものも含まれている⁹⁾ わけで、本論文では、高温で凍結された縞は小さいものと

して常温における応力感度および弾性係数比を用いて解析した。

応力が凍結されないようにするには、転移点が常温以下の光弾性材料を用いればよいが、エポキシ樹脂では転移点以下で curing しても curing 中にいつも力がかかっているので縞が凍結される²¹⁾。

モーター・ケースに接着されたグレーンの収縮応力を加熱 curing によって光弾性で解析する方法が最近進められているが^{18,22,23,24)}、FRP においても有効であることがわかった。3次元応力を知るためには、上記の高温で凍結された縞を積極的に利用すればよい²²⁾。

参考文献

- 1) HAYASHI, T.: Photoelastic Untersuchungen der Spannungsverteilung in der durch Fasern verstärkten Platte, Proc. I.U.T.A.M. Symposium on Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, (1959), p. 501.
- 2) HAYASHI, T.: Reinforcement Effect of Fibers in Fiber-Reinforced Plastics, Proc. Fifth International Symposium on Space Technology and Science, Tokyo, (1964), p. 683.
- 3) TYSON, W. R. and DAVIES, G. J.: A Photoelastic Study of the Shear Stresses Associated with the Transfer of Stress during Fiber Reinforcement, Brit. J. Appl. Phys., Vol. 16, No. 2, (1965), p. 199.
- 4) COX, H. L.: The Elasticity and Strength of Paper and Other Fibrous Materials, Brit. J. Appl. Phys., Vol. 3, No. 3, (1952), p. 72.
- 5) JASWON, M. A. and BHARGAVA, R. D.: Two-dimensional Elastic Inclusion Problems, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 57, (1961), p. 669.
- 6) 林 毅: 直交異方性材料による光弾性実験法, 応用物理, 第31巻, 第10号, (1962), p. 808.
- 7) HORRIDGE, G. A.: A Polarized Light Study of Glass Fiber Laminates, Brit. J. Appl. Phys., Vol. 6, No. 9, (1955), p. 314.
- 8) DANIEL, I. M. and DURELLI, A. J.: Photoelastic Investigation of Residual Stresses in Glass-Plastic Composites, 16th Annual Meeting of the Reinforced Plastics Division, The Society of the Plastics Industry, (1961), Section 19-A.
- 9) DANIEL, I. M. and DURELLI, A. J.: Shrinkage Stresses around Rigid Inclusions, Experimental Mechanics, Vol. 2, (1962), p. 240.
- 10) WEST, D. C. and OUTWATER, J. O.: The Stress Distribution in the Resin of Reinforced Plastics, 16th Annual Meeting of the Reinforced Plastics Division, The Society of the Plastics Industry, (1961), Section 19-B.
- 11) SCHUSTER, D. M. and SCALA, E.: The Mechanical Interaction of Sapphire Whiskers in a Birefringent Matrix, J. Metals, Vol. 15, (1963), p. 697.
- 12) BIGNELL, V. F., SMALLEY, V. and ROBERTS, N. P.: A New Photoelastic Material for Use in Problems concerning Reinforced Concrete, Mag. Concrete Research, Vol. 15, No. 45, (1963), p. 171.
- 13) 戸塚 学, 城田廣年: 鉄筋コンクリート梁の一考察, 第14回応用力学連合講演会 論文抄録集, 第1部, (1964), p. 29.
- 14) ESHLEY, J. D.: The Elastic Field outside an Ellipsoidal Inclusion, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 252, (1959), p. 561.
- 15) ESHLEY, J. D.: The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 241, (1957), p. 376.
- 16) SHAFFER, B. W.: Stress-strain Relations of Reinforced Plastics Parallel and Normal to Their Internal Filaments, AIAA J., Vol. 2, No. 2, (1964), p. 348.

- 17) HASHIN, Z. and ROSEN, B.W.: The Elastic Moduli of Fiber-reinforced Materials, J. Appl. Mech., Vol. 31, (1964), p. 223.
- 18) DURELLI, A. J. and PARKS, V. J.: New Method to Determine Restrained-Shrinkage Stress in Propellant-grain Models, Experimental Mechanics, Vol. 3, (1963), p. 263.
- 19) DURELLI, A. J. and TSAO, C. H.: Determination of Thermal Stresses in Three-Ply Laminates, J. Appl. Mech., Vol. 22, (1955), p. 190.
- 20) 林 邦夫, 天王寺谷 稔: 前後縁に異種材料を用いた薄翼の熱応力分布に関する光弾性実験, 第 15 回応用力学連合講演会論文抄録集, 第 1 部, (1965), p. 73.
- 21) DALLY, J. W., DURELLI, A. J. and RILEY, W. F.: A New Method to "Lock-in" Elastic Effects for Experimental Stress Analysis, J. Appl. Mech., Vol. 25, (1958), p. 189.
- 22) SAMPSON, R. C.: A Three-dimensional Photoelastic Method for Analysis of Differential-contraction Stresses, Experimental Mechanics, Vol. 3, (1963), p. 225.
- 23) PARKS, V. J. and DURELLI, A. J.: Photoelastic Analysis of Plates Subjected to Restrained Shrinkage, J. Appl. Mech., Vol. 32, (1965), p. 504.
- 24) DURELLI, A. J. and PARKS, V. J.: Photoelasticity Methods to Determine Stresses in Propellant-grain Models, Experimental Mechanics, Vol. 5, (1965), p. 33.
- 25) ADAMS, S. F.: Photoelastic Concrete Similitude with CR-39 Reinforced with Epoxy and Glass, Experimental Mechanics, Vol. 6, (1966), p. 54.
- 26) MACLAUGHLIN, T. F.: Effect of Fiber Geometry on Stress in Fiber-reinforced Composite Materials, Experimental Mechanics, Vol. 6, (1966), p. 481.
- 27) ADAMS, S. F.: Photoelastic Analysis with an Interferometer Simulating Reinforced Simple Concrete Beams, Experimental Mechanics, Vol. 6, (1966), p. 571.

表紙写真説明

FRP などの複合材料に生ずる応力は, 異種材料を組み合わせて作った光弾性模型を用いて調べることができる。

写真は, FRP におけるファイバーの補強効果を検討する目的で, FRP の単純化した模型を作りファイバーと樹脂との干渉応力を調べたものである。すなわち, エポキシ樹脂板中に有限長の鋼線を中央に対称に挿入した模型を作り, その上半分を光弾性装置によって撮影したものである。

左図は, 外力はなく樹脂のキュアに伴う収縮のみによって生じた応力であり, それを上下方向に圧縮した

のが右図である。ファイバーの端末付近に著しい応力集中が生じていることがわかる。(林 毅, 小山一夫, 近藤恭平)